Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (3) 1988, S. 277–285

Zum Vergleich verschiedener Dualitätsbegriffe aus der Sicht der Steuerungstheorie

S. PICKENHAIN

Es wird der Vergleich zwischen verschiedenen Dualitätsbegriffen aus der Sicht der Steuerungstheorie geführt. Es wird gezeigt, daß unter schwachen Regularitätsannahmen die Konzeptionen im Sinne von R. T. Rockafellar [6] und J. Hersch [3] mit der von R. KLÖTZLER [5] übereinstimmen, wenn man in letztgenannter einen linearen Ansatz für die zulässigen Elemente wählt.

Сравниваются различные понятия двойственности с точки зрения теории оптимального управления. Показывается, что при слабых предположениях о регулярности концепции в смысле Р. Т. Рокафеллара [6] и И. Херша [3] совпадают с двойственностью в смысле Р. Клётцлера [5], если в последней выбирается линейная формулировка для допустимых элементов.

Several conceptions of duality from the view-point of optimal control theory are compared. It is proved that under weak regularity assumptions the conceptions of R. T. Rockafellar [6] and J. Hersch [3] are in accordance with the conception of R. Klötzler [5], if we choose a linear statement for the admissible elements in the last conception.

1. Einleitung

In den verschiedensten Anwendungsgebieten, in denen die betrachteten Probleme als Extremalaufgaben formuliert werden können, spielen Paare dualer oder komplementärer Extremalprobleme eine Rolle. Für Probleme der Physik und Mechanik, die auf lineare Randwertaufgaben führen, ist die Charakterisierung der Lösung durch komplementäre Extremalprinzipien schon lange bekannt, vgl. [8]. Für reguläre Variationsprobleme entwickelte K. FRIEDRICHS [2] 1929 eine Dualitätskonzeption, die von R. T. ROCKAFELLAR [6] sowie J. EKELAND und R. TEMAM [1] verallgemeinert wurde und auf konvexe Variationsprobleme anwendbar ist. Der von R. KLÖTZLER [5] für Steuerungsprobleme entwickelte Dualitätsbegriff überwindet diese Konvexitätsannahmen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, den Zusammenhang zwischen verschiedenen Dualitätskonzeptionen aus der Sicht der Steuerungstheorie herzustellen.

2. Zum Begriff der Dualität von Extremalaufgaben

Es sei die *primale* Aufgabe in folgender allgemeinen Gestalt gegeben:

$$f(x) \to \text{inf!} \quad \text{bez. aller } x \in X, \tag{1}$$

wobei X eine beliebige Menge und f ein auf dieser Menge definiertes reelles Funktional ist. Dann ist die Aufgabe

$$g(y) \to \text{sup!} \quad \text{bez. aller } y \in Y, \tag{2}$$

wobei g ein auf der Menge Y gegebenes reelles Funktional ist, eine *duale* Aufgabe zu (1), falls

$$g(y) \leqq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X, y \in Y \tag{3}$$

gilt. Ist die Gleichung

$$\sup \{g(y) \mid y \in Y\} = \inf \{f(x) \mid x \in X\}$$

erfüllt, so sprechen wir von *starker Dualität* zwischen primaler und dualer Aufgabe.

3. Zusammenhang zwischen Fenchel-Rockafellarscher und Klötzlerscher Dualitätskonzeption

Die primale Aufgabe sei in Form eines Steuerungsproblems in *Dieudonné-Rashevskyscher Form* gegeben:

$$\text{(P)} \qquad F(x, u) = \int_{\Omega} r(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf!, \qquad \Omega \subset \mathbf{R}^m,$$

bez. aller $x \in W_1^{1,n}(\Omega)$[1]) und $u \in L_1^r(\Omega)$, die den Bedingungen

