Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (5) 1988, S. 387–404

О поточечной нетривиальности принципа максимума в задачах с фазовыми ограничениями

А. Я. Дубовицкий и В. А. Дубовицкий

Es werden einfache geometrische Bedingungen (hinreichende Kriterien) angegeben, welche garantieren, daß die konjugierte Funktion $\psi(\cdot)$ im Maximumprinzip in allen Punkten des betrachteten Segments (Zeitabschnitts) ungleich Null ist.

Выделены простые геометрические условия, при выполнении которых сопряженная функция $\psi(\cdot)$ в принципе максимума не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого временного сегмента.

Some simple geometric criteria are singled out for non-vanishing of the conjugate function $\psi(\cdot)$ in the maximum principle at any point of the given time interval.

Введение

В формулировке *принципа максимума* (ПМ) и *локального принципа максимума* (ЛПМ) участвует условие нетривиальности набора сопряженных множителей. В классической задаче Понтрягина [9] оно имеет вид

$$\alpha_0 + |\psi(t_0)| > 0. \tag{0.1}$$

Из-за однородности сопряженного уравнения условие (0.1) эквивалентно неравенству

$$\alpha_0 + |\psi(t)| > 0 \qquad \text{для всех} \quad t \in \Delta = [t_0, t_1].$$

Итак в классической задаче Понтрягина условие нетривиальности выпольняется поточечно, что обеспечивает, вообще говоря, информативность условия максимальности функции Понтрягина H по управлению u при каждом $t \in \Delta$. Аналогичное утверждение справедливо в классе канонических задач оптимального управления с регулярными смешанными ограничениями, не содержащих чисто фазовых ограничений. Применительно к канонической задаче условие (0.1) имеет вид

$$\psi(t) \neq 0 \qquad \text{для всех} \quad t \in \Delta. \tag{0.2}$$

Поточечная нетривиальность в указанном классе обеспечивается возможностью оценки всех сопряженных множителей через $|\psi(\cdot)|$. В задачах с фазовыми ограничениями мера, вообще говоря, не допускает такой локальной оценки и нетривиальность ПМ и ЛПМ приходится формулировать при помощи более представительного набора сопряженных множителей включающего меру, то-есть компоненту отвечающую фазовому ограничению.

В работе выделены простые геометрические условия гарантирующие существование у оптимальных и локально оптимальных траекторий, соответственно, ПМ и ЛПМ с поточечным условием нетривиальности. Эти условия состоят в в выполнении двух пар требований а, б и а, в:

а) Фазовые и терминальные функции согласованы на траектории w^0 в моменты t_0 и t_1.

б) Траектория w^0 управляема относительно фазовых функций на Δ.

в) Траектория w^0 Γ-регулярна на Δ.

Условие согласованности фазовых и терминальных функций в t_0 и t_1 было введено в [4]. Требование б обобщает на сегмент Δ условие управляемости w^0 в моменты t_0 и t_1 введенное в [4]. Условие Γ-регулярности траектории введено в настоящей работе и является обобщением принадлежащего Гамкрелидзе понятия регулярности траектории, которое было использовано им в [9] при исследовании задач с фазовыми ограничениями. Имеет место импликация

$$\textit{регулярность} \Rightarrow \Gamma\textit{-регулярность} \Rightarrow \textit{управляемость}.$$

Отдельное рассмотрение условий поточечной нетривиальности ПМ и ЛПМ связано с тем, что класс локально оптимальных траекторий шире класса оптимальных траекторий и имеет самостоятельный интерес в приложениях.

Основной результат: *Положим* π ПМ (ПЛМ) *траектории* w^0, $\Delta' = [t_0', t_1'] \subset (t_0, t_1)$. *Если* w^0 *управляема* (*Г-регулярна*) *на* Δ', *то*

$$\textit{либо} \quad \inf_{\Delta'} |\psi(t)| > 0, \quad \textit{либо} \quad \psi = 0 \quad \textit{на} \quad (t_0', t_1'). \tag{0.3}$$

В [5] доказано, что если оптимальная (локально оптимальная) траектория w^0 удовлетворяет условиям а, б (а, в), то для нее существует ПМ (ЛПМ), у которого $\psi \not\equiv 0$ на (t_0, t_1). Согласно (0.3) отсюда следует, что у такого ПМ (ЛПМ) $\psi(t) \neq 0$ при всех $t \in (t_0, t_1)$. (Строго говоря в [5] речь идет о локально оптимальной траектории трансверсальной в t_0 и t_1, однако условие в эквивалентно ее трансверсальности в t_0 и t_1.) Альтернатива (0.3) устанавливается прямым анализом ПМ (ЛПМ) траектории w^0 с учетом условия управляемости (Γ-регулярности) этой траектории на Δ и выполняется для любого ее ПМ (ЛПМ). Выполнение условий а, б (а, в) существенно. Для каждого из них строится пример оптимальной траектории, не удовлетворяющей лишь этому условию, для которой $\psi \equiv 0$ у всех ПМ (ЛПМ). Применительно к ПМ управляемость самое общее и прозрачное из геометрических условий, обеспечивающих выполнение альтернативы (0.3).

Вопросу существования ПМ с поточечными условиями нетривиальности посвящены работы [1, 2]. Однако сформулированные там результаты о существовании у регулярной траектории такого ПМ неверны. Для каждого ниже приведен контрпример. Ошибка связана с тем, что в этих работах относительно исследуемой траектории не предполагается выполнения условия согласованности фазовых и терминальных функций в t_0 и t_1. Что же касается альтернативы (0.3), то аналогичных ей результатов в литературе нет.

План дальнейшего изложения следующий. В § 1 дана постановка регулярного варианта канонической задачи [3] (далее для краткости, эта задача называется *регулярной*) и определение ПМ и ЛПМ. В § 2 определены понятия управляемости, регулярности и Γ-регулярности траектории. В § 3 сформулированы основные результаты, а в § 4 собраны примеры, показывающие существенность условий теорем. Наконец, в § 5 дано доказательство всех утверждений.

§ 1 Постановка регулярной задачи

Рассматривается задача $J(p) \to \min$, если

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)\,(=)\,f\big(x(t),u(t),t\big), \qquad k(p)=0,\\ &\varkappa(p)\leqq 0, \qquad g\big(x(t),u(t),t\big)\,(=)\,0,\\ &G\big(x(t),u(t),t\big)\,(\leqq)\,0, \qquad \Phi\big(x(t),t\big)\leqq 0,\\ &\big(x(t),u(t),t,p\big)\,(\in)\,Q:=Q_{xut}\times Q_p,\\ &u_2(t)\,(\in)\,U, \qquad u=(u_1,u_2), \qquad p=\big(x(t_0),x(t_1),t_0,t_1\big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь и ниже приняты *обозначения*: $(\cdot)$ означает, что условие содержащееся в скобках выполняется почти всюду в смысле меры Лебега на Δ. Если a вектор конечномерного пространства, то $d(a)$ — его размерность. Q_{xut}, Q_p — открытые множества пространств $\mathbf{R}^{d(x)+d(u)+1}$ и $\mathbf{R}^{d(p)}$, соответственно, U — произвольное множество пространства $\mathbf{R}^{d(u_2)}$.

Предполагается:

а) $J, f, k, \varkappa, g, G, \Phi$ определены и непрерывны на Q вместе со своими производными по x, u_1, t и p.

б) Φ дважды непрерывно дифференцируема по x и t на Q.

в) ранг $g'_{u_1}(x,u,t)=d(g)$ на поверхности $g(x,u,t)=0$, $(x,u,t)\in Q_{xut}$, $u_2\in\overline{U}$, $G(x,u,t)\leqq 0$, $\Phi(x,t)\leqq 0$.

г) Смешанные ограничения *регулярны*. Это значит, что для любой точки множества

$$\{(x,u,t)\in Q_{xut}\mid g(x,u,t)=0, \quad \Phi(x,t)\leqq 0; G(x,u;t)\leqq 0, u_2\in\overline{U}\}$$

существует вектор $\overline{u}_1\in\mathbf{R}^{d(u_1)}$ такой, что $g'_{u_1}(x,u,t)\,\overline{u}_1=0$, $G'_{su_1}(x,u,t)\,\overline{u}_1<0$ при всех $s\in \mathrm{I}_0\big(G(x,u,t)\big)$ (здесь и ниже принято обозначение: если $r\in\mathbf{R}^{d(r)}$ некоторый вектор, то через r_i $\big(i=1,\ldots,d(r)\big)$ обозначаются его компоненты, а через $\mathrm{I}_0(r)$ множество его активных индексов, т.е. всех i таких, что $r_i=0$).

Минимум ищется среди всех траекторий w допустимых ограничениями (1.1). Говоря о минимуме, мы подразумеваем сильный минимум. *Траекторией допустимой ограничениями* (1.1) называется каждая тройка $w=\big(x(\cdot),u(\cdot),p\big)$, где $x(\cdot)$ липшицева функция, определенная на Δ со значениями из $\mathbf{R}^{d(x)}$, $u(\cdot)$ — ограниченная измеримая функция определенная на Δ и принимающая значения из $\mathbf{R}^{d(u)}$, $p=(x_0,x_1,t_0,t_1)$ с $x_0=x(t_0)$ и $x_1=x(t_1)$, удовлетворяющая (1.1) и такая, что

$$\operatorname{vrai}\min_{\Delta}\varrho\big((x(t),u(t),t),CQ_{xut}\big)>0.$$

Здесь $\varrho(\cdot,\cdot)$ расстояние точки до множества и CM дополнение множества M. В [3] было показано, что каждая оптимальная (локально оптимальная) траектория задачи (1.1) обладает ПМ (ЛПМ). Всюду в дальнейшем через $w^0=\big(x^0(\cdot),u^0(\cdot),p^0\big)$ с $p^0=p\big(x^0(t_0),x^0(t_1),t_0,t_1\big)$ мы будем обозначать исследуемую на экстремум траекторию допустимую ограничениями (1.1). Напомним определение ПМ (ЛПМ) траектории w^0.

