

Steuerungstheoretische Behandlung einer Schachtelaufgabe

R. KLÖTZLER

Zur Diskussion steht das von A. Fricke bereits behandelte Optimierungsproblem, unter allen Paaren kongruenter axialsymmetrischer ebener Flächenstücke vorgegebener Hauptachsenlänge, die zu Zylinderflächen verbogen und verheftet werden, diejenigen zu finden, für die das eingeschlossene Volumen maximal wird. Über einen methodisch neuen Zugang wird dieses Problem unter Einschluß bisher offen gebliebener Fragen (Existenz, Eindeutigkeit und Konvergenz des Näherungsverfahrens) analytisch und numerisch vollständig gelöst.

Рассматривается задача оптимизации рассмотренная уже А. Фриккем и состоящая в том, среди всех пар конгруэнтных, осесимметричных кусков плоскости данной длины главной оси, которые изгибаются и скрепляются к цилиндрической поверхности, найти включающую максимальный объем. Посредством методически нового подхода, задача решается аналитически и численно полностью, включительно до этого еще открытых вопросов (существование, единственность и сходимость приближенного метода).

An optimization problem is studied that was already considered by A. Fricke. It consists in finding among all pairs of congruent axiallysymmetric plane surface patches with given length of the major axis that are bent and fastened to cylindric surfaces that which includes maximal volume. By a methodically new approach, this problem is solved completely from the analytical and numerical point of view, including hitherto unsettled questions (existence, unity and convergence of approximate methods).

1. Einleitung

Im Jahre 1954 wurden durch W. WUNDERLICH in [8] einige als „Schachtelaufgaben“ bezeichnete Optimierungsprobleme vorgestellt, bei denen aus gewissen Zylinderflächen Körper („Schachteln“) maximalen Volumens erzeugt werden sollten. Diese Fragestellungen wurden von A. FRICKE in [3] und [4] in verschiedene Richtungen verallgemeinert und methodisch auf Variationsprobleme zurückgeführt. Wir verfolgen hier näher die Fragestellung von [4]. Diese lautet:

\mathcal{G} sei ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet mit zwei orthogonalen Symmetrieachsen und zugeordneten Haupt- und Nebendiagonalen der Länge $2a$ bzw. $2b$ ($a \geq b$). Zwei Zylinderflächen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ kongruenter ebener Abwicklung \mathcal{G} seien so an ihren Rändern miteinander verheftet, daß ihre Erzeugenden senkrecht zueinander stehen. Außerdem seien die Erzeugenden jeder Zylinderfläche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ parallel zur Nebendiagonalen ihrer ebenen Abwicklung. Wie muß bei vorgegebenem a das Gebiet \mathcal{G} bzw. seine Berandung $C = \partial\mathcal{G}$ gewählt werden, damit das Volumen V der von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 gebildeten (berandeten) Schachtel \mathfrak{B} maximal ist?

In der Arbeit [4] wird (abgesehen von der Bezeichnung) diese „verallgemeinerte Schachtelaufgabe“ auf das folgende isoperimetrische Variationsproblem mit ver-

schobenem Argument zurückgeführt:

$$V = J_0(w, c) := 4 \int_0^c w(z) w(c-z) dz \rightarrow \text{Max} \quad (1a)$$

zu beliebigen $w \in D^1[0, c]^1$ unter den Nebenbedingungen

$$w(z) \geq 0 \quad \text{auf } [0, c] \quad (1b)$$

und

$$\Phi_0(w, c) := |w(0)| + \int_0^c \sqrt{1 + \dot{w}(z)^2} dz = a. \quad (1c)$$

Die obere Integrationsgrenze c ist dabei selber noch ein freier Parameter größer als Null.

Kennzeichnen wir die Richtungen der beiden Erzeugendenscharen von \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 durch die Einheitsvektoren e_1 und e_2 , so beschreibt $w = w(z)$ die sog. *Profilkurve* \mathfrak{f} von \mathfrak{B} . Das ist jene Kurve, die entsteht, wenn man \mathfrak{C}_1 auf die zu e_1 orthogonale Ebene \mathfrak{E} projiziert, welche ein kartesisches (z, η) -Koordinatensystem besitzt, dessen z -Achse orthogonal zu e_1 und e_2 ist, in das Innere von \mathfrak{B} weist und einen Koordinatenursprung hat, der im Symmetriezentrum von \mathfrak{C}_1 liegt. Die Profilkurve \mathfrak{f} besteht aus der Gesamtheit der Punkte $(z, \pm w(z))$ für $0 < z \leq c$ und $(0, \eta)$ mit $|\eta| \leq w(0)$, sie ist also symmetrisch bez. der z -Achse. c ist die Breite von \mathfrak{B} in Richtung der z -Achse. (Stillschweigend wird bei dieser analytischen Darstellung von der Profilkurve \mathfrak{f} noch vorausgesetzt, daß sie stückweise glatt ist, daß ihre Projektion auf die z -Achse ausschließlich im Intervall $[0, c]$ liegt und daß jeder Punkt $z \in (0, c]$ Projektion genau zweier Punkte von \mathfrak{f} ist.) Zu gegebener Profilkurve \mathfrak{f} bzw. Funktion $w(\cdot) \geq 0$ berechnet sich nach [4: Formel (32)] \mathfrak{E} in kartesischer Darstellung (bis auf Kongruenz) als Gesamtheit der Punkte

$$\left(\pm \left[w(0) + \int_0^z \sqrt{1 + \dot{w}(\tau)^2} d\tau \right], \pm w(c-z) \right) \quad \text{für } 0 \leq z < c \quad (2)$$

und $(\pm a, l)$ mit $|l| \leq w(0)$.

A. FRICKE entwickelte in [4] auch ein Lösungsverfahren, das auf der Lagrange-schen Multiplikatorenmethode und einer Verallgemeinerung des klassischen Variationsprinzips auf Probleme mit Argumentverschiebung beruht. Die zugehörigen Bedingungen für eine stationäre Lösung w^* werden zum Aufbau einer iterativen Annäherung an w^* genutzt, aus der die Näherungswerte

$$V_F = 0,745; \quad c_F = 0,416; \quad w_F(0) = 0,373; \quad w_F(c_F) = 0,750 \quad (1')$$

unter der Normierung $a = 1$ resultieren. Theoretisch und methodisch blieben dabei aber einige sehr wesentliche Fragen offen, die aus der Art der Behandlung von (1) nach [4] nicht zu beantworten sind:

1. Existiert überhaupt eine Lösung von (1)?
2. Ist die verwendete Lagrangesche Multiplikatorenmethode voll gerechtfertigt?
3. Ist die-Eindeutigkeit der stationären Lösung gesichert, um daraus auf deren globale Optimalität schließen zu können?
4. Konvergiert das verwendete Iterationsverfahren tatsächlich?