$$x_{t_\alpha}(t) = g_\alpha(t, x(t), u(t)) \quad \text{f. ü. auf } \Omega \ (\alpha = 1, \ldots, m),$$
$$x(t) \in \overline{X}(t) \quad \text{auf } \Omega,$$
$$u(t) \in U \quad \text{f. ü. auf } \Omega,\ U \in \operatorname{comp}(\mathbf{R}^r),$$
$$x(s) = x_s \quad \text{auf } \partial\Omega \ (\partial\Omega - \text{Rand von } \Omega)$$

genügen. Dabei seien Ω und $G := \{(t, \xi) \mid t \in \Omega, \xi \in X(t)\}$ strenge Lipschitz-Gebiete im Sinne von C. B. MORREY und S. HILDEBRANDT [4] und die auftretenden Funktionen r und g_α seien stetig bez. aller Argumente. Es existiere ein zu (P) zulässiger Prozeß (x, u).

Nach R. KLÖTZLER [5] ist die Aufgabe

$$(\mathbf{D}_K) \qquad L(\mathbf{S}) = \inf_{\varrho \in \mathfrak{X}} \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}(s, \varrho(s))^{\mathrm{T}}\, \mathrm{e}(s)\, do(s) \to \sup!$$

bez. aller $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$,

$$\mathfrak{S} := \left\{ \mathbf{S} \in W_\infty^{1,m}(G) \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{m} S_{\alpha_{t_\alpha}}(t) + \mathcal{H}(t, \xi, \nabla\xi(t, \xi)) \leqq 0 \text{ auf } G \right\},$$

$$\mathfrak{X} := \{x \in W_1^{1,n}(\Omega) \mid x(s) = x_s \text{ auf } \partial\Omega\}$$

eine duale Aufgabe zu (P). Dabei sei $\mathrm{e}(s)$ der nach außen orientierte Normaleneinheitsvektor an $\partial\Omega$ in s.

Wir wollen die Aufgabe (P) nun gemäß Fenchel-Rockafellarscher Konzeption dualisieren. Dazu transformieren wir das Steuerungsproblem (P) gemäß [6] in folgendes allgemeine Variationsproblem:

$$(\mathbf{V}) \qquad \int_{\Omega} L(t, x(t), P(D)\, x(t))\, dt \to \inf! \quad \text{bez. aller } x \in \mathfrak{X}$$

---

[1]) $W_p^{1,n}(\Omega)$ bezeichnet den Vektorraum der n-dimensionalen Vektorfunktionen des $L_p^n(\Omega)$, die fast überall in Ω differenzierbar sind und deren Ableitung in $L_p^n(\Omega)$ liegt.

wobei gilt

$$L(t, \xi, w) = \begin{cases} \inf \{r(t, \xi, v) : v \in U \text{ mit } w_\alpha = g_\alpha(t, \xi, v) \text{ falls } (t, \xi) \in \bar{G}\} \\ \infty \quad \text{falls } (t, \xi) \notin \bar{G} \text{ oder } \{v \in U : w_\alpha = g_\alpha(t, \xi, v)\} = \emptyset \end{cases}$$

und

$$P(D)\, x = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} x^{\mathrm{T}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_m} x^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Wir betrachten nunmehr den Fall $x_s = 0$ auf $\partial\Omega$, auf den der allgemeine Fall leicht zurückgeführt werden kann.

Die Fenchel-Rockafellarsche Dualitätskonzeption ist anwendbar, wenn folgendes gilt:

A) L ist eine Caratheodory-Funktion, d. h. $L(\cdot, \xi, w)$ ist meßbar für alle $(\xi, w) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{nm}$ und $L(t, \cdot, \cdot)$ unterhalbstetig für alle $t \in \mathbf{R}^m$.

B) $L \not\equiv +\infty$, $L(t, \cdot, \cdot)$ konvex auf $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{nm}$ für alle $t \in \mathbf{R}^m$ und $L(t, x(t), P(D)\, x(t)) \geqq \alpha(t)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ $(\alpha \in L_1(\Omega))$.

C) $\mathfrak{X}$ ist konvex.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, dann ist nach [6] die Aufgabe (V) wohldefiniert und es gilt die Äquivalenz der Probleme (P) und (V) im Sinne der Gleichheit der Infima.