Определение 1.1: Строка $\pi=\big(\alpha_0,\alpha,c,\psi(\cdot),a(\cdot),b(\cdot),m\big)$ называется *ПМ траектории* w^0, если для нее выполнены следующие группы условий.

1. *Условие принадлежности*: $\alpha_0 \in \mathbf{R}^1_+$, $\alpha \in \mathbf{R}^{d(\varkappa)}_+$, $c \in \mathbf{R}^{d(k)}$ (здесь $\mathbf{R}_+{}^n$ — неотрицательный октант $\mathbf{R}^n$), $0 \leqq a \in L^{d(G)}_\infty$, $b \in L^{d(g)}_\infty$, $\psi = (\psi_x, \psi_t)$ функция ограниченного изменения, определенная на Δ, непрерывная слева на (t_0, t_1) и принимающая значения в $\mathbf{R}^{d(x)+1}$, $m = (m_1, \ldots, m_{d(\Phi)})$, m_i — неотрицательная мера, сосредоточенная на Δ.

2. *Условия дополняющей нежесткости:*

$$\alpha\varkappa(p) = 0, \quad a(t)\, G\big(x^0(t), u^0(t), t\big)\, (=)\, 0, \quad \Phi_i\big(x^0(t), t\big)\, dm_i = 0.$$

Для формулировки остальных условий ПМ введем три *основные* функции:

функцию Понтрягина

$$H(x, u, t, \psi) = \psi_x f(x, u, t) + \psi_t,$$

функцию Гамильтона

$$\overline{H}(x, u, t, \psi, a, b) = H + bg(x, u, t) - aG(x, u, t),$$

терминальную функцию

$$l(p) = \alpha_0 J(p) + \alpha\varkappa(p) + ck(p).$$

Для краткости будем придерживаться обозначения: если $E = E(x, u, t)$ некоторая функция или многозначное отображение, то значение E в точке $\big(x^0(t), u^0(t), t\big)$ будем обозначать через $E[t]$, а частную производную $\partial E/\partial x$ в этой точке через $E_x'[t]$. Например, $\Phi[t] = \Phi\big(x^0(t), t\big)$, $\Phi'[t] = \Phi'\big(x^0(t), t\big)$, $H[t] = H\big(x^0(t), u^0(t), t, \psi(t)\big)$, $\overline{H}[t] = \overline{H}\big(x^0(t), u^0(t), t, \psi(t), a(t), b(t)\big)$ и так далее.

3. *Сопряженная система:*

$$-d\psi = \overline{H}'_{xt}[t]\, dt - \Phi'^*_{xt}[t]\, dm.$$

4. *Условия трансверсальности:*

$$\psi(t_0) = l'_{x_0}(p^0), \qquad \psi(t_1) = -l'_{x_1}(p^0).$$

Сравнивая условия 3 и 4, заключаем, что

$$\psi_x(t_0+) = l'_{x_0}(p^0) + \varphi_x'^*[t_0]\, m(t_0), \qquad \psi_t(t_0+) = l'_{t_0}(p^0) + \varphi_t'[t_0]\, m(t_0),$$
$$\psi_x(t_1-) = -l'_{x_1}(p^0) - \varphi_x'^*[t_1]\, m(t_1), \qquad \psi_t(t_1-) = -l'_{t_1}(p^0) - \varphi_t'[t_1]\, m(t_1).$$

5. *Принцип максимума:*

а) $H[t]\, (=)\, 0$,

б) $\overline{H}'_{u_1}[t]\, (=)\, 0$,

в) $H\big(x^0(t), u, t, \psi(t)\big) \leqq 0$ для всех $u \in V[t]$, $t \in (t_0, t_1)$,

г) $H\big(x^0(t_1), u, t_1, \psi(t_1-)\big) \leqq 0$ для всех $u \in V[t_1]$,

д) $H\big(x^0(t_0), u, t_0, \psi(t_0+)\big) \leqq 0$ для всех $u \in V[t_0]$.

Здесь и ниже через $V(x, t)$ обозначается множество

$$\{u \in \mathbf{R}^{d(u)} \mid (x, u, t) \in Q_{xut},\ G(x, u, t) \leqq 0,\ g(x, u, t) = 0,\ u_2 \in \overline{U}\}.$$

Условие 5/б) называют *локальным принципом максимума*, условия 5/а), в)-д) — *принципом максимума*.

6. *Условие нетривиальности:*

$$\alpha_0 + |\alpha| + |c| + \|m\| > 0 \qquad \left(|\alpha| = \sum \alpha_i, |c| = \sum_\nu |c_\nu|, \|m\| = \sum_i \|m_i\|\right).$$

Строка $\pi = (\alpha_0, \alpha, c, \psi(\cdot), a(\cdot), b(\cdot), m)$ называется *локальным принципом максимума* (ЛПМ) *траектории* w^0, если для нее выполняются условия 1—4, 5/а), б) и 6.

Как показано в [5] (и легко следует из регулярности смешанных ограничений и локального принципа максимума $\overline{H}'_{u_1}[t]\,(=)\,0$) для ПМ (ЛПМ) имеет место свойство *ограниченности*, состоящее в следующем: Существует константа K, зависящая лишь от w^0 и такая, что

$$|a(t)|\,(\leqq)\,\mathrm{K}\,|\psi_x(t)|, \qquad |b(t)|\,(\leqq)\,\mathrm{K}\,|\psi_x(t)|, \qquad |\psi_t(t)|\,(\leqq)\,\mathrm{K}\,|\psi_x(t)|.$$

Обсуждение предположений гладкости: Непрерывная дифференцируемость *равенственных* функций k, f и g общепринята в теории оптимального управления. Что же касается *неравенственных* функций J и $\varkappa$, то для содержательного вариационного анализа достаточно их выпуклой дифференцируемости по p, а относительно G и Φ — непрерывной сверху выпуклой дифференцируемости по x, u_1 и t. Именно в таких предположениях получены ПМ и ЛПМ канонической задачи в [3]. Однако как показано в [5] для существования содержательного ПМ (ЛПМ) траектории концы которой выходят на фазовую границу необходима дважды непрерывная дифференцируемость Φ. Непрерывная дифференцируемость J, $\varkappa$, G по x, u_1, t и p в настоящей работе как и в [5] принята для уменьшения громоздкости изложения. Все результаты сохраняются, если ограничится выпуклой дифференцируемостью J и $\varkappa$ по p и непрерывной сверху выпуклой дифференцируемостью G по x, u_1 и t.

§ 2 Управляемые и регулярные траектории

Введем теперь основные в данной работе понятия „+"-управляемости, „—"-управляемости (относительно фазовых функций) и Γ_+-регулярности, Γ_--регулярности. Наличие этих свойств означает, что система имеет достаточный ресурс управления, чтобы войти внутрь фазового ограничения. Оба понятия тесно связаны, но не сводятся одно к другому.

Определение 2.1: Пусть $t \in \Delta$. Назовем w^0 „+" („—")-*управляемой* в момент t, если существует $f \in \operatorname{co} f\big(x^0(t), V[t], t\big)$ такой, что

$$\Phi'_{ix}[t]\,f + \Phi'_{it}[t] > 0 \qquad (\Phi'_{ix}[t]\,f + \Phi'_{it}[t] < 0), \qquad i \in \mathrm{I}_0(\Phi[t]).$$

Управляемость w^0 определим по-разному для $t \in (t_0, t_1)$, $t = t_0, t_1$. Будем говорить, что w^0 *управляема при* $t \in (t_0, t_1)$, если она одновременно „+"- и „—"-управляема. Если же $t = t_0$ $(t = t_1)$, то управляемость означает „—" („+")-управляемость (применительно к концевым точкам t_0 и t_1, условие управляемости было введено в [4]).

Определим, далее, локальный вариант понятия управляемости, которое естественно назвать Γ-регулярностью. Это понятие является прямым обобщением понятия регулярности траектории, введенного Гамкрелидзе [9]. Начнем с определения замыкания по мере [7].

Определение 2.2: Пусть $y = \varphi(t)$ ограниченная измеримая функция на Δ, принимающая значения в $\mathbf{R}^{d(y)}$. *Замыканием по мере* φ называется многозначное отображение

$$\overline{\varphi}(t) = \left\{y \in \mathbf{R}^{d(y)} \mid \operatorname{mes}\{\varphi^{-1}(B_\varepsilon(y)) \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap \Delta\} > 0 \text{ при всех } \varepsilon > 0\right\},$$

где $B_\varepsilon(y)$ является ε-окрестностью точки y. Очевидно, если $F \subset \Delta$ — замкнуто, то $\overline{\varphi}(F)$ — компакт, причём для всякой убывающей последовательности замкнутых подмножеств $F_n \subset \Delta$ будет $\overline{\varphi}(\cap F_n) = \cap\overline{\varphi}(F_n)$.

Определение 2.3: Пусть $t \in \Delta$. Назовем w^0 *$\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярной* в момент t, если для каждого $u \in \overline{u^0}(t)$ найдется $\overline{u}_1 \in \mathbf{R}^{d(u_1)}$ так, чтобы

$$\begin{aligned} &g'_{u_1}(x^0(t), u, t)\,\overline{u}_1 = 0, \qquad G'_{su_1}(x^0(t), u, t)\,\overline{u}_1 < 0, \\ &\Phi'_{ix}[t]\, f'_{u_1}(x^0(t), u, t)\,\overline{u}_1 > 0 \ \left(\Phi'_{ix}[t]\, f'_{u_1}(x^0(t), u, t)\,\overline{u}_1 < 0\right) \\ &s \in \mathsf{I}_0(G(x^0(t), u, t);\ i \in \mathsf{I}_0(\Phi'[t])). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Γ-регулярность w^0 определим по-разному для $t \in (t_0, t_1)$, $t = t_0, t_1$. Будем говорить, что w^0 Γ-регулярна при $t \in (t_0, t_1)$, если она одновременно Γ_+- и Γ_--регулярна. Если же $t = t_0$ ($t = t_1$), то Γ-регулярность означает $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярность.