¹⁾ $D^1[0, c]$ ist die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0, c]$.

In den nachfolgenden Abschnitten wird dieser Fragenkomplex (abgesehen von Frage 4, indem jenes Iterationsverfahren hier durch eine Splinemethode ersetzt wird) über eine parametrische Verallgemeinerung von (1) und deren steuerungstheoretische Behandlung auf neuartige Weise analysiert. Es fließen dazu Voruntersuchungen ein, die aus studentischen Arbeiten (Diplomarbeiten) von N. BÄTSAICHAN [1] und S. HILLIGES [5] resultieren.

2. Das zugeordnete parametrische Variationsproblem

x_0 sei eine beliebige monoton wachsende Funktion des Sobolew-Raums $W_2^1(0, T)$ zu gegebenem $T > 0$ mit der Eigenschaft $x_0(0) = 0$. $t_0 \leq T$ sei die größte Zahl, für die $x_0(t) = 0$ in $[0, t_0]$ gilt. Damit führen wir in (1) die Substitution

$$\begin{aligned} \dot{z} &= x_0(t), \\ x_1(t) &:= \begin{cases} \chi(t) & \text{für } t \in [0, t_0], \\ w(x_0(t)) & \text{für } t \in [t_0, T], \end{cases} \\ x_2(t) &:= w(2x_0(T) - x_0(t)) \end{aligned} \tag{3}$$

ein, wobei χ eine beliebige monoton wachsende Funktion aus $W_2^1(0, t_0)$ ist mit der Eigenschaft $\chi(0) = 0$ und $\chi(t_0) = w(x_0(t_0))$. Wir erhalten daraus aus (1) die (allgemeinere) Optimierungsaufgabe in Parameterdarstellung

$$V = J_1(x) := 8 \int_0^T x_1(t) x_2(t) \dot{x}_0(t) dt \rightarrow \text{Max} \tag{4a}$$

zu beliebigen $x = (x_0, x_1, x_2) \in W_2^{1,3}(0, T)$ unter der isoperimetrischen Nebenbedingung

$$\Phi_1(x) := \int_0^T (\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2} + \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{x}_2^2}) dt = a, \tag{4b}$$

den Restriktionen

$$x_0 \geq 0 \text{ fast überall, } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \tag{4c}$$

und Randbedingungen

$$x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(T) - x_2(T) = 0. \tag{4d}$$

Der zugeordnete Wert c wird dann sekundär bestimmt durch

$$c = 2x_0(T). \tag{5}$$

Jede zulässige Funktion w zu (1) erzeugt über die gegebene Substitution (3) einen zulässigen Funktionenvektor x zu (4). Das Umgekehrte gilt natürlich im allgemeinen nicht. Denn zum einen operiert (4) in allgemeineren Funktionenräumen als (1), und zum anderen läßt (4) mit seiner Parameterdarstellung auch solche Profilkurven f zu, die abschnittsweise orthogonal zur z -Achse verlaufen (und das nicht nur im Ursprung).

Zur Vereinfachung des Problems (4) werden wir uns noch von der explizit genannten Zustandsbeschränkung in (4c) befreien. Die Berechtigung dazu geben uns folgende Hilfssätze.

Hilfssatz 1: (4') sei das Problem (4) unter Vernachlässigung der Bedingung $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Dann ist x nur dann optimale Lösung von (4'), wenn $|x|$ optimale Lösung von (4) und (4') ist.

Beweis: Es sei x optimal zu (4'). Dann erfüllt natürlich $|x| = (|x_0|, |x_1|, |x_2|)$ die Bedingungen (4c) und (4d). Außerdem ist aber fast überall $(|x_i(t)|)' = |\dot{x}_i(t)|$ ($i = 1, 2$) nach [7: Hilfssatz 1] und damit $\Phi_1(|x|) = \Phi_1(x) = a$. Das bedeutet: $|x|$ ist zulässig zu (4') und (4). Daher muß wegen der Optimalität von x bez. (4') die Relation $J_1(x) \geq J_1(|x|)$ gelten. Zum anderen ist aber wegen $x_1(t) x_2(t) \leq |x_1(t)| |x_2(t)|$ auch $J_1(|x|) \geq J_1(x)$. Also muß $J_1(|x|) = J_1(x)$ sein. Da (4') weniger Restriktionen als (4) beinhaltet, muß $\text{Max}_{(4')} J_1 \geq \text{Max}_{(4)} J_1$ gelten. Mit dem Vorangehenden bedeutet das: $|x|$ ist optimal zu (4) und (4') ■

Hilfssatz 2: *Es sei x eine optimale Lösung zu (4') mit der Eigenschaft $\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 > 0$ fast überall auf $[0, T]$. Dann können weder x_1 noch x_2 in $(0, T]$ eine Nullstelle haben.*

Beweis: Wäre für eine optimale Lösung x zu (4') die Aussage des voranstehenden Hilfssatzes falsch, so träfe das nach Hilfssatz 1 auch für die optimale Lösung $|x|$ zu. Ihr entspricht eine Profilkurve f , die die z -Achse entweder in einem Punkt z^* mit $0 < z^* < 2x_0(T)$ (Abb. 1a) oder $z^* = 2x_0(T)$ (Abb. 1b) trifft.