Anmerkung 1: Bedingungen dafür, daß (P) die Voraussetzungen A, B und C erfüllt, sind in [6] angegeben.

Die Voraussetzungen A, B und C setzen wir als erfüllt voraus. Wir dualisieren nun (V). Dazu sei

$$Y = W_1^{1,n}(\Omega) \times L_1^{mn}(\Omega), \qquad \Lambda x = (x, P(D)\, x),$$

N — die Indikatorfunktion zur Menge $\mathfrak{X}$,

$$G(p) = \int_\Omega L(t, p(t))\, dt \quad \text{für } p \in Y.$$

Mit diesen Setzungen ist (V) identisch zum Problem

(R) $\quad N(x) + G(\Lambda x) \to \inf!$ bez. $x \in W_1^{1,n}(\Omega)$.

Laut Fenchel-Rockafellarscher Theorie erhalten wir dazu das Dualproblem

($\mathrm{D_R}$) $\quad -N^*(\Lambda^* \mathbf{p}^*) - G^*(-\mathbf{p}^*) \to \sup!$ bez. $\mathbf{p}^* \in Y^*$.

Wir berechnen nun für die konkrete Aufgabenstellung die in ($\mathrm{D_R}$) auftretenden Ausdrücke.

1. Nach [1: Prop. 1.2/S. 78] gilt

$$G^*(-\mathbf{p}^*) = \int_\Omega L^*(t, -\mathbf{p}^*(t))\, dt$$

und nach Definition der *Fenchel-Konjugierten* einer Funktion ist

$$L^*(t, \eta^*) = \sup \{\eta^{\mathrm{T}} \eta^* - L(t, \eta) \mid \eta \in \mathbf{R}^{n+nm}\}.$$

Somit ist

$$L^*(t, \mathbf{p}^*(t)) = \sup_{(\xi, w) \in \mathbf{R}^{n+nm}} \{p_0^*(t)^{\mathrm{T}}\, \xi + p^*(t)^{\mathrm{T}}\, w - L(t, \xi, w)\}$$

mit

$$\mathbf{p}^*(t)^{\mathrm{T}} = \left(p_0^*(t)^{\mathrm{T}}, p_1^*(t)^{\mathrm{T}}, \ldots, p_m^*(t)^{\mathrm{T}}\right),$$

$$p^*(t)^{\mathrm{T}} = \left(p_1^*(t)^{\mathrm{T}}, \ldots, p_m^*(t)^{\mathrm{T}}\right), \qquad p_\alpha^*(t)^{\mathrm{T}} = \left(p_\alpha^{1*}(t), \ldots, p_\alpha^{n*}(t)\right),$$

und nach Definition von L ergibt sich

$$L^*\left(t, \mathbf{p}^*(t)\right) = \sup_{\xi \in \overline{X}(t)} \left[p_0^*(t)^{\mathrm{T}} \xi + \sup_{v \in U} \left\{\sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha^*(t)^{\mathrm{T}} g_\alpha(t, \xi, v) - r(t, \xi, v)\right\}\right].$$

Führen wir an dieser Stelle die *Hamilton-Funktion*

$$\mathscr{H}: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{mn} \to \mathbf{R}^1$$

mit

$$\mathscr{H}(t, \xi, p) = \sup \left\{-r(t, \xi, v) + \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha^*(t)^{\mathrm{T}} g_\alpha(t, \xi, v) \mid v \in U\right\}$$

ein, so ergibt sich

$$L^*\left(t, -\mathbf{p}^*(t)\right) = \sup\left[-p_0^*(t)^{\mathrm{T}} \xi + \mathscr{H}(t, \xi, -p^*(t)) \mid \xi \in \overline{X}(t)\right].$$

2. Wir bestimmen nunmehr den Ausdruck $N^*(\Lambda^*\mathbf{p}^*)$. Nach Definition ist

$$N^*(\Lambda^*\mathbf{p}^*) = \sup \{\langle \Lambda^*\mathbf{p}^*, x\rangle - N(x) \mid x \in W_1^{1,n}(\Omega)\}.$$

Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt in $W_1^{1,n}(\Omega)$. Weiter ist nach Definition des adjungierten Operators

$$\sup \{\langle \Lambda^*\mathbf{p}^*, x\rangle \mid x \in \mathfrak{x}\} = \sup \{\langle\langle \mathbf{p}^*, \Lambda x\rangle\rangle \mid x \in \mathfrak{x}\},$$

wo $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ das innere Produkt in Y bezeichnet. Damit erhalten wir

$$N^*(\Lambda^*\mathbf{p}^*) = \sup \left[\int_\Omega \{p_0^*(t)^{\mathrm{T}} x(t) + p^*(t)\, P(D)\, x(t)\}\, dt \mid x \in \mathfrak{x}\right].$$

Mit den unter diesen Punkten 1 und 2 berechneten Ausdrücken lautet also die im Fenchel-Rockafellarschen Sinne duale Aufgabe zu (P) folgendermaßen:

$$-\sup \left[\int_\Omega (p_0^*(t)^{\mathrm{T}} x(t) + p^*(t)^{\mathrm{T}} P(D)\, x(t))\, dt \mid x \in \mathfrak{x}\right]$$

$$-\int_\Omega \sup\left[-p_0(t)^{\mathrm{T}} \xi + \mathscr{H}(t, \xi, -p^*(t)) \mid \xi \in \overline{X}(t)\right] dt$$

$$\to \sup! \quad \text{bez. aller } \mathbf{p}^* \in Y^* = [L_1^{n+nm}(\Omega)]^* = L_\infty^{n+nm}(\Omega).$$

Die Einschränkung des zulässigen Bereiches der Aufgabe ($\mathrm{D_R}$) auf $\mathbf{p}^* = (p_0^*, p^*) \in L_\infty^n(\Omega) \times W_\infty^{1,nm}(\Omega)$ führt zu folgender Darstellung:

$$(\mathrm{D_R}') \qquad \Phi(p^*) := -\int_\Omega \sup \left[\sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)^{\mathrm{T}} \xi + \mathscr{H}(t, \xi, p^*(t)) \mid \xi \in \overline{X}(t)\right] dt$$

$$\to \sup! \quad \text{bez. aller } p^* \in W_\infty^{1,nm}(\Omega).$$

Hierbei wird berücksichtigt, daß folgendes gilt:

$$\sup \left[\int_\Omega (p_0^*(t)^{\mathrm{T}} x(t) + p^*(t)\, P(D)\, x(t))\, dt \mid x \in \mathfrak{x}\right]$$

$$= \sup \left[\int_\Omega \left(p_0^*(t)^{\mathrm{T}} - \sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)\right) x(t)\, dt \mid x \in \mathfrak{x}\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } p_0^*(t) = \sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t) \text{ f. ü. auf } \Omega, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zwischen den Suprema der Aufgaben (D_R) und (D_R') ist folglich die Relation sup (D_R) $\geqq$ sup (D_R') gegeben.

Wir wollen nun die Aufgabe (D_R') weiter äquivalent umformen.

Satz 1: *Die Aufgabe* (D_R') *ist äquivalent zu folgendem Problem:*

$$(\mathrm{D_L}) \qquad \int_\Omega \left(z^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1}\right) dt \to \sup!$$

bez. aller $(z^{*\mathrm{T}}, p_1^{*\mathrm{T}}, \ldots, p_m^{*\mathrm{T}}) \in L_\infty^m(\Omega) \times W_\infty^{1,nm}(\Omega)$ *mit*

$$\sup\left[\sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)^{\mathrm{T}}\, \xi + \mathcal{H}(t, \xi, p) + z^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1} \mid \xi \in \overline{X}(t)\right] \leqq 0.$$