Напомним также определение регулярности траектории [9].

Определение 2.4 [9]: Говорят, что w^0 *регулярна* при $t \in \Delta$, если матрица левой части системы (2.1) имеет линейно независимые строки для любого $u \in \overline{u_0}(t)$.

Ясно, что из регулярности w^0 в момент t следует Γ_+- и Γ_--регулярность. В то же время условия Γ-регулярности менее обременительны. Например, они не ограничивают числа $r = d(g) + \left|\mathsf{I}_0(G(x^0(t), u, t))\right| + |\mathsf{I}_0(\Phi[t])|$, тогда как у регулярных траекторий $r \leqq d(u_1)$. Связь между „+"(„−")-управляемостью и $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярностью выявляет следующее редложение.

Предложение 2.1. *Если w^0 $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярна в точке $t \in (t_0, t_1]$ $(t \in [t_0, t_1))$, то для w^0 выполнены условия „+"(„−")-управляемости в этой же точке t.*

Итак, во внутренних точках Δ из $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярности следует „+"(„−")-управляемость. Более того, по нашим определениям, из Γ-регулярности траектории на Δ следует ее управляемость.

Пример 2.1: Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} tu^3(t)\,dt \to \max,$$

если

$$\dot{x} \,(=)\, u^3, \quad x_1 = x_0 = t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad x(t) \geqq 0.$$

Траектория $w^0 = (x^0, u^0, p^0)$, $x^0 = u^0 = 0$ оптимальна. Действительно. Пусть $w = (x, u, p)$ допустимая траектория. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} tu^3(t)\,dt = \int_0^1 t\dot{x}(t)\,dt = tx(t)|_0^1 - \int_0^1 x(t)\,dt.$$

В силу фазовых и терминальных ограничений $J(w) \geqq 0$. Оптимальность w^0 доказана. Управляемость w^0 на Δ следует из того, что $\Phi_x'[t]\,u^3 + \Phi_t'[t] = -u^3 = \pm 1$, если $u = \mp 1$ при всех $t \in [0, 1]$. В то же время w^0 не удовлетворяет условию Γ-регулярности ни в одной точке $t \in \Delta$, так как $3\Phi_x'[t]\,u^{02}(t) = 0$ для всех $t \in \Delta$. Таким образом, управляемость w^0 на Δ является более общим условием, чем Γ-регулярность.

Покажем, что в t_0 (t_1). условия $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярности и „+"(„−")-управляемости взаимно независимы.

Пример 2.2: Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt \to \min,$$

если

$$\dot{x}(=) -1 + \frac{u}{2(1+u)}, \quad x(t) \leqq 0, \quad u(t)\,(\geqq)\,0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1.$$

Траектория $w^0 = (x^0, u^0, p^0)$, $x^0(t) = -t$, $u^0(t) = 0$ оптимальна. Поскольку

$$\Phi_x'[t]\left(\frac{1}{2(1+u^0(t))} - \frac{u^0(t)}{2(1+u^0(t))^2}\right) = \frac{1}{2},$$

то w^0 Γ_+-регулярна на Δ. В то же время в $t_0 = 0$ свойство „+"-управляемости нарушено поскольку $\Phi_x'[t]\,(-1 + u/2(1+u)) \leqq -1/2$ при всех $u \geqq 0$.

Итак имеют место импликации:

а) при $t \in [t_0, t_1)$ $\big(t \in (t_0, t_1]\big)$
регулярность $\Rightarrow$ $\Gamma_-(\Gamma_+)$- *-регулярность* $\Rightarrow$ *„−"(„+")-управляемость.*

б) на Δ
регулярность $\Rightarrow$ *Γ-регулярность* $\Rightarrow$ *управляемость.*

В точках t_0, t_1 условия „+" („−")-управляемости и $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярности независимы между собой.

§ 3 Формулировка результатов

Важность понятий управляемости (Γ-регулярности) проявляется в том, что для траекторий, обладающих этим свойством каждый ПМ (ЛПМ) удовлетворяет простой альтернативе.

Теорема 3.1: *Пусть π ПМ траектории w^0 и заданы точки $t_0', t_1' \in \Delta$, $t_0' < t_1'$. Если w^0 управляема на (t_0', t_1') и „+" („−")-управляема или $\Gamma_+(\Gamma_-)$-регулярна в точках t_0', t_1', соответственно, то либо $\psi = 0$ на (t_0', t_1'), либо $\inf_{\Delta'} |\psi(t)| > 0$, $\Delta' = [t_0', t_1']$.*

Теорема 3.2: *Пусть π ЛПМ траектории w^0 и заданы точки $t_0', t_1' \in \Delta, t_0' < t_1'$. Если w^0 Γ-регулярна на (t_0', t_1') и Γ_+-, Γ_--регулярна в точках t_0', t_1' соответственно, то либо $\psi = 0$ на (t_0', t_1'), либо $\inf_{\Delta'} |\psi(t)| > 0, \Delta' = [t_0', t_1']$.*

Следствие: *Если в условиях теорем 3.1 и 3.2 w^0 управляема (Γ-регулярна) на $(t_0, t_1) \cap \Delta'$, то либо $\psi = 0$ на $(t_0, t_1) \cap \Delta'$ либо $\inf_{\Delta'} |\psi(t)| > 0$.*

Теоремы 3.1 и 3.2 независимы: теорему 3.2 нельзя получить из теоремы 3.1 поскольку не каждый ЛПМ является ПМ, в свою очередь теорему 3.1 нельзя получить из теоремы 3.2 так как „+"-, „−"-управляемость w^0 в t_0, t_1 не следует из Γ_+-, Γ_--регулярности.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что у траектории w^0 удовлетворяющей на Δ сформулированным условиям связанным с управляемостью или Γ-регулярностью, всякий ПМ и, соответственно, всякий ЛПМ либо тождественно вырождается внутри Δ и сводится к паре концевых импульсов, либо удовлетворяет поточечному условию нетривиальности $\psi(t) \neq 0$ при всех $t \in (t_0, t_1)$. Это позволяет уточнить уже известные результаты [4, 5] о существовании ЛПМ, ПМ не сводящегося к паре концевых импульсов. Для формулировки соответствующих теорем напомним определения I-согласованности фазовых и терминальных функций, I-управляемости w^0 в t_0, t_1 и понятие I-общего положения фазовых и терминальных функций на w^0 в t_0, t_1. Как и в [5] через I мы будем обозначать каждую пару множеств $\mathsf{I} = (\bar{\mathsf{I}}_0, \bar{\mathsf{I}}_1)$ с $\bar{\mathsf{I}}_0, \bar{\mathsf{I}}_1 \subset \{1, \ldots, d(\Phi)\}$. Сококупность всех пар I будем обозначать через Ξ. Вместе с $\mathsf{I} \in \Xi$, $\mathsf{I} = (\bar{\mathsf{I}}_0, \bar{\mathsf{I}}_1)$ введем пару $\mathsf{CI} = (\mathsf{C}\bar{\mathsf{I}}_0, \mathsf{C}\bar{\mathsf{I}}_1)$, где $\mathsf{C}\bar{\mathsf{I}}_l = \{1, \ldots, d(\Phi)\} \setminus \bar{\mathsf{I}}_l$, $l = 0, 1$.

Определение 3.1 [5]: Положим $\mathsf{I} \in \Xi$. Говорят, что фазовые и терминальные функции I-*согласованы*, если по $\eta > 0$ можно указать $\delta > 0$ так, чтобы

$$\{p \mid k(p) = 0, |p - p^0| < \delta, \varkappa(p) < -\eta\, |p - p^0|, J(p) < J(p^0) - \eta\, |p - p^0|\}$$
$$\subset \{p = (x_0, x_1, t_0, t_1) \mid \Phi_i(x_l, t_l) \leqq 0\ (i \in \bar{\mathsf{I}}_l;\ l = 0, 1)\}.$$

Определение 3.2 [5]: Положим $\mathsf{I} \in \Xi$. Говорят, что w^0 I-*управляема* в моменты t_0 и t_1, если существуют $f_l \in \operatorname{co} f\big(x^0(t_l), V[t_l], t_l\big)$ такие, что

$$(-1)^l\, (\Phi'_{ix}[t_l]\, f_l + \Phi'_{it}[t_l]) < 0 \quad \text{если} \quad i \in \bar{\mathsf{I}}_l \cap \mathsf{I}_0(\Phi[t_l]) \quad \text{и} \quad l = 0, 1.$$

Ясно, что требование I-управляемости в моменты t_0 и t_1 слабее требования управляемости w^0 в эти моменты времени.

Определение 3.3: Положим $\mathsf{I} \in \Xi$. Говорят, что фазовые и терминальные функции находятся в I-*общем* положении, елси существует $\bar{p} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{t}_0, \bar{t}_1)$ такой, что

$$\Phi'_{ix}[t_l]\, \bar{x}_l + \Phi'_{it}[t_l]\, \bar{t}_l < 0, \quad \varkappa_j(p^0)\, \bar{p} < 0, \quad k'(p^0)\, \bar{p} = 0$$
$$\big(i \in \bar{\mathsf{I}}_l \cap \mathsf{I}_0(\Phi[t_l]);\ l = 0, 1;\ j \in \mathsf{I}_0(\varkappa(p^0))\big).$$

Напомним введенное в [5] определение I-трансверсальности w^0 в моменты t_0 и t_1.