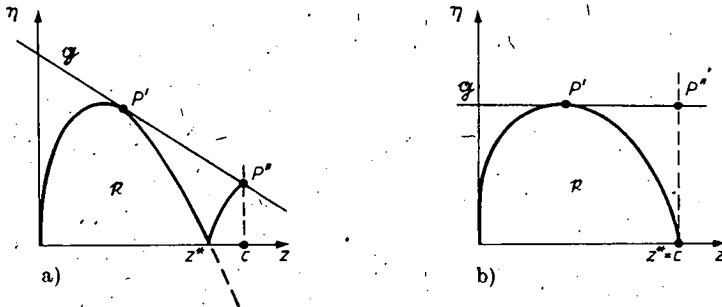


Abb. 1

Im ersten Fall existiert eine Doppelstützgerade g zu f von oben mit den Kontaktstellen P' und P'' . Ersetzen wir nun das Bogenstück $\widehat{P'P''}$ von f durch die Strecke $\overline{P'P''}$, so entsteht eine neue, kürzere Profilkurve \tilde{f} mit der Parameterdarstellung $\tilde{x}(\cdot) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_1 \geq |x_1|$, $\tilde{x}_2 \geq |x_2|$. Diese ist allerdings noch nicht zulässig bez. (4), weil nach Konstruktion $\Phi_1(\tilde{x}) < \Phi_1(|x|) = a$ gilt. Wegen $\tilde{x}_i \geq |x_i|$ ($i = 1, 2$) ist aber $J_1(\tilde{x}) \geq J_1(|x|) = J_1(x)$. Somit existiert ein Dilationsfaktor $\lambda > 1$, so daß $\hat{x} := \lambda \tilde{x}$ zulässig zu (4) ist, indem $\Phi_1(\hat{x}) = \lambda \Phi_1(\tilde{x}) = a$ gefordert wird. Damit würde aber $J_1(\hat{x}) = \lambda^3 J_1(\tilde{x}) > J_1(x)$, und das steht im Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von x .

Im zweiten Fall gehen wir ganz analog vor, anstelle von g tritt jetzt eine Stützgerade g zu \tilde{f} von oben, welche parallel zur z -Achse verläuft. P' ist wieder Kontaktstelle, P'' wählen wir aber jetzt als jenen Punkt von g , der die z -Koordinate $2x_0(T)$ besitzt. \tilde{f} wird hier dadurch erzeugt, daß man den Teilbogen $\widehat{P'Q}$ von f durch die Strecke $\overline{P'P''}$ ersetzt ■

Folgerung: *Zu allen optimalen Lösungen x von (4') mit der Eigenschaft $\dot{x}_0^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 > 0$ fast überall auf $[0, T]$ besitzen x_1 und x_2 konstantes Vorzeichen und keine Nullstellen in $(0, T]$. Mit x ist zugleich auch $|x|$ optimale Lösung von (4').*

Bemerkung: Der Beweis von Hilfssatz 2 zeigt zugleich, daß eine optimale Profilkurve f oberhalb der z -Achse konkav und monoton wachsend und unterhalb der z -Achse konvex sein muß.

3. Zur Existenz und Struktur optimaler Lösungen

Wir diskutieren zunächst das Variationsproblem (4) unter der abgeänderten Forderung, daß in (4b) statt „ $= a$ “ die Bedingung „ $\leq a$ “ steht. Wir bezeichnen diese abgeänderte Forderung mit $(\bar{4}b)$ und das gesamte so abgeänderte Problem (4) jetzt mit $(\bar{4})$. Wegen der positiven Homogenität ersten Grades der Integranden von (4a) und (4b) bez. \dot{x} sind beide zugehörigen Integrale invariant gegenüber einer Parametertransformation (vgl. z. B. [2: Section 6.6]). Infolgedessen können wir uns ohne Einschränkung der Allgemeinheit von vornherein in (4) bzw. $(\bar{4})$ auf solche zulässige Funktionen x beschränken, für die der Integrand von (4b) fast überall konstant ist. Für diese ist dann nach $(\bar{4}b)$

$$|\dot{x}_i(t)| \leq a/T \quad \text{f. ü. auf } [0, T] \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Aus dem gleichen Grunde können wir auch jede zulässige Maximalfolge $\{x^{(j)}\}$ zu $(\bar{4})$ die Beschränkung (6) voraussetzen. Damit ist in $W_2^{1,3}(0, T)$ die Folge $\{x^{(j)}\}$ schwach kompakt, so daß eine schwach konvergente Teilfolge $x^{(j')} \rightarrow x^* \in W_2^{1,3}(0, T)$ existiert. Da der Integrand von $(\bar{4}b)$ konvex in \dot{x} ist und beschränkt nach unten, ist Φ_1 schwach unterhalbstetig in $W_2^{1,3}(0, T)$. Daher ist $\Phi_1(x^*) \leq \underline{\lim} \Phi_1(x^{(j')}) \leq a$. Wegen $\dot{x}_0^{(j')} \geq 0$ und damit

$$\int_0^T \dot{x}^{(j')}(t) \psi(t) dt \geq 0 \quad \text{für alle } \psi \text{ mit } 0 \leq \psi \in L^2(0, T)$$

bedingt die schwache Konvergenz $x^{(j')} \rightarrow x^*$ selbstverständlich auch

$$\int_0^T \dot{x}_0^*(t) \psi(t) dt \geq 0 \quad \text{für alle } \psi \text{ mit } 0 \leq \psi \in L^2(0, T);$$

das hat wiederum $\dot{x}_0^* \geq 0$ fast überall auf $[0, T]$ zur Folge. Schließlich konvergiert nach den Sobolewschen Einbettungssätzen $x^{(j')}$ gleichmäßig gegen x^* in $[0, T]$. Deshalb erfüllt x^* neben $(\bar{4}b)$ auch sämtliche Bedingungen von (4c) und (4d), d. h., es ist zulässig bez. $(\bar{4})$. Außerdem entnehmen wir diesen Konvergenzeigenschaften von $\{x^{(j')}\}$ die schwache Stetigkeit von J_1 in $W_2^{1,3}(0, T)$. Somit ist $J_1(x^{(j')}) \rightarrow J_1(x^*) = \sup_{(\bar{4})} J_1$ und x^* optimale Lösung zu $(\bar{4})$. Wir fassen unser Ergebnis zusammen in dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 3: *Das Variationsproblem (4) besitzt eine optimale Lösung.*

Wir erkennen sehr leicht, daß eine optimale Lösung x^* zu $(\bar{4})$ notwendig statt $(\bar{4}b)$ sogar (4b) erfüllen muß. Würde nämlich $\Phi_1(x^*) < a$ gelten, so könnte man über eine Ähnlichkeitstransformation mit einem $\lambda > 1$ eine zulässige Funktion $\hat{x} = \lambda x^*$ finden, für die $\Phi_1(\hat{x}) = a$ und $J_1(\hat{x}) = \lambda^2 J_1(x^*) > J_1(x^*)$ ist, im Widerspruch zur Optimalität von x^* . Zusammengefaßt bedeutet das folgendes.

Hilfssatz 4: *Jede optimale Lösung von $(\bar{4})$ ist auch eine optimale Lösung von (4).*

Aus den vorangegangenen Diskussionen heben wir noch eine Eigenschaft von x^* hervor. Wie dargelegt genügt es der Gleichung (4b). Da aber Φ_1 invariant gegenüber Parametertransformationen ist, können wir stets erreichen, daß auch bez. x^* der Integrand von Φ_1 konstant auf $[0, T]$ ist und damit größer als Null. Wir drücken das in folgendem Hilfssatz aus.

Hilfssatz 5: Zu jeder optimalen Lösung x^* von (4) kann man mittels geeigneter Parametertransformationen erzielen, daß auf $[0, T]$ fast überall $\sqrt{\dot{x}_0^{*2} + \dot{x}_1^{*2}} + \sqrt{\dot{x}_0^{*2} + \dot{x}_2^{*2}} > 0$ ist.

4. Anwendung des Pontrjaginschen Maximumprinzips

Nach den Hilfssätzen 5, 1, 2 und der Folgerung zu Hilfssatz 2 vermögen wir unser Variationsproblem (4) zu vereinfachen und auf die Standardform eines Steuerungsproblems ohne Zustandsbeschränkungen zurückzuführen. Dazu setzen wir

$$F(x, u) = -\frac{J(x)}{8}, \quad \dot{x}_i = u_i, \quad (i = 0, 1, 2), \quad \dot{x}_3 = \sqrt{u_0^2 + u_1^2} + \sqrt{u_0^2 + u_2^2}$$

und erhalten das Steuerungsproblem

$$F(x, u) = -\int_0^T x_1(t) x_2(t) u_0(t) dt \rightarrow \text{Min} \quad (7a)$$

unter den Zustandsgleichungen

$$\dot{x}_i = u_i, \quad (i = 0, 1, 2), \quad \dot{x}_3 = \sqrt{u_0^2 + u_1^2} + \sqrt{u_0^2 + u_2^2}, \quad (7b)$$

Steuerbeschränkungen

$$u_0 \geq 0 \text{ f.ü. auf } [0, T] \quad (7c)$$

und Randbedingungen

$$\begin{aligned} x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(T) - x_2(T) = 0, \\ x_3(0) = 0, \quad x_3(T) - a = 0. \end{aligned} \quad (7d)$$

Nach den Hilfssätzen 3 und 4 existiert eine optimale Lösung zu (7), wir bezeichnen diese der Einfachheit halber ohne besondere Signierung nachfolgend mit (x, u) . Nach vorangestellten Hilfssätzen 1, 2 und 5 können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von vornherein annehmen:

$$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 > 0, \quad x \geq 0 \text{ und } x_i(t) > 0 \quad (i = 1, 2) \quad \forall t \in (0, T]. \quad (8)$$

Dann existieren nach dem Pontrjaginschen Maximumprinzip (z. B. in der von A. D. IOFFE und V. M. TICHOMIROV [6] explizierten Form) eine Konstante $\lambda_0 \geq 0$ und vier Funktionen $y_i \in W_2^1(0, T)$ ($i = 0, 1, 2, 3$), die nicht alle identisch Null sind, mit denen die zugehörige *Pontrjaginsche Funktion*

$$\begin{aligned} H(\xi, v, \eta, \lambda_0) := & \lambda_0 \xi_1 \xi_2 v_0 + \eta_0 v_0 + \eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 \\ & + \eta_3 (\sqrt{v_0^2 + v_1^2} + \sqrt{v_0^2 + v_2^2}) \end{aligned}$$

die folgenden Bedingungen

$$\text{Max}_{v_0 \geq 0} H(x(t), v, y(t), \lambda_0) = H(x(t), u(t), y(t), \lambda_0), \quad (9a)$$

$$\dot{x}(t) = \text{grad}_\eta H(x(t), u(t), y(t), \lambda_0), \quad (9b)$$

$$\dot{y}(t) = -\text{grad}_\xi H(x(t), u(t), y(t), \lambda_0)$$

und die Transversalitätsbedingungen

$$y_0(T) = 0, \quad y_1(T) + y_2(T) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad (9c)$$

erfüllt. Ausgeschrieben bedeutet (9b)

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= u_0, & \dot{x}_1 &= u_1, & \dot{x}_2 &= u_2, & \dot{x}_3 &= \sqrt{u_0^2 + u_1^2} + \sqrt{u_0^2 + u_2^2}; \\ \dot{y}_0 &= 0, & \dot{y}_1 &= -\lambda_0 x_2 u_0, & \dot{y}_2 &= -\lambda_0 x_1 u_0, & \dot{y}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9')$$

Danach ist $y_0 = \text{const}$ und wegen (9c) $y_0 \equiv 0$. Außerdem ersehen wir daraus $y_3 = \text{const}$. Aus (9a) resultieren die folgenden lokalen notwendigen Optimalitätsbedingungen:

$$\lambda_0 x_1(t) x_2(t) + y_3 \left(\frac{u_0(t)}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} + \frac{u_0(t)}{\sqrt{u_0^2 + u_2^2}} \right) = 0, \quad \text{falls } u_0(t) > 0, \quad (10a)$$

$$y_1(t) + y_3 \frac{u_1(t)}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} = 0, \quad \text{falls } u_0^2(t) + u_1^2(t) > 0, \quad (10b)$$

$$y_2(t) + y_3 \frac{u_2(t)}{\sqrt{u_0^2 + u_2^2}} = 0, \quad \text{falls } u_0^2(t) + u_2^2(t) > 0. \quad (10c)$$

Da infolge der vorausgesetzten Optimalität von (x, u) der Wert $F(x, u) < 0$ ist, kann nach (7a) nicht für fast alle $t \in [0, T]$ die Steuerung $u_0(t) = 0$ sein. Diese Eigenschaft hat zur Folge, daß aus $\lambda_0 = 0$ nach (10a) $y_3 \equiv 0$ sein müßte und wegen (9b'), (10b/c) und (8) auch $y_1 \equiv 0$ und $y_2 \equiv 0$. Somit wäre $(\lambda_0, y) \equiv 0$, im Widerspruch zum Pontrjaginschen Maximumprinzip. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir also von nun an $\lambda_0 = 1$ annehmen. Damit resultiert aus (8) und (10a)

$$y_3 < 0. \quad (11)$$

Wegen (11) ist $H(\xi, \cdot, y, 1)$ eine konkave Funktion, so daß die notwendigen Optimalitätsbedingungen (10) sogar hinreichend für die Gültigkeit von (9a) sind. Aus (9b') ersehen wir weiterhin $\dot{y}_i \leq 0$ ($i = 1, 2$), so daß unter Berücksichtigung von (9c) gilt:

$$y_1, y_2 \text{ sind monoton fallende Funktionen auf } [0, T] \text{ mit den Eigenschaften } y_1 \geq 0, y_2 \leq 0. \quad (12)$$

Dabei muß $y_1(0) > 0$ sein, andernfalls wäre nach (12) $y_1 \equiv 0$ und nach (9b') $x_2 u_0 = 0$ auf $[0, T]$ im Widerspruch zu $F(x, u) < 0$. Aus entsprechenden Gründen muß auch $y_2(T) < 0$ gelten. Somit resultiert aus $y_1(T) = -y_2(T)$ und (12): $y_1 > 0$ in $[0, T]$. In Verbindung mit (12), (11) und (10b/c) ersehen wir daraus

$$u_1(t) > 0, u_2(t) \leq 0, \text{ falls } u_0(t) > 0. \quad (13)$$

Für $u_1(t) \neq 0$ muß sogar wegen $y_1 > 0$ und (10b) generell $u_1(t) > 0$ gelten. Für $u_2(t) \neq 0$ muß nach (12) und (10c) $u_2(t) < 0$ sein. Das heißt, x_1 ist eine monoton wachsende Funktion und x_2 eine monoton fallende. Gibt es eine Stelle $t' \in [0, T]$, wo $u_0(t') = 0$ und $u_1(t') > 0$ ist, so muß nach (10b) dort $y_1(t') = -y_3 > 0$ sein. Ist nun $t'' \in [0, T]$ eine andere Stelle dieser Art und $\bar{t} \in (t', t'')$ eine Zwischenstelle mit $u_0(\bar{t}) > 0$, so müßte wegen (12) $y_1(t') = y_1(\bar{t}) = y_1(t'') = -y_3$ sein, andererseits aber nach (10b) $y_1(t) = -y_3 u_1(t) / \sqrt{u_0(t)^2 + u_1(t)^2} > -y_3$. Das steht miteinander im Widerspruch. In entsprechender Weise schließt man für u_0 und u_2 . Das heißt, zwischen

zwei Stellen t'', t'' mit

$$u_0(t') = 0, u_1(t') > 0; u_0(t'') = 0, u_1(t'') > 0$$

bzw.

$$u_0(t') = 0, u_2(t') < 0; u_0(t'') = 0, u_2(t'') < 0$$

gilt $u_0 = 0$. Gibt es eine Stelle $t_0 \in [0, T]$, wo zugleich $u_0(t_0) = 0$ und $u_1(t_0) = 0$ gilt, dann muß wegen (8) $u_2(t_0) < 0$ sein und somit nach (10c) $y_2(t_0) = y_3$ und $u_0(t) = 0$ für alle $t \in [t_0, T]$; das bedeutet wiederum nach (9b') und (9c) $y_1(t) = -y_3$, $y_2(t) = y_3$ für alle $t \in [t_0, T]$. Schließlich erkennen wir noch aus (9b') und (10), daß x_1 (bzw. x_2) in einem Intervall $[t', t'']$ konstant sein muß, wenn dort $|y_1(t)| < |y_3|$ (bzw. $|y_2(t)| < |y_3|$) und $u_0(t) = 0$ ist.

Das alles zusammen berücksichtigt läßt für x letztlich nur den folgenden dreiphasigen Lösungstypus zu:

a) auf $[0, t_1]$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, x_1 \text{ streng monoton wachsend mit } x_1(0) = 0, \\ x_2 &= \text{const} > 0; \end{aligned} \quad (14a)$$

b) auf $[t_1, t_2]$:

x_0 streng monoton wachsend mit $u_0(t) > 0$ und $x_0(t_1) = 0$, x_1, x_2 sind Lösungen des Differentialgleichungssystems (das durch Elimination von y_1, y_2 (in 9b') mittels (10a/b) entsteht)

$$\begin{aligned} x_2 u_0 &= y_3 \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} \right)' = y_3 \frac{[u_1' u_0 - u_1 u_0'] u_0}{(\sqrt{u_0^2 + u_1^2})^3}, \\ x_1 u_0 &= y_3 \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_0^2 + u_2^2}} \right)' = y_3 \frac{[u_2' u_0 - u_2 u_0'] u_0}{(\sqrt{u_0^2 + u_2^2})^3} \end{aligned} \quad (14b)$$

mit

$$\dot{x}_i = u_i \quad (i = 1, 2), \quad u_2(t_1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{u_1(t)}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} = 1;$$

c) auf $[t_2, T]$:

$$x_0 = 0, x_1 \text{ monoton wachsend, } x_2 \text{ monoton fallend mit } x_1(T) = x_2(T). \quad (14c)$$

Dabei kann zunächst auch $t_2 = T$ oder sogar $t_1 = T$ sein: Wenn jedoch $0 < t_2 = T$ ist (also nur erste und zweite Phase wirklich existieren), so muß wegen der Transversalitätsbedingung (9c) und (10a/b) zugleich gelten:

$$x_1(T) = x_2(T), \quad u_1(T) + u_2(T) = 0. \quad (15)$$

(14b) gestattet eine sehr einfache geometrische Interpretation, die auch schon von A. FRICKE in [4] erwähnt wird. Dividieren wir diese Formeln durch u_0 , so verbleibt

$$x_2 = y_3 \kappa(x_0, x_1), \quad x_1 = y_3 \kappa(x_0, x_2) \quad (14b')$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i \quad (i = 0, 1, 2), \quad u_2(t_1) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{u_1(t)}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} = 1, \\ x_0(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\kappa(x_0, x_i)$ in Parameterdarstellung die Krümmung der Kurven $\Gamma_i: (x_0(t), x_i(t))$ ($i = 1, 2$) darstellt für $t_1 \leq t \leq t_2$. Wegen $y_3 < 0$ sind beide Kurven konkav. Für

$0 < t_1 < t_2 = T$ haben wir also einen Lösungstypus gemäß Abb. 2a. Ist jedoch die dritte Phase echt vorhanden, also $t_2 < T$, so besteht ein Lösungstypus im Sinne von Abb. 2b. Er bildet also real eine Lösung des Maximumprinzips zu (7), die allerdings einer nichtkonkaven Profilkurve f (oberhalb der z -Achse) entspricht. Nach der Bemerkung im Anschluß an Hilfssatz 2 kommt eine solche Profilkurve f als optimale Lösung nicht in Betracht.

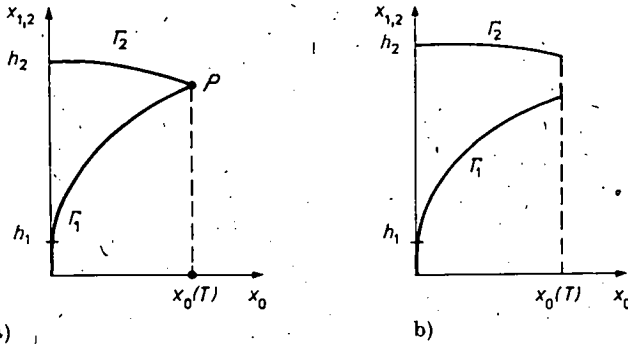


Abb. 2

Schließlich bemerken wir, daß die erste Phase nicht fehlen kann, d. h., es ist notwendig $t_1 > 0$. Andernfalls müßte nach (10a) wegen $u_0(t_1 + 0) > 0$ und $x_1(t_1) = 0$ die Bedingung $y_3 = 0$ gelten, im Widerspruch zu (11).

Zusammengefaßt erhalten wir somit folgenden Satz.

Satz: Unter allen Lösungen des Pontrjaginschen Maximumprinzips zu (7) können nur diese optimal sein, die allein aus den Phasen a) und b) von (14) zusammengesetzt sind. Sie berechnen sich im wesentlichen aus dem Randwertproblem (14b')/(15).

5. Zur numerischen Berechnung und Eindeutigkeit optimaler Lösungen

Der vorangehende Satz bildet die Grundlage zur Berechnung optimaler Prozesse (x, u) von (7). Aus ihnen erhält man über (3) optimale Lösungen w zu (1) und daraus zugeordnete optimale Profilkurven f bzw. mittels (2) die Berandung \mathcal{C} optimaler Gebiete \mathcal{G} . Wir haben somit nur noch das Randwertproblem (14b')/(15) zu studieren. Seine Lösbarkeit ist in Verbindung mit dem obigen Satz de facto durch Hilfssatz 4 garantiert. Aus seiner analytischen Gestalt und geometrischen Interpretation heraus ist evident, daß es invariant gegenüber Parametertransformation ist. Wir können uns vorerst $a > 0$ parametrisch frei gewählt denken und damit $y_3 \leq 0$. Denn aus (9) und (10) sieht man unmittelbar, daß mit einer Lösung (x, u, y) des Pontrjaginschen Maximumprinzips zu (7) für gegebenes $a > 0$ nach einer beliebigen Ähnlichkeits-Transformation mit dem Faktor $\lambda > 0$ auch $(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y})$ mit $\tilde{x} = \lambda x$, $\tilde{u} = \lambda u$, $\tilde{y} = \lambda^2 y$ eine Lösung des Pontrjaginschen Maximumprinzips zu (7) bildet, wenn a dort durch $\tilde{a} = \lambda a$ ersetzt wird. Diese Überlegungen berechtigen uns im Sinne eines „Schießverfahrens“ das Randwertproblem (14b')/(15) auf ein einparametrisches Anfangswertproblem zurückzuführen, das für $y_3 = -1$ aus den Forderungen (14b') und den zusätzlichen (parametrischen) Anfangsbedingungen $x_i(t_1) = h_i > 0$ ($i = 1, 2$) besteht mit $h_1 h_2 = +1$ ($= -y_3$) wegen (10a). Unter allen dieser Nebenbedingung genügenden h_i muß es dann wegen der Lösbarkeit unseres Randwertproblems wenig-

stens ein Paar (h_1^*, h_2^*) geben, für das im Sinne der Abb. 2a die zugeordneten Trajektorien Γ_1 und Γ_2 im Schnittpunkt P gemäß (15) die Anstiegssumme Null haben. Ist (h_1^*, h_2^*) eindeutig, so muß nach obigem Satz der zugeordnete Prozeß (x, u) notwendig optimal sein zu jenem a , das sich über (7d) aus $a = x_3(T)$ berechnet. Daraus kann man dann zu jedem anderen $a > 0$ die optimale Lösung von (7) mittels einer Ähnlichkeitstransformation ermitteln, insbesondere also zu $a = 1$ (wie es vergleichsweise zu (1') A. Fricke tat). In der Tat erweist sich (h_1^*, h_2^*) als eindeutig, wie nachstehender, am Ende dieses Abschnittes bewiesener Hilfssatz aussagt.

Hilfssatz 6: *Zu vorgegebenem $y_3 < 0$ gibt es höchstens ein Paar (h_1, h_2) von Anfangswerten $x_1(t_1) = h_1 > 0$, $x_2(t_1) = h_2 > 0$ mit $h_1 h_2 = -y_3$, zu dem (14b') eine Lösung (x_0, x_1, x_2) besitzt, die im Schnittpunkt $P = (x_0(T), x_1(T)) = (x_0(T), x_2(T))$ zugleich die Eigenschaft $\dot{x}_1(T) + \dot{x}_2(T) = 0$ hat. Die zugeordnete Konstante $a := x_3(T)$ ist somit durch y_3 eindeutig bestimmt.*

Unter Einsatz eines SHARP PC 1360 wurde zu vorgegebenem parametrischem (h_1, h_2) unter der Nebenbedingung $h_1 h_2 = 1$ das Anfangswertproblem (14b'), $x_i(t_1) = h_i$ ($i = 1, 2$) mittels einer der geometrischen Deutung von (14b') angepaßten Spline-Methode angenähert gelöst. Sie besteht darin, Γ_1 und Γ_2 durch Korbbögen vorgegebener Winkelschrittweite zu ersetzen. Es wurden dabei Winkelschrittweiten vom Bogenmaß 0,001 benutzt. Sie führten unter nachträglicher Ähnlichkeitstransformation auf den normierten Fall $a = 1$ zu folgenden Resultaten, die auf drei Stellen hinter dem Komma genau anzusehen sind:

$$V_1 = 0,745; \quad c = 0,414; \quad w(0) = h_1 = 0,371; \quad w(c) = h_2 = 0,752. \quad (16)$$

Für die optimale Profilkurve f (zu $a = 1$) ergab sich ihre kartesische Darstellung $w = w(z)$ im Sinne von Tabelle 1; für ein Viertel der Randkurve \mathcal{C} ergab sich über (2) eine kartesische Darstellung (ξ_1, ξ_2) gemäß Tabelle 2. Diesen Tabellen entsprechen die graphischen Darstellungen von f und \mathcal{C} in Abb. 3a und 3b.

Der Vergleich dieser Ergebnisse mit denen von A. Fricke — insbesondere (16) mit (1') — zeigt im wesentlichen eine numerische Übereinstimmung. Lediglich in den dritten Dezimalstellen treten geringfügige Abweichungen auf.

Beweis von Hilfssatz 6: Gemäß der einleitenden Betrachtungen zu Abschnitt 5 können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit unseren Beweis speziell für $y_3 = -1$ führen. Außerdem können wir wegen der Invarianz von (14b') gegenüber Parametertransformation bei der Beschreibung des Lösungstypus b) $t = z$ und $x_0(t) = z$ wählen. Mit diesen Normierungen studieren wir in parametrischer Abhängigkeit von $h_1 \in (0, 1)$ ein Lösungspaar $x_1(\cdot, h_1)$, $x_2(\cdot, h_1)$ zu (14b') mit den Anfangswerten $x_1(0, h_1) = h_1$, $x_2(0, h_1) = 1/h_1$. Der Schnittpunkt P der zugeordneten Trajektorien $\Gamma_i(h_1)$ ($i = 1, 2$) sei in Anlehnung an (5) durch

$$P(h_1) = \left(\frac{c(h_1)}{2}, x_1 \left(\frac{c(h_1)}{2}, h_1 \right) \right) = \left(\frac{c(h_1)}{2}, x_2 \left(\frac{c(h_1)}{2}, h_1 \right) \right)$$

gegeben. Nach (10a) gilt für alle $z \in (0, c(h_1)/2]$

$$x_1(z, h_1) x_2(z, h_1) = \cos \varphi_1(z, h_1) + \cos \varphi_2(z, h_1), \quad (17)$$

wobei $\varphi_i(z, h_1)$ ($i = 1, 2$) den Anstiegswinkel von $\Gamma_i(h_1)$ im Punkt $(z, x_i(z, h_1))$ beschreibt. Die Funktionen $x_i(\cdot, \cdot)$ und $\varphi_i(\cdot, \cdot)$ hängen stetig differenzierbar vom Anfangswert h_1 ab, ihre partiellen Ableitungen nach h_1 bezeichnen wir mit δx_i

z	w	ξ_1	ξ_2
0,000	0,371	0,000	0,752
0,030	0,517	⋮	⋮
0,055	0,567	0,371	0,752
0,079	0,601	0,521	0,751
0,102	0,627	0,577	0,749
0,123	0,648	0,619	0,746
0,143	0,665	0,653	0,742
0,163	0,679	0,683	0,737
0,182	0,692	0,710	0,731
0,200	0,702	0,734	0,725
0,207	0,706	0,756	0,717
0,214	0,709	0,775	0,709
0,232	0,717	0,793	0,702
0,251	0,725	0,814	0,692
0,271	0,731	0,834	0,679
0,291	0,737	0,855	0,665
0,312	0,742	0,876	0,647
0,335	0,746	0,898	0,626
0,359	0,749	0,921	0,601
0,384	0,751	0,945	0,567
0,414	0,752	0,970	0,517
		1,000 - 0	0,371
		1,000 + 0	0

Tabelle 1

Tabelle 2

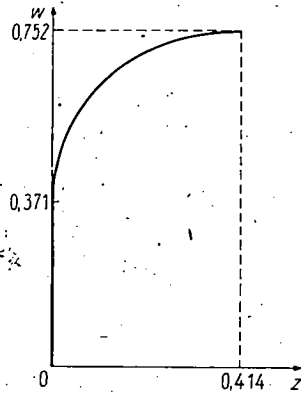


Abb. 3a) Profilkurve f

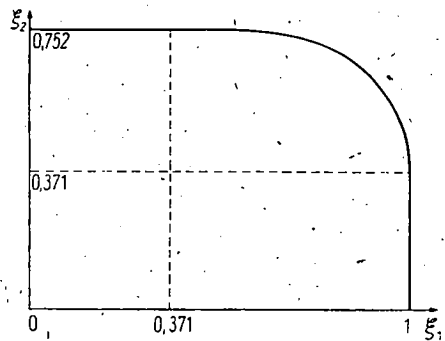


Abb. 3b) Erzeugende Kurve C

bzw. $\delta\varphi_1$. Damit resultiert aus (17) durch partielle Differentiation nach h_1

$$\begin{aligned} & \delta x_1(z, h_1) x_2(z, h_1) + \delta x_2(z, h_1) x_1(z, h_1) \\ & = -\sin \varphi_1(z, h_1) \delta\varphi_1(z, h_1) - \sin \varphi_2(z, h_1) \delta\varphi_2(z, h_1). \end{aligned} \tag{18}$$

Nach der geometrischen Interpretation von (14b') ist der Betrag der Krümmung von $\Gamma_1(h_1)$, d. h. $|\kappa(z, x_1(z, h_1))|$, eine bez. h_1 streng monoton fallende Funktion, so daß $\delta\varphi_1(z, h_1) \geq 0$ gilt. Andererseits ist der Betrag der Krümmung von $\Gamma_2(h_1)$, d. h. $|\kappa(z, x_2(z, h_1))|$, eine bez. h_1 streng monoton wachsende Funktion, so daß $\delta\varphi_2(z, h_1) \leq 0$ gilt. Aus den gleichen Gründen ist schließlich $\delta c(h_1) \leq 0$, $\delta x_1 \geq 0$ und $\delta x_2 \leq 0$. Unter Beachtung von $\varphi_1(z, h_1) > 0$ und $\varphi_2(z, h_1) < 0$ ergeben die vorangegangenen Vorzeichenüberlegungen aus (18) $\delta x_1 x_2 + \delta x_2 x_1 \leq 0$ und wegen $x_1 \leq x_2$ und $\delta x_1 \geq 0$ auch

$$(\delta x_1 + \delta x_2) x_1 \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta x_1 + \delta x_2 \leq 0.^2) \tag{19}$$

Unter Verwendung der φ_i läßt sich bei fixiertem h_1 das System (14b') auch in der folgenden Gestalt schreiben:

$$x_1 = -\frac{d \sin \varphi_2}{dz}, \quad x_2 = -\frac{d \sin \varphi_1}{dz} \tag{20}$$

²⁾ In einer Umgebung von $z = 0$ gilt hier sogar das Zeichen „<“, wie man unmittelbar aus den Anfangsbedingungen ersieht.

Die zugehörigen Randbedingungen schließen ein die Eigenschaft $\varphi_1(0, h_1) = \pi/2$ und $\varphi_2(0, h_1) = 0$. Damit resultiert aus (20) nach Integration von $z = 0$ bis $c(h_1)/2$

$$\int_0^{c/2} x_1(z, h_1) dz = -\sin \varphi_2(z, h_1)|_0^{c/2}, \quad \int_0^{c/2} x_2(z, h_1) dz = -\sin \varphi_1(z, h_1)|_0^{c/2}.$$

Differenzieren wir diese beiden Gleichungen nach h_1 , so erhalten wir

$$\int_0^{c/2} \delta x_1(z, h_1) dz + x_1\left(\frac{c}{2}, h_1\right) \delta\left(\frac{c}{2}\right) = -\cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2(c/2, h_1)}{dh_1},$$

$$\int_0^{c/2} \delta x_2(z, h_1) dz + x_2\left(\frac{c}{2}, h_1\right) \delta\left(\frac{c}{2}\right) = -\cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1(c/2, h_1)}{dh_1}.$$
(21)

Wegen $\delta x_2 \leq 0$ und $\delta c \leq 0$ resultiert hieraus zunächst $\delta \varphi_1 \geq 0$. Durch Addition der beiden Gleichungen von (21) entsteht

$$\int_0^{c/2} [\delta x_1(z, h_1) + \delta x_2(z, h_1)] dz + \left[x_1\left(\frac{c}{2}, h_1\right) + x_2\left(\frac{c}{2}, h_1\right) \right] \delta\left(\frac{c}{2}\right)$$

$$= -\cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2(c/2, h_1)}{dh_1} - \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1(c/2, h_1)}{dh_1}.$$
(21')

Unter Beachtung von (19) — einschließlich der zugeordneten Fußnote — ist wegen $\delta c \leq 0$ die linke Seite von Gleichung (21') kleiner als Null, also

$$0 > -\cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2(c/2, h_1)}{dh_1} - \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1(c/2, h_1)}{dh_1}.$$
(22)

Wir ziehen aus (22) zwei Folgerungen:

1. Ist für h_1 in $P(h_1)$ zugleich $\cos \varphi_1(c/2, h_1) = \cos \varphi_2(c/2, h_1)$, also Randbedingung (15) erfüllt, so gilt dort mit $c = c(h_1)$

$$\frac{d[\varphi_1(c/2, h_1) + \varphi_2(c/2, h_1)]}{dh_1} > 0.$$
(23)

2. Gilt für h_1 in $P(h_1)$ die Relation $|\varphi_1| > |\varphi_2|$, also $\cos \varphi_1 < \cos \varphi_2$, so ist wegen $d\varphi_1(c/2, h_1)/dh_1 \geq 0$ nach (22) auch Bedingung (23) erfüllt.

Beide Folgerungen drücken zusammen für die Hilfsfunktion $\Delta(\cdot) = \varphi_1(c(\cdot)/2, \cdot) + \varphi_2(c(\cdot)/2, \cdot)$ die Eigenschaft aus, streng monoton wachsend zu sein, somit kann es höchstens ein $h_1 \in (0, 1)$ geben, für das $\Delta(h_1) = 0$ und damit Randbedingung (15) gilt. Damit ist Hilfssatz 6 bewiesen ■

LITERATUR

- [1] BATSACHAN, N.: Ein räumliches Zuschnittproblem von A. Fricke. Diplomarbeit. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1984.
- [2] EWING, M. G.: Calculus of Variations with Applications. New York: W. W. Norton & Comp. INC 1969.

- [3] FRICKE, A.: Bemerkungen zu einer Variationsaufgabe. *Elemente der Math.* 10 (1955), 61–65.
- [4] FRICKE, A.: Ein isoperimetrisches Problem im \mathbb{R}^3 . *ZAMM* 64 (1984), 51–57.
- [5] HILLIGES, S.: Über ein räumliches Zuschnittproblem von Prof. A. Fricke. Diplomarbeit. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1986.
- [6] IOFFE, A. D., und V. M. TICHOМИРОВ: Theorie der Extremalaufgaben. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1979 (Übers. a. d. Russ.).
- [7] KLÖTZLER, R.: Direkte Methoden bei irregulären Variationsproblemen. *Beiträge zur Analysis* 5 (1973), 7–17.
- [8] WUNDERLICH, W.: Verallgemeinerte Schachtelaufgabe. *Elemente der Math.* 9 (1954), 89.

Manuskripteingang: 05. 11. 1987

VERFASSER:

Prof. Dr. ROLF KLÖTZLER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig

ERRATUM to

On a Singular Part of an Unbounded Operator

S. ÔTA

In the above-mentioned paper (this journal 7 (1988), 15–18) the correct text is as follows:

on p. 16₉ read $\overline{\mathcal{D}(A^*)}$ instead of $\mathcal{D}(A^*)$;

on p. 16₄ read $\xi \in \mathcal{D}(A^*)$ instead of $\xi \in \overline{\mathcal{D}(A^*)}$;

on p. 18² read Theorem 2 instead of Theorem 4.

S. ÔTA