Beweis: Zunächst kann man im Zielfunktional der Aufgabe (D_R') den Ausdruck $\int_\Omega \left(z^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1}\right) dt$ für beliebige $z \in L_\infty^m(\Omega)$ addieren und gleichzeitig wieder subtrahieren. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi(p^*) &= \psi(z^*, p^*)\\ &= -\int_\Omega \sup\left[\sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)^{\mathrm{T}}\, \xi + \mathcal{H}(t, \xi, p^*) + z^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1} \mid \xi \in X(t)\right] dt\\ &\quad + \int_\Omega \left(z^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1}\right) dt\end{aligned}$$

für alle $z^* \in L_\infty^m(\Omega)$. Gilt nun für ein $(z^*, p^*) \in L_\infty^m(\Omega) \times W_\infty^{1,nm}(\Omega)$ die Ungleichheit

$$\delta(t) := \sup\left[\sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)^{\mathrm{T}}\, \xi + \mathcal{H}\big(t, \xi, p(t)\big) + z^{*\mathrm{T}}(t)\, \mathbf{1} \mid \xi \in \overline{X}(t)\right] \neq 0^{2)}$$

so ist für $\hat{z}^*(t) = z^*(t) - 1/m\mathbf{1}\delta(t)$ die Gleichung

$$\sup\left[\sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)^{\mathrm{T}}\, \xi + \mathcal{H}\big(t, \xi, p(t)\big) + \hat{z}^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1} \mid \xi \in \overline{X}(t)\right] = 0$$

erfüllt und das Zielfunktional hat die Gestalt

$$\Phi(p^*) = \psi(z^*, p^*) = \psi(\hat{z}^*, p^*) = \int_\Omega \hat{z}^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1}\, dt.$$

Somit ist (D_R') äquivalent zur Aufgabe

$$\int_\Omega z^{*\mathrm{T}}(t)\, \mathbf{1}\, dt \to \sup!$$

bez. aller $(z^*, p^*) \in L_\infty^m(\Omega) \times W_\infty^{1,nm}(\Omega)$ mit

$$\delta(t) = \sup\left[\sum_{\alpha=1}^{m} p^*_{\alpha_{t_\alpha}}(t)^{\mathrm{T}}\, \xi + \mathcal{H}\big(t, \xi, p^*(t)\big) + z^*(t)^{\mathrm{T}}\, \mathbf{1} \mid \xi \in \overline{X}(t)\right] = 0.$$

Gelten für ein $(\hat{z}^*, \hat{p}^*) \in L_\infty^m(\Omega) \times W_\infty^{1,nm}(\Omega)$ die Relationen

$$\delta(t) < 0 \quad \text{für alle } t \subset \Omega' \subseteqq \Omega,\ \operatorname{mes} \Omega' > 0,$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{auf } \Omega \setminus \Omega',$$

---

2) Infolge der Kompaktheitsannahme für $\overline{X}(t)$ und U ist die Endlichkeit von $\delta(t)$, $t \in \Omega$, gesichert.

dann ist $\big((\hat{z}^* - 1/m\delta(t)\,1), p\big)$ zulässig zu (D_R') und liefert einen größeren Zielfunktionalwert als $(\hat{z}^*, \hat{p}^*)$,

$$\int_\Omega \big(\hat{z}^* - 1/m\delta(t)\,1\big)^T 1\,dt = -\int_\Omega \delta(t)\,dt + \int_\Omega \hat{z}^*(t)^T 1\,dt > \psi(\hat{z}^*, \hat{p}^*).$$

Deshalb bleibt der Optimalwert der Aufgabe (D_R') unverändert, wenn wir anstelle der Gleichung $\delta(t) = 0$ nur die Ungleichung $\delta(t) \leqq 0$ fordern. Damit ist der Satz bewiesen ∎