Определение 3.4: Положим $\mathsf{I} \in \Xi$. Говорят, что w^0 I-*трансверсальна* относительно фазовых функций в t_0 и t_1 если существует $\bar{u}_1(\cdot) \in L_\infty^{d(u_1)}$ такая, что

$$\operatorname{vrai}\lim_{t \to t_l} g'_{u_1}[t]\, \bar{u}_1(t) = 0,$$
$$\operatorname{vrai}\overline{\lim_{t \to t_l}}\ (-1)^l\, \Phi'_{ix}[t]\, f'_{u_1}[t]\, \bar{u}_1(t) < 0,$$
$$\operatorname{vrai}\overline{\lim_{t \to t_l}}\ \big(G_s[t] + G'_{su_1}[t]\, \bar{u}_1(t)\big) \leqq 0$$
$$\big(i \in \bar{\mathsf{I}}_l \cap \mathsf{I}_0(\Phi[t_l]);\ s = 1, \ldots, d(G);\ l = 0, 1\big).$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.3: *Условия Γ-регулярности и трансверсальности траектории w^0 в моменты t_0 и t_1 эквивалентны между собой.*

Теорема 3.4: *Пусть w^0 оптимальная (локально оптимальная) траектория, $\mathsf{I} \in \Xi$. Пусть, далее, фазовые и терминальные функции I-согласованы и находятся* *в* Cl-*общем положении в моменты* t_0 *и* t_1. *Если* w^0 *управляема* (*Г-регулярна*) *на* Δ, *то существует* ПМ (ЛПМ) *траектории* w^0 *удовлетворяющий условиям*

а) $\psi(t) \neq 0$ *для всех* $t \in (t_0, t_1)$, б) $m_i(t_l) = 0$, *если* $i \in \bar{\mathrm{I}}_l$ *и* $l = 0, 1$.

Теорема 3.5: *Положим* w^0 *оптимальная* (*локально оптимальная*) *траектория*, $\mathrm{I} \in \Xi$. *Пусть, далее, фазовые и терминальные функции* I-*согласованы и находятся в* Cl- *общем положении на* w^0. *Если* w^0 *управляема* (*Г-регулярна*) *на* Δ *и дополнительно удовлетворяет условиям* „+"-, „−"-*управляемости или* Γ_+-, Γ_--*регулярности* (Γ_+-, Γ_--*регулярности*) *в точках* t_0 *и* t_1 *соответственно, то* w^0 *обладает* ПМ (ЛПМ) *удовлетворяющим условиям*

а) $\inf_\Delta |\psi(t)| > 0$, б) $m_i(t_l) = 0$, *если* $i \in \bar{\mathrm{I}}_l$ *и* $l = 0, 1$.

В [5] показано, что если оптимальная (локально оптимальная) траектория w^0 I-управляема (I-трансверсальна) относительно фазовых функций в t_0 и t_1, фазовые и терминальные функции I-согласованы и находятся в Cl-общем положении в эти моменты времени причем фазовые функции *позитивно* независимы на Δ, то траектория w^0 обладает ПМ (ЛПМ) у которого

а) $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Delta} |\psi(t)| > 0$, б) $m_i(t_l) = 0$, если $i \in \bar{\mathrm{I}}_l$ и $l = 0, 1$.

Как из управляемости так из Γ-регулярности w^0 на Δ следует позитивная независимость фазовых функций на Δ. Поэтому с учетом предложения 3.3 теоремы 3.4 и 3.5 получаются из теорем 3.1 и 3.2 и указанного результата работы [5]. Таким образом, в доказательстве нуждаются лишь предложения 2.1 и 3.3, теоремы 3.1 и 3.2 и следствие из теорем 3.1 и 3.2.

§ 4 Примеры

Здесь собраны примеры, иллюстрирующие существенность условий теорем 3.1 и 3.2. Поскольку во всех примерах минимизируемый функционал имеет вид

$$J(w) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t), t\big)\, dt, \tag{4.1}$$

где f_0 функция непрерывная на Q_{xut} вместе со своими производными по x, u_1 и t, то их разбору предпошлём сведение такого рода задач к канонической задаче (1.1) и укажем обратную редукцию ПМ канонической задачи к ПМ задачи с интегральным функционалом.

Вводя вспомогательную фазу $y \in \mathbf{R}^1$, дифференциальную связь $\dot{y}(t)\ (=)\ f_0\big(x(t), u(t), t\big)$ и минимизируемый функционал $\hat{J}(\hat{p}) = y_1 - y_0$, $\hat{p} = (y_0, y_1, p)$, приходим к эквивалентной задаче типа (1.1). Ясно, что любая допустимая траектория $w = \big(x(\cdot), u(\cdot), p\big)$ исходной задачи переходит в некоторую допустимую задачу траектории $\hat{w}^0 \doteq \big(\hat{x}^0(\cdot), u^0(\cdot), \hat{p}^0\big)$,

$$\hat{x} = (y, x), \quad \hat{p} = \big(y(t_0), y(t_1), p\big), \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f_0\big(x(s), u(s), s\big)\, ds$$

редуцированной задачи (здесь y_0 произвольное число) и наоборот. Пусть $w^0 = \big(x^0(\cdot), u^0(\cdot), p^0\big)$ — оптималь исходной задачи, $\hat{w}^0 = \big(\hat{x}^0(\cdot), u^0(\cdot), \hat{p}^0\big)$ отвечающая ей оптималь редуцированной задачи. Согласно [3] $\hat{w}^0$ обладает ПМ описанным определением 1.1. Непосредственно видно, что этот ПМ эквивалентен ПМ траектории $\hat{w}^0$, у которого основные функции следует брать в форме

$$H = \psi_x f(x, u, t) - \alpha_0 f_0(x, u, t) + \psi_t, \qquad l = \alpha_0 \varkappa(p) + c\varkappa(p). \tag{4.2}$$

Укажем теперь формулировку теорем 3.1—3.4 применительно к задачам с интегральным функционалом (4.1). Поскольку переход от w^0 к редуцированной траектории $\hat{w}^0$ не меняет фазовых функций, то условия l-управляемости в моменты t_0 и t_1, управляемости, Γ-регулярности и регулярности в момент $t \in \Delta$ этих траекторий совпадают. По иному обстоит дело с условием l-согласованности фазовых и терминальных функций на траектории в моменты t_0 и t_1. Нам потребуется определение.

Определение 4.1: Положим $\mathsf{l} \in \Xi$, $\mathsf{l} = (\bar{\mathsf{l}}_0, \bar{\mathsf{l}}_1)$. Мы скажем, что фазовые и терминальные функции $(\mathsf{l}, k, \varkappa)$-согласованы на w^0 в моменты t_0 и t_1, если по $\eta > 0$ можно указать $\delta > 0$ так, что

$$\{p' \mid k(p') = 0, |p' - p^0| < \delta, \varkappa_j(p') < -\eta\, |p' - p^0| \quad (j = 1, \ldots, d(\varkappa))\}$$
$$\subset \{p' = (x_0', x_1', t_0', t_1') \mid \Phi_i(x_l', t_l') \leqq 0 \ (i \in \bar{\mathsf{l}}_l, l = 0, 1)\}.$$

Предложение 4.1: *Положим $\mathsf{l} \in \Xi$, $\mathsf{l} = (\bar{\mathsf{l}}_0, \bar{\mathsf{l}}_1)$, w^0 — траектория задачи с интегральным функционалом. Для того, чтобы фазовые и терминальные функции были l-согласованы на редуцированной траектории $\hat{w}^0$ в моменты t_0 и t_1 достаточно, чтобы они были $(\mathsf{l}, k, \varkappa)$-согласованы на исходной траектории w^0.*

Доказательство следует из сравнения определений 3.1, 4.1 и легко проверяемого включения

$$\text{пр}_p\{\hat{p}' \mid k(\hat{p}') = 0, |\hat{p}' - \hat{p}^0| < \delta, \varkappa_j(\hat{p}') < -\eta\, |\hat{p}' - \hat{p}^0|,$$
$$\hat{J}(\hat{p}') < \hat{J}(\hat{p}^0) - \eta\, |\hat{p}' - \hat{p}^0| \quad (j = 1, \ldots, d(\varkappa))\}$$
$$\subset \{p' \mid k(p') = 0, |p' - p^0| < \delta, \varkappa_j(p') < -\eta\, |p' - p^0| \quad (j = 1, \ldots, d(\varkappa))\}$$

справедливого при всех $\eta > 0$ и $\delta > 0$ ∎

Таким образом теоремы 3.1—3.4 остаются справедливыми и применительно к задачам с интегральным функционалом (4.1). Необходимо лишь при выписывании ПМ (ЛПМ) основные функции брать в форме (4.2), условие l-согласованности заменить условием $(\mathsf{l}, k, \varkappa)$-согласованности и всюду в формулировках этих теорем $|\psi_x(\cdot)|$ заменить на $|\psi_x(\cdot)| + \alpha_0$.

Пример 4.1: Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + u^2}\, dt \to \min,$$

если

$$\dot{x} \,(=)\, u, \qquad x_0 = t_0 = 0, \qquad x(t) \geqq t, \qquad x_1 \leqq \varphi(t_1),$$

где φ дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\varphi(t) < t$ для $t \neq 1$ и $\varphi(1) = 1$. Геометрически задача состоит в нахождении кратчайшей дуги $x = x(t)$ определенной на $[t_0, t_1]$ при условиях, что $x(t) \geqq t$, $x_0 = t_0 = 0$, $x(t_1) \leqq \varphi(t_1)$. Выпишем ее ПМ:

$$\pi = (\alpha_0, \alpha, c, \psi(\cdot), m), \qquad \alpha_0, \alpha \geqq 0, \quad dm \geqq 0, \quad \psi = (\psi_x, \psi_t),$$
$$H = \bar{H} = \psi_x u - \alpha_0 \sqrt{1 + u^2} + \psi_t, \qquad l = c_{x_0} x_0 + c_{t_0} t_0 + \alpha(x_1 - \varphi(t_1)).$$

Так как $u^0 = 1$, то $H[t] = \psi_x(t) - \sqrt{2}\alpha_0 + \psi_t(t) \,(=)\, 0$ и $H_u'[t] = \psi_x(t) - \alpha_0/\sqrt{2} \,(=)\, 0$. Сравнивая это, заключаем что $\psi_x = \psi_t = \alpha_0/\sqrt{2}$ на $(0, 1)$, а поскольку $\varphi'(1) = 1$, то, согласно условию трансверсальности, $\psi_x(t_1-) = m(1) + \alpha$ и $\psi_t(t_1-) = -m(1) - \alpha$. Отсюда приходим к выходу, что $\alpha = m(1) = \alpha_0 = 0$. Так как $-d\psi_x = dm$, то $m\{(0, 1]\} = 0$. Таким образом все компоненты ПМ π, кроме c_{x_0}, c_{t_0} и $m(0)$ равны нулю. Непосредственно видно, что w^0 управляема на $[0, 1]$, фазовые и терминальные функции согласованы в t_0. Нарушается лишь одно условие теоремы 3.3 — условие согласованности фазовых и терминальных функций в t_1. Траектория w^0 удовлетворяет всем условиям теоремы 2 работы [1]. Поскольку для любого ПМ этой траектории $\psi = 0$ на интервале $(0, 1)$, то она является контрпримером теореме 2 (в которой утверждается, что $\alpha_0 + |\psi(t)| > 0$ при всех $t \in \Delta$).