Satz 2: *Die zu* (P) *dualen Aufgaben* (D_L) *und* (D_K) *stimmen überein, wenn man für* S *in* (D_K) *den linearen Ansatz*

$$S_\alpha(t, \xi) = a_\alpha(t) + \sum_{i=1}^n p_\alpha{}^{*i}\xi^i \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

mit $a_{\alpha_{t_\alpha}} = z_\alpha{}^*$ *wählt.*

Beweis: Nach Gaußschem Integralsatz ist

$$\inf\left\{\int_\Omega \mathrm{S}\big(s, \varrho(s)\big)\, \mathrm{e}(s)\, do(s) \mid \varrho \in \mathfrak{X}\right\}$$
$$= \inf\left\{\int_\Omega \sum_{\alpha=1}^m \left[S_{\alpha_{t_\alpha}}\big(t, \varrho(t)\big) + \sum_{i=1}^n S_{\alpha_{\xi_i}}\big(t, \varrho(t)\big)\, \varrho^i_{t_\alpha}(t)\right] dt \mid \varrho \in \mathfrak{X}\right\}$$
$$= \int_\Omega z^{*T}(t)\, 1\, dt$$

und

$$\sum_{\alpha=1}^m S_{\alpha_{t_\alpha}}(t, \xi) + \mathcal{H}\big(t, \xi, \nabla_\xi S(t, \xi)\big)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^m \left(z_\alpha(t) + \sum_{i=1}^n p^{*i}_{\alpha_{t_\alpha}}\xi^i\right) + \mathcal{H}\big(t, \xi, p^*(t)\big) \leqq 0 \quad \text{f. ü. auf } G \quad ∎$$

Damit wurde gezeigt, daß bei etwas verschärften Forderungen an die Regularität der dualen Aufgabe $\big(p^* \in W^{1,nm}_\infty(\Omega)\big)$ die Fenchel-Rockafellarsche Konzeption mit der Dualitätskonzeption im Sinne von Klötzler übereinstimmt, wenn man in der dualen Aufgabe nach Klötzler einen linearen Ansatz für die zulässigen Elemente wählt.

4. Die Methode der additiven Zerlegung bei Operatorengleichungen

Die im folgenden beschriebene Methode wurde in der Literatur in verschiedenen Zusammenhängen vorgeschlagen, vgl. z. B. J. HERSCH [3] und M. G. SLOBODIANSKI [7]. Für lineare Operatorengleichungen kann sie wie folgt beschrieben werden: Sei **E** ein linearer Raum mit inneren Produkt $(\cdot, \cdot)$ und X ein linearer Unterraum von **E**. Die Operatorengleichung

$$Ax = f, \qquad x \in X,$$

besitze eine Lösung $\bar{x} \in X$. A sei symmetrisch auf **E** und positiv definit auf X. Dann ist $\bar{x} \in \mathbf{E}$ eindeutig bestimmt und zugleich Lösung des Variationsproblems

$$(\mathrm{V}_1) \qquad I(x) := 2^{-1}(Ax, x) - (f, x) \to \inf! \quad \text{bez. } x \in X.$$

Eine Möglichkeit, ein komplementäres Extremalproblem zu konstruieren, beruht auf der Zerlegung des Operators A der Gestalt

$$A = A_1 + \cdots + A_r$$

mit A_i linear, symmetrisch und nichtnegativ, und $D(A_i) \supset X$ $(i = 1, \ldots, r)$. Es gilt der folgende starke Dualitätssatz.

Satz 3: *Es ist*

$$\min_{x \in X} I(x) = \overset{\circ}{I}(\bar{x}) = \max_{v' \in Y} \left\{ -\sum_{i=1}^{r} (v_i, A_i v_i) \right\} = -\sum_{i=1}^{r} (\bar{x}, A_i \bar{x})$$

mit

$$Y = \{v' = (v_1, \ldots, v_r) \mid v_i \in D(A_i) \text{ für } i = 1, \ldots, r \text{ und } \sum_{i=1}^{r} A_i v_i = f\}.$$

Beweis: vgl. [8] ∎

Die Überführung der Aufgabe (V_1) in ein Variationsproblem (P) kann nur für bestimmte Aufgabenklassen einheitlich vorgenommen werden. Wir betrachten deshalb eine typische Anwendung. Für $f \in L_2(\Omega)$ und eine positive Konstante c studieren wir die Randwertaufgabe

$$-a_{11}x - \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta} x_{t_\alpha t_\beta} + cx = f \quad \text{in } \Omega$$

$$x = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

mit

$$\mathrm{E} = L_2(\Omega), \qquad X = \{x \in W_2^2(\Omega) \mid x = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} =: W_2^2(\Omega),$$

$$A_1 x = -a_{11} x_{t_1 t_1}, \qquad A_2 x = -\sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta} x_{t_\alpha t_\beta}, \qquad A_3 x = cx, \qquad x \in X,$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3, \qquad D(A_1) = D(A_2) = X, \qquad D(A_3) = L_2(\Omega)$$

und A_i symmetrisch und nichtnegativ auf $D(A_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Dann lautet hierzu nach [3, 7] die duale Aufgabe

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega} \left\{ -w_1 a_{11} w_{1 t_1 t_1} - w_2 \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta} w_{2 t_\alpha t_\beta} + w_3 c w_3 \right\} dt \to \max!$$

bez. aller $(w_1, w_2, w_3) \in \mathring{W}_2^2(\Omega) \times \mathring{W}_2^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ mit

$$-a_{11} w_{1 t_1 t_1} - \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta} w_{2 t_\alpha t_\beta} + c w_3 = f \quad \text{in } \Omega.$$

Das zur betrachteten Randwertaufgabe äquivalente Steuerungsproblem ist

$$F(x, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(a_{11} u_1^2(t) + \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta} u_\alpha(t)\, u_\beta(t) + c x^2(t) - 2 f(t)\, x(t) \right) dt \to \min!$$

bez. aller $x \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ mit $x_{t_\alpha}(t) = u_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, \ldots, N)$.

Diese Aufgabe dualisieren wir im Sinne von R. Klötzler [5]. Es ist

$$H(t, \xi, v, y) = -\frac{1}{2} a_{11} v_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta - \frac{1}{2} c\xi^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} y_\alpha v_\alpha + f \cdot \xi.$$

Wegen der Konkavität von H in v_1 und $v_2, \ldots, v_N$ sind dafür, daß H in $v_1, v_2, \ldots, v_N$ das Maximum annimmt, die Bedingungen

$$H_{v_1} = 0 = -a_{11}v_1{}^* + y_1,$$

$$H_v = 0 - a_j v + y_j \quad (j = 2, \ldots, N),$$

d. h.

$$y_1 = a_{11}v_1 \quad \text{und} \quad y_j = \sum_{\beta=1}^{N} a_{j\beta}v_\beta \quad (j = 2, \ldots, N) \quad \circ \tag{4}$$

notwendig und hinreichend. Mit linearem Ansatz für **S**, $S_\alpha = a_\alpha(t) + y_\alpha(t)$, lautet die duale Aufgabe ($\mathrm{D_K}$)

$$\int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{N} a_{\alpha_{t_\alpha}}(t)\,dt \to \min!$$

bez. aller $(a, y) \in L^m(\Omega) \times W^{1,m}(\Omega)$ mit $m = N$,

$$K(t, \xi) := \sum_{\alpha=1}^{N} \left(a_{\alpha_{t_\alpha}}(t) + y_\alpha(t)\,\xi\right) + \mathcal{H}(t, \xi, y) \leqq 0 \quad \text{f. ü. auf } G.$$

Wir werten den Ausdruck $K(t, \xi) \leqq 0$ (der *Hamilton-Jacobischen Differentialungleichung*) mittels (4) aus:

$$K(t, \xi) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_{\alpha_{t_\alpha}}(t) + \frac{1}{2}\,a_{11}v_1{}^{*2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta}v_\alpha{}^*(t)\,v_\beta{}^*(t) + a_{11}v^*_{1t_1}(t)\,\xi$$
$$+ \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta}v^*_{\beta t_\alpha}(t)\,\xi - \frac{1}{2}\,c\xi^2 + f\xi \leqq 0.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $K(t, \xi)$ für $\xi = w_3(t)$, $w_3 \in L_2(\Omega)$, das Maximum annimmt, ist wegen der Konkavität von K im 2. Argument die Bedingung

$$\frac{d}{d\xi}\,K(t, \xi)_{|\xi = w_3(t)} = 0,$$

d. h. die Bedingung

$$-a_{11}v^*_{1t_1} - \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta}v^*_{\beta t_\alpha} + cw_3 = f \quad \text{f. ü. auf } \Omega. \tag{5}$$