Пример 4.2: Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} u\,dt \to \min,$$

если

$$x_0 = y_0 = t_0 = 0, \qquad y_1 = 1, \qquad \dot{x}\,(=)\,u, \qquad \dot{y}\,(=)\,1, \qquad x(t) \geqq t - 1.$$

Траектория $w^0 = (x^0, y^0, u^0, p^0)$, $x^0(t) = u^0(t) = 0$, $y^0(t) = t$, $t_1 = 1$ допустима ограничениями задачи и на ней функционал $J = \int_{t_0}^{t_1} u\,dt$ обращается в нуль. На любой допустимой траектории w в силу дифференциальной связи и краевых условий $y_1 = t_1 = 1$. Согласно фазовому ограничению $J(w) = x_1 \geqq t_1 - 1 = 0$. Следовательно, w^0 — оптимальная траектория. Непосредственно усматривается, что w^0 управляема на Δ. Поскольку x_0, y_0, t_0 фиксированы, то фазовые и терминальные функции согласованы при $t = t_0$. В то же время в t_1 условие согласованности этих функций не выполняется, поскольку точка $x_1 = -\varepsilon$, $t = 1 + \varepsilon$ при всех $\varepsilon > 0$ удовлетворяет терминальному ограничению и нарушает фазовое ограничение. Убедимся, что для w^0 не выполняется никакой ПМ, у которого $m(t_1) = 0$. Действительно. Пусть

$$\pi = \big(\alpha_0, c, \psi(\cdot), m\big),$$

$$c = (c_{x_0}, c_{y_0}, c_{t_0}, c_{y_1}), \qquad m(1) = 0, \qquad dm \geqq 0, \qquad \psi = (\psi_x, \psi_y, \psi_t)$$

ПМ траектории w^0. Так как $t - 1 < 0$ на $[0, 1]$, то $m\big([0, 1)\big) = 0$. Поскольку согласно предположению $m(1) = 0$, то $\|m\| = 0$. Далее, $x^0 = u^0 = 0$. Поэтому $H[t] = \psi_y(t) + \psi_t(t)\,(=)_t 0$, $\overline{H}_u{}'[t] = \psi_x(t) - \alpha_0\,(=)\,0$ и $d\psi_x = d\psi_y = d\psi_t = 0$. Так как мера m равна нулю, то ψ непрерывна на $[0, 1]$. Поэтому ψ — константа на $[0, 1]$, $\psi_y = -\psi_t = \text{const}$ и $\psi_x = \alpha_0$. Далее, в силу условий трансверсальности $\psi_x(t_1) = \psi_t(t_1) = 0$. Поэтому $\alpha_0 = c_{x_0} = c_{y_0} = c_{y_1} = c_{t_0} = 0$ и $\psi_x = \psi_y = \psi_t = 0$. Таким образом все компоненты π равны нулю. Следовательно, w^0 не удовлетворяет никакому ПМ, у которого $m(1) = 0$. В то же время траектория w^0 удовлетворяет всем условиям основной теоремы работы [2], согласно которой такая оптимальная траектория должна удовлетворять принципу максимума с $m(1) = 0$. Следовательно, w^0 является контрпримером работе [2].

Примеры 4.1 и 4.2 иллюстрируют существенность условия согласованности фазовых и терминальных функций для справедливости теорем 3.3 и 3.4.

Пример 4.3: Рассмотрим задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} u\,dt \to \min,$$

если

$$x_0 = t_0 = 0, \qquad t_1 = 1, \qquad x_1 = 0, \qquad \dot{x}\,(=)\,t, \qquad x(t) \geqq 0.$$

Пусть $w = (x, u, p)$ допустимая траектория. Тогда

$$J(w) = \int_0^1 u\,dt = \int_0^1 \frac{\dot x}{t}\,dt = \frac{x(t)}{t}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x(t)}{t^2}\,dt.$$

В силу фазового ограничения $J(w) \geqq 0$. Таким образом траектория $w^0 = (x^0, u^0, p^0)$, $x^0 = u^0 = 0$ является оптимальной. На w^0 фазовые и терминальные функции согласованы в 0 и 1. Траектория управляема на $(0, 1]$. Условие управляемости не выполняется в одной единственной точке $t = 0$. Покажем, что w^0 не удовлетворяет никакому ПМ, помимо импульсного сосредоточенного в концевых точках 0 и 1. Действительно. Пусть

$$\pi = (\alpha_0, c, \psi, m),$$
$$\psi = (\psi_x, \psi_t); \qquad c = (c_{x_0}, c_{t_0}, c_{x_1}, c_{t_1}), \qquad H = \overline{H} = \psi_x t u - \alpha_0 u + \psi_t$$

ПМ траектории w^0. Тогда $H[t] = \psi_t \,(=)\, 0$ и $\overline{H}_u'[t] = t\psi_x(t) - \alpha_0 \,(=)\, 0$. Поскольку ψ_x ограниченная функция, то отсюда следует, что $\psi_x = \psi_t = 0$ на $(0, 1)$ и $\alpha_0 = 0$. В силу сопряженного уравнения $-d\psi_x = dm$, откуда заключаем, что $m\{(0, 1]\} = 0$. Таким образом помимо импульсного w^0 не удовлетворяет никакому ПМ. Итак, утверждение теорем 3.3 и 3.4 не выполняется, если w^0 хотя бы в одной из точек t_0 или t_1 не удовлетворяет условию управляемости.

Пример 4.4: Рассмотрим задачу

$$x_1 \to \min,$$

если

$$\dot x \,(=)\, -x + u^2, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 2, \quad x^2 + (t-1)^2 - 1 \geqq 0, \quad x \geqq 0.$$

Вычислим вначале оптимальную траекторию. Рассмотрим траектории, у которых $u = 0$. В силу уравнения $\dot x \,(=)\, -x + u^2$, у таких траекторий $x(t) = e^{-t+c}$, где c — некоторая константа. Наименьшее $x(2)$ среди них имеет та допустимая траектория w^0 у которой $x = x^0(t)$ касается окружности $x^2 + (t-1)^2 = 1$ в некоторый момент $t_* \in (1, 2)$. Легко убедиться, что w^0 реализует минимум задачи. Действительно, если бы нашлась допустимая траектория w, у которой $x(2) < x^0(2)$, то из уравнений $\dot x^0 = -x^0$, $\dot x = -x + u^2$ заключаем, что $x(t) \leqq x(2)\,e^{-t} < x^0(t)$, откуда, поскольку $x(t) \geqq 0$, то $\big(x(t_*)\big)^2 + (t_* - 1)^2 < 1$. Мы пришли к противоречию с допустимостью w, т.е. w^0 — минималь. Для определения t_* и c приходим к системе $e^{-t_*+c} = \sqrt{2t_* - t_*^2}$, $\quad e^{-t_*+c} = (1 - t_*)/\sqrt{2t_* - t_*^2}$, откуда

$$t_* = \big(1 + \sqrt{5}\big)/2 \quad \text{и} \quad c = \ln\sqrt{2t_* - t_*^2} + t_*.$$

Концы оптимальной траектории w^0 лежат внутри фазового ограничения, т.е. для w^0 выполнены условия согласованности и управляемости для моментов t_0 и t_1. Поскольку x^0 касается фазовой границы лишь при $t = t_*$, то условие управляемости выполнено всюду на $[0, 2]$, кроме t_*. Проверим условие управляемости в t_*. Имеем $\Phi_1(x, t) = 1 - x^2 - (t-1)^2$. Поскольку x^0 касается окружности $\Phi_1 = 0$ в момент t_*, то $\Phi_{1x}'[t_*]\big(-x^0(t_*)\big) + \Phi_{1t}'[t_*] = 0$. Поэтому для любого u

$$\Phi_{1x}'[t_*]\,(-x^0(t_*) + u^2) + \Phi_{1t}'[t_*] = -2x^0(t_*)\,u^2 \leqq 0,$$

т.е. в t_* выполнена „$-$"-управляемость и нарушена „$+$"-управляемость.

Рассмотрим ПМ траектории w^0. Имеем

$$\pi = (\alpha_0, c_{t_0}, c_{t_1}, \psi, m_1, m_2),$$
$$H = \overline{H} = \psi_x(u^2 - x) + \psi_t, \qquad l = \alpha_0 x_1 + c_{t_0} t_0 + c_{t_1}(t_1 - 2).$$

Здесь мера m_1 соответствует ограничению $\Phi_1(x, t) \leqq 0$, а m_2 — ограничению $x \geqq 0$. Поскольку $x^0(t) > 0$ и t_* — единственная фазовая точка, то $m_2 = 0$ и $m_1 = d\delta(t - t_*)$, где $d \geqq 0$. Условия на π имеют вид $\overline{H}_u = 2\psi_x u^0\,(=)\,0$,

$$\begin{aligned} -d\psi_x &= \overline{H}_x'[t]\,dt + 2x^0(t)\,dm_1 = -\psi_x(t)\,dt + 2x^0(t)\,dm_1, \\ -d\psi_t &= \overline{H}_t'[t]\,dt + 2(t-1)\,dm_1 = 2(t-1)\,dm_1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$\psi_x(0) = 0$, $\psi_x(2) = -\alpha_0$, $\psi(t) = c_{t_0}$, $\psi_t(2) = -c_{t_1} - \psi_x(t)\,x^0(t) + \psi_t(t)\,(=)\,0$. Из (4.3) и представления $m_1 = d\delta(t - t_*)$ мы заключаем, что

$$\psi_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad t \in [0, t_*] \\ -2x^0(t_*)\,d\,e^{t-t_*}, & \text{если} \quad t \in (t_*, 2]. \end{cases}$$

Прочие компоненты π легко выражаются через ψ_x: $c_{t_0} = 0$, $c_{t_1} = -\psi_x(2)\,x^0(2)$, $\alpha_0 = 2x^0(t_*)\,e^{-2-t_*}\,d$. Итак, $\psi_x = 0$ на $[0, t_*]$ и $\psi_x \not\equiv 0$, т.е. здесь нарушена альтернатива теоремы 3.1. Разгадка примера — нарушение управляемости w^0 в единственной точке $t_* \in \Delta$.

Примеры 4.1—4.4 иллюстрируют существенность условий управляемости и согласованности в теоремах 3.1—3.4.

§ 5 Доказательства теорем

Начнём с доказательства предложения о связи понятий управляемости и Γ-регулярности.

Доказательство предложения: 2.1: Покажем, что из Γ_+-управляемости в точке $t_* \in (t_0, t_1]$ вытекает „+“-управляемость. Обозначим через $\bar{f}$ одну из левых производных x^0 в t_*, т.е.

$$\bar{f} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^0(t_n) - x^0(t_*)}{t_n - t_*}$$

для некоторой последовательности t_n такой, что $t_n \to t_*-$. Так как

$$\frac{x^0(t_n) - x^0(t_*)}{t_n - t_*} = \frac{1}{t_n - t_*}\int_{t_*}^{t_n} f[t]\,dt \in \operatorname{co} \bigcup_{t\in(t_n, t_*)} f\bigl(x^0(t), \overline{u^0}(t), t\bigr),$$

то найдутся числа α_n^l, t_n^l и вектора u_n^l $(l = 1, \dots, d(x) + 1)$ удовлетворяющие условиям $\alpha_n^l \geqq 0$, $\sum_l \alpha_n^l = 1$, $t_n^l \in (t_n, t_*)$, $u_n^l \in \overline{u^0}(t_n^l)$ такие, что

$$\frac{x^0(t_n) - x^0(t_*)}{t_n - t_*} = \sum_l \alpha_n^l\, f\bigl(x^0(t_n^l), u_n^l, t_n^l\bigr).$$

Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\alpha_n^l \to \alpha^l$, $u_n^l \to u^l$. Таким образом, существуют α^l, u^l $(l = 1, \dots, d(x) + 1)$ такие, что

$$\alpha^l \geqq 0, \quad \sum_l \alpha^l = 1, \quad u^l \in \overline{u^0}(t_*), \quad \bar{f} = \sum_l \alpha^l f(x_*, u^l, t_*), \tag{5.1}$$

где $x_* = x^0(t_*)$. При этом, так как $\bar{f}$ — левая производная x^0 в t_*, то

$$\Phi_{ix}'[t_*]\,\bar{f} + \Phi_{it}'[t_*] \geqq 0 \quad \text{для всех} \quad i \in I_0(\Phi[t_*]). \tag{5.2}$$

Согласно условию, w^0 Γ_+-регулярна в t_*. Поэтому существуют вктора $\bar{u}_1{}^l \in \mathbf{R}^{d(u_1)}$ такие, что

$$g'_{u_1}(x_*, u^l, t_*)\,\bar{u}_1{}^l = 0, \qquad \Phi'_{ix}[t_*]\,f'_{u_1}(x_*, u^l, t_*)\,\bar{u}_1{}^l > 0, \qquad G'_{su_1}(x_*, u^l, t_*)\,\bar{u}_1{}^l < 0 \tag{5.3}$$

для всех $l = 1, \ldots, d(x) + 1$, $i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_*])$, $s \in \mathsf{I}_0\big(G(x_*, u_1{}^l, t_*)\big)$. Поскольку оператор $g'_{u_1}(x_*, u^l, t_*)\,\bar{u}_1$ отображает $\mathbf{R}^{d(u_1)}$ на все пространство $\mathbf{R}^{d(g)}$, а $g(x_*, u^l, t_*) = 0$, то, согласно теореме Люстерника [8], существует определенная при всех $\varepsilon > 0$ функция $\hat{u}^l(\varepsilon)$ такая, что

$$\begin{aligned} &\text{а) } \hat{u}_1{}^l(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+, \\ &\text{б) } g(x_*, u^l(\varepsilon), t_*) = 0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon > 0, \\ &\quad \text{где} \quad u^l(\varepsilon) = \big(u_1{}^l + \varepsilon(\bar{u}_1{}^l + \hat{u}_1{}^l(\varepsilon)), u_2{}^l\big). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Тогда из (5.3) вытекает существование $\varepsilon_0 > 0$ такого, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$G_s(x_*, u^l(\varepsilon), t_*) < 0, \qquad \Phi'_{ix}[t_*]\,f(x_*, u^l(\varepsilon), t_*) > \Phi'_{ix}[t_*]\,f(x_*, u^l, t_*) \tag{5.5}$$

при всех $l \leqq d(x) + 1$, $s \leqq d(G)$, $i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_*])$. Положим $\bar{f}(\varepsilon) = \sum_l \alpha^l f(x_*, u^l(\varepsilon), t_*)$. Из (5.5) следует, что $\bar{f}(\varepsilon) \in \mathrm{co}\, f(x_*, V[t_*], t_*)$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Сравнивая (5.2) и (5.5) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, заключаем, что $\Phi'_{ix}[t_*]\,\bar{f}(\varepsilon) + \Phi'_{it}[t_*] > 0$ как только $i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_*])$. Этим „+"-управляемость w^0 в t_* доказана. Аналогично устанавливается справедливость остальных утверждений предложения 2.1 ∎

Доказательству теорем 3.1 и 3.2 и предложения 3.3 предпошлем леммы 1—4.

Лемма 1: *Пусть ψ компонента ЛПМ, $t_* \in [t_0, t_1)$ $(t_* \in (t_0, t_1])$. Если $\psi(t_*+) = 0$ или $\psi(t_*) = 0$ $(\psi(t_*-) = 0$ или $\psi(t_*) = 0)$, то существуют $M(\cdot) \in L_\infty^{d(\Phi)}$, $\varphi(\cdot) \in L_\infty^{d(\Phi)(d(x)+1)}$ и константа $\mathsf{K}_0 > 0$ такие, что на $[t_*, t_1)$ $\big((t_0, t_*]\big)$ имеют место утверждения*

$$\psi(t) = \big(\Phi'^*[t] + \varphi^*(t)\big)\,M(t)\ \big(\psi(t) = -(\Phi'^*[t] + \varphi^*(t))\,M(t)\big), \tag{5.6а}$$

$$|\varphi(t)| < \mathsf{K}_0\,|t - t_*|, \tag{5.6б}$$

$$|M(t)| \quad \textit{монотонно возрастает (убывает)}. \tag{5.6в}$$

Доказательство: Рассмотрим случай, когда $\psi(t_*+) = 0$, $t_* \in [t_0, t_1)$. Доказательство леммы в остальных случаях проводится аналогично. Согласно свойству ограниченности ЛПМ регулярной задачи, найдется $\mathsf{K} > 0$ такое, что $|a(t)|\ (\leqq)\ \mathsf{K}\,|\psi_x(t)|$, $|b(t)|\ (\leqq)\ \mathsf{K}\,|\psi_x(t)|$, $|\psi_t(t)|\ (\leqq)\ \mathsf{K}\,|\psi_x(t)|$. Обозначим через $M_a(t)$ и $M_b(t)$ сококупности матриц размером $d(G) \times d(x)$, $d(g) \times d(x)$, переводящих $\psi_x(t)$ в $a(t)$ и $b(t)$, модуль которых не превосходит K. Ясно, что $M_a(\cdot)$, $M_b(\cdot)$ измеримые замкнутозначные многозначные отображения. Обозначим через $A(t)$ и $B(t)$ измеримые выборки из $M_a(t)$ и $M_b(t)$ (существование выборки гарантирует лемма Филлипова [10]). Используя $A(t)$ и $B(t)$, запишем сопряженную систему как $d\psi = A_0(t)\,\psi(t)\,dt + \Phi'^*[t]\,dm$, где $A_0(\cdot)$ — некоторая измеримая ограниченная функция. Так как $\psi(t_*+) = 0$, то для $t \in (t_*, t_1)$ имеем

$$\psi(t) = \int_{(t_*, t)} \Gamma(t, \tau)\,\Phi'^*[\tau]\,dm, \tag{5.7}$$

где Γ есть фундаментальная матрица уравнения $-\dot{z}\,(=)\,A_0 z$. Поскольку $\Gamma(t,t) = E$, где E — единичная матрица, и $\Gamma(t, \tau)$ — липшицева функция аргументов t и τ, то из (5.7) следует существование числа K_0 не зависящего от t_*, и функций φ и M, удовлетворяющих (5.6) ∎

Лемма 2: *Пусть* ψ *компонента* ПМ, $t_0', t_1' \in \Delta$, $t_0' < t_1'$ *и* w^0 „+"(„−")-*управляема на* $[t_0', t_1')$ $\big((t_0', t_1']\big)$. *Тогда множество*

$$\mathsf{A} = \{t \in [t_0', t_1') \mid \psi(t) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(t+) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(t-) = 0\}$$

$$(\mathsf{B} = \{t \in (t_0', t_1'] \mid \psi(t) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(t+) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(t-) = 0\})$$

пусто или имеет вид $\mathsf{A} = [\bar{t}, t_1')$ $(\mathsf{B} = (t_0', \bar{t}])$, *где* $\bar{t} = \inf \mathsf{A}$ $(\bar{t} = \sup \mathsf{B})$.

Доказательство: Установим утверждения леммы для множества A (случай множества B рассматривается аналогично). Достаточно установить, что для любой точки $t_* \in \mathsf{A}$ можно указать точку $t' \in (t_*, t_1')$ такую что $\psi = 0$ на (t_*, t'). По условию w^0 „+"-управляема в t_*. Поэтому найдется $\bar{f} \in \operatorname{co} f(x_*, V[t_*], t_*)$, $x_* = x^0(t_*)$, такое что

$$\Phi'_{ix}[t_*]\, \bar{f} + \Phi'_{it}[t_*] > 0, \; i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_*]). \tag{5.8}$$

Из регулярности смешанных ограничений [5] следует существование борелевской ограниченной функции $\bar{f}$ такой, что $\bar{f} = \lim\limits_{t \to t_*} \bar{f}(t)$, $\bar{f}(t) \in \operatorname{co} f\big(x^0(t), V[t], t\big)$.

Согласно принципу максимума при всех $t \in (t_*, t_1')$ выполняется неравенсто

$$\begin{aligned} &\mu(t) - \nu(t) \leqq 0, \qquad \mu(t) = \big(\Phi_x'[t]\, \bar{f}(t) + \Phi_t'[t]\big)\, M(t), \\ &\nu(t) = |\varphi_x(t)\, \bar{f}(t) + \varphi_t(t)|\, |M(t)|, \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $M(t)$, $\varphi(t) = \big(\varphi_x(t), \varphi_t(t)\big)$ функции описанные условиями (5.6). Обозначим через r число $\min\,\{\Phi'_{ix}[t_*]\, \bar{f} + \Phi'_{it}[t_*] \mid i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_*])\}$. При t достаточно близких к t_* имеем $\mu(t) \geqq (r/2)\, |M(t)|$ и $\nu(t) \leqq (r/3)\, M(t)$. Поэтому из (5.9) следует, что при таких t будет $(r/6)\, |M(t)| \leqq 0$, а значит $M(t) = 0$. Итак существует $t_* < t' < t_1'$, такое, что $M(t') = 0$. В силу (5.6a) $\psi = 0$ на (t_*, t') ∎

Лемма 3: *Пусть* ψ *компонента* ЛПМ *траектории* w^0 *и* $t_0', t_1' \in \Delta$, $t_0' < t_1'$. *Если* w^0 $\Gamma_+(\Gamma_-)$-*регулярна на* $[t_0', t_1')$ $((t_0', t_1'])$, *то множество* $\mathsf{A}(\mathsf{B})$, *описанное в условии леммы* 2 *пусто или имеет вид* $\mathsf{A} = [\bar{t}, t_1')$ $(\mathsf{B} = (t_0', \bar{t}])$, *где* $\bar{t} = \inf \mathsf{A}$ $(\bar{t} = \sup \mathsf{B})$.

Доказательство: Докажем утверждение леммы для множества A (случай множества B рассматривается аналогично). Для этого достаточно установить, что для любой точки $t_* \in \mathsf{A}$ существует точка $t' \in (t_*, t_1')$ такая, что на (t_*, t') будет $\psi = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$r_\varepsilon = \inf_{\mathcal{F}_\varepsilon} \{|f'^{*}_{u_1}(x, u, t)\, \Phi'^{*}_x[t]\, m + g'^{*}_{u_1}(x, u, t)\, b - G'^{*}_{u_1}(x, u, t)\, a|\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon = \{(x, u, t, a, b, m) \mid x = x^0(t), u = \widetilde{u}^0(t), t \in [t_*, t_* + \varepsilon], m \geqq 0, \\ a \geqq 0, |m| = 1, aG(x, u, t) = 0, m\Phi[t] \geqq -\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Из Γ_+-регулярности w^0 в t_* следует, что $r_\varepsilon > 0$ при малых $\varepsilon > 0$. Согласно локальному принципу максимума $\bar{H}_{u_1}[t]$ $(=)$ 0. В силу (5.6a)

$$0 = \bar{H}'_{u_1}[t] \geqq \mu(t) - \nu(t),$$

где $\mu(t) = |f'^{*}_{u_1}[t]\, \Phi'^{*}_x[t]\, M(t) + g'^{*}_{u_1}[t]\, b(t) - G'^{*}_{u_1}[t]\, a(t)|$, $\quad \nu(t) = |f'^{*}_{u_1}[t]\, \varphi_x^*(t)|\, |M(t)|$, а M, φ описаны условиями (5.6). При $t_* < t < t_* + \varepsilon$ имеем $\mu(t) \geqq (r_\varepsilon/2)\, |M(t)|$ и $\nu(t) \leqq (r_\varepsilon/2)\, |M(t)|$. Для таких t будет $(r_\varepsilon/6)\, |M(t)| \leqq 0$. Поэтому $M(t) = 0$. Следовательно существует $t' \in (t_*, t_1')$ такое, что $M(t') = 0$. В силу (5.6a) на (t_*, t') будет $\psi = 0$ ∎

Лемма 4: *Если w^0 $\Gamma_-(\Gamma_+)$-регулярна в $t_* \in \Delta$, то найдется окрестность $B(t_*)$ точки t_*, на которой w^0 удовлетворяет условию $\Gamma_-(\Gamma_+)$-регулярности.*

Доказательство: Условимся в обозначении. Если $\mathcal{F}(x, u, t)$ функция, то $\mathcal{F}(x^0(t), u, t)$ будем обозначать $\mathcal{F}[u, t]$. Доказательство будем вести от противного. Пусть w^0 Γ_--регулярна в t_* и не обладает этим свойством ни на какой окрестности $B(t_*)$. Тогда существует последовательность (u_n, t_n), $t_n \in \Delta$, $t_n \to t_*$ и $u_n = \overset{\frown}{u^0}(t_n)$, такая, что система

$$\begin{gathered} g'_{u_1}[u, t]\,\overline{u}_1 = 0, \qquad G'_{su_1}[u, t]\,\overline{u}_1 < 0, \\ \Phi'_{ix}[t]\, f'_{u_1}[u, t]\,\overline{u}_1 < 0 \qquad \big(s \in \mathsf{I}_0(G[u, t]);\ i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t])\big) \end{gathered} \tag{5.10}$$

несовместна по $\overline{u}_1$ для всех $(u, t) = (u_n, t_n)$. Строка Эйлера системы (5.10) в (u_n, t_n) имеет вид (b_n, a_n, m_n), где $a_n \geqq 0$, $m_n \geqq 0$, $a_n G[u_n, t_n] = 0$, $m_n \Phi[t_n] = 0$, $|a_n| + |b_n| + |m_n| = 1$. При этом $g'^*_{u_1}[u_n, t_n]\, b_n - G'^*_{u_1}[u_n, t_n]\, a_n - f'^*_{u_1}[u_n, t_n]\, \Phi'^*_x[t_n]\, m_n = 0$. В силу ограниченности последовательности (u_n, b_n, a_n, m_n) можно считать, что $u_n \to \overline{u}$, $b_n \to \bar{b}$, $a_n \to \bar{a}$ и $m_n \to \overline{m}$. Так как $\overline{u} \in \overset{\frown}{u^0}(t_*)$, то $(\bar{b}, \bar{a}, \overline{m})$ образует строку системы (5.10) в $(\overline{u}, t_*)$. Последнее невозможно поскольку w^0 Γ-регулярна в t_* ∎

Доказательство предложения 3.1: Установим две импликации:

(i) *Γ-регулярность w^0 в $t_0, t_1 \Rightarrow$ трансверсальность w^0 в t_0, t_1.*

(ii) *Трансверсальность w^0 в $t_0, t_1 \Rightarrow$ Γ-регулярность w^0 в t_0, t_1.*

(i): Проведем конструкцию функции $\overline{u}_1 = \overline{u}_1(t)$, содержащейся в определении трансверсальности w^0 вблизи точки t_0. w^0 Γ_--регулярна в t_0. Согласно лемме 4 w^0 Γ_--регулярна на некоторой окрестности $B(t_0)$ точки t_0. Пусть $t' \in B(t_0) \cap (t_0, t_1)$. Положим $\mathbf{K} = \{(u, t)\,|\, u \in \overset{\frown}{u^0}(t), t \in [t_0, t']\}$. $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}^{d(u)+1}$ — компакт. Пусть $(u_*, t_*) \in \mathbf{K}$. В силу Γ_--регулярности w^0 в t_* существуют $\delta(u_*, t_*) > 0$, $\overline{u}_1(u_*, t_*) \in \mathbf{R}^{d(u_1)}$ такие, что

$$\begin{gathered} g'_{u_1}[u_*, t_*]\,\overline{u}_1(u_*, t_*) = 0, \qquad G'_{su_1}[u_*, t_*]\,\overline{u}_1(u_*, t_*) < -\delta(u_*, t_*), \\ \Phi_i'[t_*]\, f'_{u_1}[u_*, t_*]\,\overline{u}_1(u_*, t_*) < -\delta(u_*, t_*) \\ \big(s \in \mathsf{I}_0(G[u_*, t_*]);\ i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_*])\big). \end{gathered} \tag{5.11}$$

Поскольку $\overset{\frown}{u^0}(t) \subset V[t]$ при $t \in \Delta$, то $\det g'_{u_1}[u, t]\, g'^*_{u_1}(u, t] > 0$ на $\mathbf{K}$. Положим

$$\overline{u}_1(u, t, u_*, t_*) = (E - g'^*_{u_1}[u, t])\,(g'_{u_1}[u, t]\, g'^*_{u_1}[u, t])^{-1}\,\overline{u}_1(u_*, t_*).$$

$\overline{u}_1(\cdot, \cdot, u_*, t_*)$ непрерывна на $\mathbf{K}$ и

$$\begin{gathered} \overline{u}_1(u, t, u_*, t_*) \to \overline{u}_1(u_*, t_*) \quad \text{при} \quad (u, t) \to (u_*, t_*), \\ g'_{u_1}[u, t]\,\overline{u}_1(u, t, u_*, t_*) = 0 \quad \text{при всех} \quad (u, t) \in \mathbf{K}. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Сравнивая (5.11), (5.12) заключаем, что существует окрестность $B(u_*, t_*)$ точки (u_*, t_*) такая, что на $B(u_*, t_*) \cap \mathbf{K}$ будет

$$\begin{gathered} G'_{su_1}[u, t]\,\overline{u}_1(u, t, u_*, t_*) < -\delta(u_*, t_*), \qquad s \in \mathsf{I}_0(G[u, t]), \\ \Phi'_{ix}[t]\, f'_{u_1}[u, t]\,\overline{u}_1(u, t, u_*, t_*) < -\delta(u_*, t_*), \qquad i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t]). \end{gathered} \tag{5.13}$$

Для каждой точки (u_*, t_*) построим тройку $\big(B(u_*, t_*), \delta(u_*, t_*), \overline{u}_1(\cdot, \cdot, u_*, t_*)\big)$ удовлетворяющую (5.12) и (5.13). Пусть $B(u_1, t_1), \ldots, B(u_n, t_n)$ покрытие $\mathbf{K}$. Положим

$$\overline{u}_1(u, t) = \sum_{i \leqq n} \chi_{B(u_i, t_i) \setminus \bigcup_{j<i} B(u_j, t_j)}(u, t)\,\overline{u}_1(u, t, u_i, t_i),$$

где χ характеристическая функция. Ясно, что $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(u, t)$ ограниченная борелевская функция определенная на $\mathbf{K}$. В силу (5.12), (5.13) ограниченная измеримая функция $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_1(u^0(t), t)$ определенная почти всюду на Δ удовлетворяет условиям содержащимся в определении трансверсальности w^0 в точке t_0. Аналогичное построение приводит к конструкции функции $\bar{u}_1$ содержащейся в определении условия трансверсальности w^0 в t_1. Импликация (i) доказана.

(ii): Докажем Γ-регулярность w^0 в t_0. Так как w^0 трансверсальна в t_0, то найдётся $\bar{u}_1(\cdot) \in L_\infty^{d(u_1)}$ такая, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{vrai}\lim_{t\to t_0} g'_{u_1}[t]\,\bar{u}_1(t) = 0, \qquad \operatorname{vrai}\overline{\lim_{t\to t_0}}\,(G_s[t] + G'_{su_1}[t])\,\bar{u}_1(t) < 0,\\ &\operatorname{vrai}\overline{\lim_{t\to t_0}}\,\Phi'_{ix}[t]f'_{u_1}[t]\,\bar{u}_1(t) < 0, \qquad i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_0]). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Положим $u_* \in \overline{u^0}(t_0)$. Тогда найдётся $\bar{u}_1(t) \in \mathbf{R}^{d(u_1)}$ такой, что $u_*, \bar{u}_1 \in \overline{u^0\bar{u}_1}(t_0)$. Из (5.13) следует, что

$$\begin{aligned} &g'_{u_1}[u_*, t_0]\,\bar{u}_1 = 0, \qquad G'_{su_1}([u_*, t_0]\,\bar{u}_1 + G_s[u_*, t_0] \leqq 0,\\ &\Phi'_{ix}[t_0]\,f'_{u_1}[u_*, t_0]\,\bar{u}_1 < 0 \qquad \big(i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_0]);\ s \leqq d(G)\big). \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается Γ-регулярность w^0 в t_1 ∎

Доказательство теоремы 3.1: Положим ψ компонента ПМ π и $t_0', t_1' \in \Delta$, $t_0' < t_1'$. Если $\inf_{\Delta'} |\psi(t)| > 0$, $\Delta' = [t_0', t_1']$, то утверждение теоремы 3.1 выполняется. Положим $\inf_{\Delta'} |\psi(t)| = 0$. Тогда найдется $t_* \in [t_0', t_1']$ такая, что $\psi(t_*+) = 0$ или $\psi(t_*-) = 0$ или $\psi(t_*) = 0$. Возможны случаи

(i) $t_* \in (t_0', t_1')$, (ii) $t_* = t_l'$, $l = 0, 1$.

Если имеет место (i), то применяя лемму 2 к $(t_0', t_*]$ и $[t_*, t_1')$ заключаем, что $\psi = 0$ на (t_0', t_1'). Положим выполняется (ii). Для определенности будем считать $l = 0$. Если w^0 „+“-управляема в t_0', то согласно лемме 2 $\psi = 0$ на (t_0', t_1'). Елси w^0 удовлетворяет условию Γ_+-регулярности в t_0', то согласно лемме 4 существует $t' \in (t_0', t_1')$ такая, что w^0 является Γ_+-регулярной на (t_0', t'). Применяя к $[t_0', t')$ лемму 3 заключаем, что $\psi = 0$ на (t_0', t'). Отсюда согласно пункту (i) следует, $\psi = 0$ всюду на (t_0', t_1') ∎

Аналогично доказывается теорема 3.2.

Доказательство следствия из теорем 3.1 и 3.2: Возможны следующие расположения t_0', t_1':

(i) $t_0' \in (t_0, t_1)$, $t_1' = t_1$, (ii) $t_0', t_1' \in (t_0, t_1)$, (iii) $t_0' = t_0$, $t_1' \in (t_0, t_1)$.

Ввиду аналогичности рассмотрений остановимся на (i). Доказательство проведем отдельно для случаев

α) π ПМ, w^0 управляема в t_0', β) π ЛПМ, w^0 Γ_--регулярна в t_0'.

В каждом из случаев достаточно показать, что из $\psi(t_0'+) = 0$ следует $\psi(t_0') = 0$.

Случай α: Поскольку w^0 управляема в t_0', то существует $\bar{f} \in \operatorname{co} f(x', V[t_0'], t_0')$, $x' = x^0(t_0')$ такой, что

$$\Phi'_{ix}[t_0']\,\bar{f} + \Phi'_{it}[t_0'] < 0, \qquad i \in \mathsf{I}_0(\Phi[t_0']). \tag{5.14}$$

В силу принципа максимума $\psi_x(t_0')\,\bar{f} + \psi_t(t_0') \leqq 0$. Используя сопряженное уравнение и условие $\psi(t_0'+) = 0$ получим

$$\psi(t_0') = -\Phi'^*[t_0']\,m(t_0'). \tag{5.15}$$

Поэтому $-\sum(\Phi'_{ix}[t_0'] \bar{f}_i + \Phi_i'[t_0'])\, m_i(t_0') \leqq 0$. В силу (5.14) отсюда следует $m(t_0') = 0$. Сравнивая с (5.15) заключаем $\psi(t_0') = 0$. Утверждение следствия в случае α) доказано.

Случай β: Положим $u \in \overline{u_\wedge{}^0}[t_0']$. Напомним $\overline{u_\wedge{}^0}(t_0') = \{u \mid \operatorname{mes}[u^{0-1}(V_u) \cap (t', t_0')] > 0$ для любой окрестности V_u точки u и любой точки $t' \in (t_0, t_1)\}$ (см. [3]). Ясно, что $\overline{u_\wedge{}^0}(t_0') \subset \overline{u^0}(t_0')$. Так как $\bar{H}'_{u_1}[t]\ (=)\ 0$, то найдутся $a, b \in \mathbf{R}_+^{d(G)}\mathbf{R}^{d(g)}$, $aG[u, t_0'] = 0$, такие, что $g'^{*}_{u_1}[u, t_0']\, b - G'^{*}_{u_1}[u, t_0']\, a + f'^{*}_{u_1}[u, t_0']\, \psi_x(t_0') = 0$. Подставляя выражение для $\psi(t_0')$ из (5.15) получим

$$g'^{*}_{u_1}[u, t_0']\, b - G'^{*}_{u_1}[u, t_0']\, a - f'^{*}_{u_1}[u, t_0']\, \Phi'^{*}_x[t_0']\, m(t_0') = 0.$$

Поскольку w^0 Γ_--регулярна в t_0' (напомним, что t_0' внутренняя точка Δ), то $|a| + |b| + |m(t_0')| = 0$. Поэтому из (5.15) следует $\psi(t_0') = 0$. Утверждение доказано и в случае β. ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Арутюнов, А. В.: К необходимым условиям оптимальности в задаче с фазовыми ограничениями. Докл. Акад. Наук СССР **280** (1985), 1033—1037.

[2] Арутюнов, А. В., и Н. Т. Тынянский: О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями. Изв. Акад. Наук СССР, Техн. киб., (1984) 4, 60—68.

[3] Дубовицкий, А. Я.: Интегральный принцип максимума в общей задаче оптимального управления. Деп. в ВИНИТИ 1974, № 2639—74 ДЕП.

[4] Дубовицкий, А. Я., и В. А. Дубовицкий: Необходимые условия сильного экстремума в задачах оптимального управления с вырождением фазовых и концевых ограничений. Успехи мат. наук **40** (1985) 2 (242), 175—176.

[5] Дубовицкий, А. Я., и В. А. Дубовицкий: Принцип максимума задач оптимального управления, у которых концы фазовой траектории лежат на границе фазового ограничения. Деп. в ВИНИТИ 1986, № 5404—86 ДЕП.

[6] Дубовицкий, А. Я., и В. А. Дубовицкий: Принцип максимума траекторий, концы которых лежат на фазовой границе. Препринт. Черноголовка: Ин-т хим. физики Акад. Наук СССР 1987.

[7] Дубовицкий, А. Я., и А. А. Милютин: Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства. Ж. выч. мат. и мат. физ. **8** (1968), 725—779.

[8] Люстерник, Л. А., и В. И. Соболев: Элементы функционального анализа. Москва: Изд-во Наука 1975.

[9] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., и Е. Ф. Мищенко: Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Физматгиз 1961.

[10] Янг, Л.: Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. Москва: Изд-во Мир 1974.

Manuskripteingang: 02. 09. 1987

VERFASSER:

Проф. д-р Абрам Яковлевич Дубовицкий
Д-р В. А. Дубовицкий
Математический отдел института химической физики Академии Наук СССР
СССР-142432 Московская область, Ногинск п/о Черноголовка