Setzt man $v_1{}^* = w_{1t_1}$, $v_\beta{}^* = w_{2t_\beta}$ $(\beta = 2, \ldots, N)$ für beliebige Funktionen $w_1, w_2 \in \mathring{W}_2{}^2(\Omega)$, dann lautet (5)

$$-a_{11}w_{1t_1t_1} - \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta}w_{2t_\alpha t_\beta} + cw_3 = f \quad \text{in } \Omega,$$

und schließlich fordern wir, daß längs w_3 der Ausdruck $K(t, \xi)$ gleich Null ist, d. h.

$$\sum_{\alpha=1}^{N} a_{\alpha_{t_\alpha}}(t) = -\frac{1}{2}\,a_{11}\left(w_{1t_1}(t)\right)^2 - \sum_{\alpha,\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta}w_{2t_\alpha}w_{2t_\beta} - \frac{1}{2}\,cw_3(t). \tag{6}$$

Damit ist durch den linearen Ansatz für **S**,

$$S_\alpha = a_\alpha + y_\alpha\xi$$

mit

$$y_1 = a_{11}w_1 \quad \text{und} \quad y_j = \sum_{\beta=2}^{N} a_{\alpha\beta}w_{2t_\beta} \quad (j = 2, \ldots, N),$$

die formale Identität der dualen Aufgaben im Klötzlerschen und Herschschen Sinne hergestellt.

Anmerkung 2: Damit wurde mit Satz 3 gleichzeitig gezeigt, daß der spezielle Ansatz $S_{\alpha'} = a_\alpha + a_{\alpha\beta}\bar{x}_{t_\alpha}$, wobei $\bar{x}$ die Lösung der primalen Aufgabe ist und a_α gemäß (6) bestimmt wird, starke Dualität zwischen der primalen Aufgabe und dem Dualproblem im Sinne von R. Klötzler liefert.

Anmerkung 3: Andere Möglichkeiten zur Konstruktion dualer Probleme bei linearen Randwertaufgaben, z. B. die Methode der Konstruktion eines zum Energiefunktional komplementären Funktionals bzw. die Methode der orthogonalen Projektion [8] liefern für bestimmte Aufgabenklassen ein ähnliches Resultat wie das im Abschnitt 4 gewonnene.

LITERATUR

[1] Ekeland, J., and R. Temam: Convex Analysis and Variational Problems. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., and New York: Amer. Elsevier Publ. Comp., Inc. 1976.

[2] Friedrichs, K.: Ein Verfahren der Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen. Göttinger Nachrichten (1929), 13–20.

[3] Hersch, J.: Une transformation variationelle apperentée à celle de Friedrichs, conduisant à la méthode des problèmes auxiliares unidimensionnels. Enseign. Math. 11 (1964), 159 à 169.

[4] Hildebrandt, S.: Über die Identität der Sobolewschen und Calkin-Morreyschen Räume. Math. Annalen 148 (1962), 226–237.

[5] Klötzler, R.: On a general conception of duality in optimal control. Lecture Notes Math. 703 (1979), 189–196.

[6] Rockafellar, R. T.: Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. J. Math. Anal. and Appl. 32 (1970), 174–222.

[7] Слободянский, М. Г.: О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. Докл. Акад. Наук СССР 91 (1953), 733–736.

[8] Velte, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. Stuttgart: B. G. Teubner 1976.

Manuskripteingang: 07. 07. 1987

VERFASSER:

Dr. Sabine Pickenhain
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig