Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (5) 1988, S. 431–440

Reguläre Aufgaben der optimalen Steuerung mit linearen Zustandsrestriktionen

Hoàng Xuân Phú

Eine Klasse regulärer Aufgaben der optimalen Steuerung mit linearen Zustandsrestriktionen wird unter Einsatz der vom Autor entwickelten Methode der Bereichsanalyse studiert. Diese Methode gestattet, das Verhalten der optimalen Zustandsfunktion zu den Restriktionen und in günstigen Fällen sogar die optimale Lösung zu ermitteln. Als Beispiel wird ein geometrisches Optimierungsproblem gelöst.

Методом областного анализа исследуется класс невырожденных задач оптимального управления с линейными фазовыми ограничениями. Этот метод позволяет определить поведение оптимальной траектории по отношению к фазовым ограничениям, а в некоторых случаях даже самое оптимальное решение. В качестве примера решается одна проблема геометрии.

A class of regular optimal control problems with linear state restrictions is investigated by the author's method of region analysis. This method may find out the behaviour of the optimal state function with respect to the state restrictions and, in favourable cases, even the optimal solution. For example, a geometrical optimization problem is solved.

1. Einleitung

Eine der wichtigsten methodischen Grundlagen zur Lösung von Aufgaben der optimalen Steuerung ist das Pontrjaginsche Maximumprinzip. Es ist eine notwendige Optimalitätsbedingung, mit deren Hilfe man das lokale Verhalten der optimalen Prozesse angeben kann. Das reicht aber noch nicht, um im großen damit viele Aufgaben der optimalen Steuerung vollständig zu lösen. Insbesondere entstehen, wenn man z. B. über Schießverfahren aus Anfangswertproblemen heraus den Aufbau optimaler Trajektorien beginnt und nach und nach die optimalen Prozesse anhand des Pontrjaginschen Maximumprinzips konstruiert, oft Verzweigungen, wobei die meisten von ihnen letzten Endes zu keiner optimalen Lösung führen. Wenn man diese „uneffektiven" Verzweigungen nicht irgendwie rechtzeitig aussortieren kann, steigt der dazu erforderliche analytische bzw. rechentechnische Aufwand unangenehm hoch an. Diese Schwierigkeit tritt insbesondere dann zutage, wenn zusätzlich Zustandsrestriktionen auftreten. Zu deren Überwindung wurde von Phú [4, 5] die Methode der Bereichsanalyse zunächst zur Lösung einer Klasse einfacher regulärer Aufgaben der optimalen Steuerung entwickelt, bei denen nur eine Zustandsfunktion x und eine Steuerfunktion u auftreten und die Zustandsgleichung die einfache Gestalt $\dot{x} = u$ hat. Später wurde von Phú [6] diese Methode auf eine wesentlich allgemeinere Klasse regulärer Aufgaben mit einer Zustands- und einer Steuervariablen verallgemeinert, bei denen die meisten Einschränkungen aus [4, 5] aufgehoben sind.

In dieser Arbeit wird die Idee der Methode der Bereichsanalyse auf eine Klasse regulärer Aufgaben mit mehreren Zustands- und Steuervariablen übertragen. Wir beschränken uns dabei auf lineare Zustandsrestriktionen und auf Zustandsgleichungen, deren rechte Seiten linear bezüglich der Steuervariablen, aber unabhängig von Zustandsvariablen sind.

2. Problemstellung

Der Gegenstand unserer Untersuchung ist die folgende Aufgabe der optimalen Steuerung mit fester Anfangs- und Endzeit t_0 und t_f:

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_f} L\big(t, x(t), u(t)\big)\, dt \to \min! \\
&\dot{x}(t) = C(t) + D^{\mathrm{T}} u(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \qquad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^{n_2}, \\
&\alpha^-(t) \leqq Q x(t) \leqq \alpha^+(t), \qquad e_0\big(x(t_0)\big) = 0,\ e_f\big(x(t_f)\big) = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen

$$(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mapsto L(t, \xi, v) \in \mathbb{R}^1,$$

$$\xi \in \mathbb{R}^{n_1} \mapsto e_0(\xi) \in \mathbb{R}^{n_3} \quad \text{und} \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1} \mapsto e_f(\xi) \in \mathbb{R}^{n_4}$$

nach t und ξ stetig differenzierbar und nach v zweimal stetig differenzierbar sind. Weiterhin ist C eine stetig differenzierbare n_1-dimensionale Funktion, während α^- und α^+ zweimal stetig differenzierbare eindimensionale Funktionen mit $\alpha^-(t) < \alpha^+(t)$ für alle $t \in [t_0, t_f]$ sind. Schließlich ist D eine konstante $n_2 \times n_1$-Matrix und Q ein konstanter n_1-dimensionaler Zeilenvektor.

Eine Aufgabe der optimalen Steuerung heißt *regulär*, wenn die zugehörige Pontrjaginsche Funktion überall streng konvex bez. der Steuervariablen ist. Weil der Zielintegrand L zweimal stetig differenzierbar und die Zustandsgleichung linear nach den Steuervariablen ist, reicht die folgende Voraussetzung für die Regularität von (1) aus:

Die Matrixfunktion $L_{vv}(t, \xi, v) := \left(\dfrac{\partial^2}{\partial v_i\, \partial v_j} L(t, \xi, v)\right)_{i,j=1}^{n_2}$ sei positiv definit für alle $v \in U$ und $(t, \xi) \in G$, $G := \{(t, \xi) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n_1} \mid t_0 \leqq t \leqq t_f,$ $\alpha^-(t) \leqq Q\xi \leqq \alpha^+(t)\}$. (2)

Die soeben definierte Menge G wird *Zustandsbereich* genannt. Vom Steuerbereich U wird verlangt:

U ist konvex, abgeschlossen und entweder beschränkt, oder für alle $(t, \xi) \in G$ ist mit $\|v\| \to +\infty$ auch $L(t, \xi, v) \to +\infty$. (3)

Zwischen dem Steuerbereich und den Zustandsrestriktionen bestehe folgende Bedingung:

Für alle $t \in [t_0, t_f]$ existiert ein $v \in \operatorname{int} U$, aber kein $v \in \partial U$ mit $Q\big(C(t) + D^{\mathrm{T}} v\big) = \dot{\alpha}^{\pm}(t)$. (4)

Damit keine Steuervariable „wirkungslos" bez. der Zustandsrestriktionen bleibt, fordern wir

$$QD_i^{\mathrm{T}} \neq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n_2, \tag{5}$$

wobei D_i die i-te Zeile der Matrix D ist.

Der Kürze halber wird das Problem (1) unter den Voraussetzungen (2)–(5) mit (P) bezeichnet.

Als *zulässige Steuerung* betrachten wir beliebige meßbare beschränkte n_2-dimensionale Funktionen u, die Werte aus der Menge U annehmen. Durch x wird eine absolut stetige n_1-dimensionale Zustandsfunktion beschrieben. Ein Paar (x, u) von einer Zustandsfunktion x und einer zulässigen Steuerung u heißt *Prozeß*, wenn es die

Zustandsgleichung und alle Beschränkungen in (1) erfüllt. Ein Prozeß ist genau dann *optimal*, wenn er das Zielfunktional in (1) minimiert. Der Graph einer Zustandsfunktion wird *Trajektorie* genannt.

Unser Ziel ist es, optimale Prozesse des Problems (P) mit Hilfe der sogenannten Methode der Bereichsanalyse zu bestimmen. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß die hier untersuchten Aufgaben Lösungen besitzen.

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen

Der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist das Pontrjaginsche Maximumprinzip für Aufgaben der optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen, das von Ioffe und Tichomirov [2; p. 208ff.] formuliert und bewiesen wurde. Im folgenden wird dieses Maximumprinzip auf das konkrete Problem (P) übertragen und in der Gestalt von nachstehendem Satz 1 zum Ausdruck gebracht. Dafür verwenden wir die Pontrjaginsche Funktion

$$H(t, \xi, v, \eta, \lambda) := \eta^{\mathrm{T}}\big(C(t) + D^{\mathrm{T}}v\big) - \lambda L(t, \xi, v).$$

Satz 1: *Es sei* (x^*, u^*) *ein optimaler Prozeß des Problems* (P). *Dann existieren eine Zahl* $\lambda_0 \geqq 0$, *Vektoren* $l_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$ *und* $l_t \in \mathbb{R}^{n_t}$, *eine Vektorfunktion* $p\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n_1}$ *und auf den Mengen*

$$T_1 = \{t \in [t_0, t_1] \mid Qx^*(t) = \alpha^-(t)\} \quad \text{und} \quad T_2 = \{t \in [t_0, t_1] \mid Qx^*(t) = \alpha^+(t)\}$$

konzentrierte nichtnegative reguläre Maße μ_1 *und* μ_2 *auf* $[t_0, t_1]$ *(wobei diese Größen nicht gleichzeitig verschwinden) derart, daß folgendes gilt:*

$$p(t) = e_{0\xi}\big(x^*(t_0)\big)\, l_0 + \int_{t_0}^{t} \lambda_0 L_\xi\big(z, x^*(z), u^*(z)\big)\, dz + Q^{\mathrm{T}} \int_{[t_0,t)} (-d\mu_1 + d\mu_2),$$

$$p(t_1) = e_{1\xi}\big(x^*(t_1)\big)\, l_1$$

und

$$H\big(t, x^*(t), u^*(t), p(t), \lambda_0\big) = \operatorname*{Max}_{v \in U} H\big(t, x^*(t), v, p(t), \lambda_0\big) \quad \textit{f. ü. in} \quad [t_0, t_1].$$

Hier und im weiteren bezeichnet F_ξ die Vektorfunktion

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \xi_{n_1}}\right)^{\mathrm{T}},$$

falls F eine eindimensionale Funktion ist, bzw. die Matrixfunktion

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial \xi_i}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots,n_1,\\ j=1,2,\ldots,n}},$$

wenn F die n-dimensionale Vektorfunktion $(F_1, F_2, \ldots, F_n)^{\mathrm{T}}$ darstellt. Das gilt entsprechend für L_v.

Damit unsere Aufmerksamkeit nicht vom Hauptanliegen abgelenkt wird, nehmen wir von vornherein an, daß alle optimalen Prozesse des Problems (P) *normal* sind, d. h., daß sie das Pontrjaginsche Maximumprinzip (in Satz 1) für $\lambda_0 > 0$ erfüllen. Wenn das nicht der Fall wäre, würden wir uns nur für normale optimale Prozesse interessieren. Damit kann a priori $\lambda_0 = 1$ gesetzt werden.

Für einen allgemeineren Fall hatten IOFFE und TICHOMIROV [2; p. 209f.] darauf hingewiesen, daß die *Kozustandsfunktion* p stets von beschränkter Variation und linksseitig stetig ist, weil die Maße μ_1 und μ_2 nichtnegativ und regulär sind. Da diese Maße auf dem Rand des Zustandsbereichs konzentriert sind, folgt weiterhin die absolute Stetigkeit von p in solchen Intervallen, in denen alle Zustandsbeschränkungen inaktiv sind. Die Frage der Stetigkeit von p im allgemeinen erfordert zusätzliche Untersuchungen.

Wenn der Steuerbereich U kompakt ist, dann folgt aus (4) und (5) die Stetigkeit von p. Das wurde von PHÚ [3] gezeigt. Die gleiche Behauptung bleibt erhalten, wenn die Beschränktheit von U durch die Bedingung $L(t, \xi, v) \to +\infty$ für $\|v\| \to +\infty$ ersetzt wird. Dafür benötigt der Beweis in [3] nur einige kleine Modifizierungen, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Also garantieren (3)—(5) die Stetigkeit der optimalen Kozustandsfunktion p. Eine wichtige Anwendung dieses Resultats ist

Satz 2: *Es sei* (x^*, u^*) *ein optimaler Prozeß des Problems* (P). *Dann ist* u^* *stetig und fast überall in* $\{t \in [t_0, t_f] \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U\}$ *differenzierbar.*

Beweis: Weil die Funktion $H(t, x^*(t), \cdot, p(t), 1)$ wegen (2) streng konkav für alle t und der Steuerbereich U nach (3) konvex ist, hat sie für alle t genau eine Maximalstelle. Deshalb folgt die Stetigkeit von u^* aus der Stetigkeit von p, wie PHÚ [3; Lemma 10] gezeigt hat.

Wegen der Maximumbedingung in Satz 1 und (2) haben wir fast überall in $\{t \in [t_0, t_f] \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U\}$ die Gleichung $H_v(t, x^*(t), u^*(t), p(t), 1) = 0$, d. h. $Dp(t) - L_v(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$. Daraus folgt die Differenzierbarkeit von u^* fast überall in dieser Menge, weil p von beschränkter Variation, x^* absolut stetig, L stetig differenzierbar und L_{vv} positiv definit ist ∎

Für spätere Anwendung wird nun das Pontrjaginsche Maximumprinzip (aus Satz 1) auf eine geeignetere Form übertragen. Dabei sei

$$\mathcal{D}(t, x, u) := DL_\xi(t, x(t), u(t)) - \frac{d}{dt} L_v(t, x(t), u(t)). \tag{6}$$

Satz 3: *Es sei* (x^*, u^*) *ein optimaler Prozeß des Problems* (P). *Weiterhin seien* H, p, μ_1 *und* μ_2 *wie in Satz 1 definiert. Dann läßt sich die partielle Ableitung* H_v *der Pontrjaginschen Funktion* H *nach den Steuervariablen wie folgt darstellen:*

$$H_v(t, x^*(t), u^*(t), p(t), 1) = Dp(t_0) - L_v(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{D}(z, x^*, u^*)\, dz + \int_{[t_0, t)} DQ^{\mathrm{T}}(-d\mu_1 + d\mu_2).$$

Der Beweis dafür ist einfach und kann fast wortwörtlich aus PHÚ [7] entnommen werden (dort wurde eine ähnliche Behauptung für den Fall gezeigt, daß die Funktion L linear bezüglich der Steuervariablen ist) ∎

Aus Satz 1 und Satz 3 folgt unmittelbar, daß

$$\mathcal{D}(t, x^*, u^*) = 0 \quad \text{f.ü. in} \quad \{t \in [t_0, t_f] \mid \alpha^-(t) < Qx^*(t) < \alpha^+(t),\ u^*(t) \in \operatorname{int} U\} \tag{7}$$

gilt. Das bedeutet nichts anderes als eine Verallgemeinerung der Eulerschen Gleichung in der klassischen Variationsrechnung, denn für den Fall $\dot{x} = u$ (d. h., C ist der Nullvektor und D die Einheitsmatrix) ergibt sich aus (6)

$$\mathcal{D}(t, x, u) = L_\xi(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_v(t, x(t), \dot{x}(t)).$$

4. Die Methode der Bereichsanalyse zur Behandlung des Problems (P)

Auf Grund von (7) wird das Problem (P) auf eine Reihe von Randwertaufgaben zurückgeführt. Angenommen, daß diese Aufgaben gelöst werden können, dann sind trotzdem die Fragen nach ihrer Anzahl und ihren Geltungsbereichen noch offen. Diese Fragen zu beantworten, das ist ein Ziel der Methode der Bereichsanalyse.

Zunächst werden einige Begriffe bzw. Funktionen eingeführt. $z \in [t_0, t_l]$ heißt *Aufsprungstelle* eines Prozesses (x, u) auf den Rand ∂G (bzw. *Absprungstelle* vom Rand) des Zustandsbereichs G, wenn $\big(z, x(z)\big) \in \partial G$ ist und für alle $\varepsilon > 0$ ein $t \in (z - \varepsilon, z)$ (bzw. $t \in (z, z + \varepsilon)$) mit $\big(t, x(t)\big) \in \operatorname{int} G$ existiert. Ist z_1 eine Aufsprungstelle und z_2 eine Absprungstelle mit $z_1 < z_2$, dann heißt (z_1, z_2) *Verweilintervall* und jedes $z \in (z_1, z_2)$ *Verweilstelle*. Die obigen Fragen nach der Anzahl der entstehenden Randwertaufgaben und ihren Geltungsbereichen lauten nun: Wie viele Aufsprung- und Absprungstellen kann der gesuchte optimale Prozeß besitzen, und in welchen Zonen liegen sie?

Für unsere Untersuchung werden folgende Funktionen benötigt:

$$\begin{aligned} V(t, \xi, v, w) &:= QD^{\mathrm{T}}L_{vv}^{-1}(t, \xi, v)\big[DL_\xi(t, \xi, v) - L_{vt}(t, \xi, v) \\ &\qquad - L_{v\xi}(t, \xi, v)\big(C(t) + D^{\mathrm{T}}v\big)\big] - w, \\ \tilde{V}(t, \xi, v, \eta) &:= V\big((t, \xi, v, \eta) - Q\dot{C}(t)\big). \end{aligned} \tag{8}$$

Aus der Definition in (6) und (8) folgt sofort

$$\begin{aligned} QD^{\mathrm{T}}L_{vv}^{-1}\big(t, x(t), u(t)\big)\,\mathcal{D}(t, x, u) &= V\big(t, x(t), u(t), QD^{\mathrm{T}}\dot{u}(t)\big) \\ &= \tilde{V}\big(t, x(t), u(t), Q\ddot{x}(t)\big) \quad \text{f.ü.} \end{aligned} \tag{9}$$

für alle Prozesse (x, u) des Problems (P) mit einer fast überall differenzierbaren Steuerung u. Auf Grund dessen kann die folgende notwendige Optimalitätsbedingung gezeigt werden.

Satz 4: *Es sei (x^*, u^*) ein optimaler Prozeß des Problems* (P). *Dann gilt fast überall*

$$V\big(t, x^*(t), u^*(t), QD^{\mathrm{T}}\dot{u}^*(t)\big) = \tilde{V}\big(t, x^*(t), u^*(t), Q\ddot{x}^*(t)\big)$$

$$\begin{cases} \leqq 0 \text{ in } \{t \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U, Qx^*(t) = \alpha^+(t)\}, \\ = 0 \text{ in } \{t \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U, \alpha^-(t) < Qx^*(t) < \alpha^+(t)\}, \\ \geqq 0 \text{ in } \{t \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U, Qx^*(t) = \alpha^-(t)\}. \end{cases}$$

Beweis: Aus Satz 1 und Satz 3 ergibt sich

$$\mathcal{D}(t, x^*, u^*) = DQ^{\mathrm{T}}\big(m_1(t) - m_2(t)\big) \qquad \text{f.ü. in } \{t \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U\},$$

wobei die Funktionen m_1 und m_2 nichtnegativ auf T_1 bzw. T_2 sind und sonst verschwinden. Daher gilt

$$\begin{aligned} &QD^{\mathrm{T}}L_{vv}^{-1}\big(t, x^*(t), u^*(t)\big)\,\mathcal{D}(t, x^*, u^*) \\ &= QD^{\mathrm{T}}L_{vv}^{-1}\big(t, x^*(t), u^*(t)\big)\,DQ^{\mathrm{T}}\big(m_1(t) - m_2(t)\big) \end{aligned}$$

f.ü. in $\{t \mid u^*(t) \in \operatorname{int} U\}$. Weil L_{vv} nach (2) immer positiv definit und $DQ^{\mathrm{T}} \neq 0$ wegen (5) ist, liefern die letzte Gleichung und (9) die Behauptung des Satzes ∎

Nun wollen wir den Zustandsbereich G mittels der Funktion $\tilde{V}$ *analysieren* (daher stammt der Name „Methode der Bereichsanalyse"), d. h. G bez. dem Vorzeichen von

$\tilde{V}$ in verschiedene Bereiche einteilen und diese studieren:

$$\begin{aligned} G^+[\alpha^-] &:= \{(t,\xi) \in G \mid \tilde{V}(t,\xi,v,\ddot{\alpha}^-(t)) > 0 \ \forall\, v \in N^-(t)\},\\ G^-[\alpha^-] &:= \{(t,\xi) \in G \mid \tilde{V}(t,\xi,v,\ddot{\alpha}^-(t)) < 0 \ \forall\, v \in N^-(t)\},\\ G^+[\alpha^+] &:= \{(t,\xi) \in G \mid \tilde{V}(t,\xi,v,\ddot{\alpha}^+(t)) > 0 \ \forall\, v \in N^+(t)\},\\ G^-[\alpha^+] &:= \{(t,\xi) \in G \mid \tilde{V}(t,\xi,v,\ddot{\alpha}^+(t)) < 0 \ \forall\, v \in N^+(t)\} \end{aligned} \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} N^-(t) &= \{v \in U \mid Q(C(t) + D^{\mathrm{T}}v) = \dot{\alpha}^-(t)\},\\ N^+(t) &= \{v \in U \mid Q(C(t) + D^{\mathrm{T}}v) = \dot{\alpha}^+(t)\}. \end{aligned}$$

Definition: Gegeben sei eine Vektorfunktion $x\colon [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^{n_1}$ und eine Funktion $F\colon G \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^1$. Ein Punkt $z \in [t_0, t_1]$ heißt *Minimalstelle* (bzw. *Maximalstelle*) von F bez. x, wenn z eine (lokale) Minimalstelle (bzw. Maximalstelle) der Funktion $t \mapsto F(t, x(t))$ ist. In diesem Fall besitzt F ein *Minimum* (bzw. *Maximum*) bez. x in z (oder in $(z, x(z))$).

Wozu brauchen wir die zuletzt genannten Begriffe? Wenn $F^-(t,\xi) := Q\xi - \alpha^-(t)$ und $F^+(t,\xi) := Q\xi - \alpha^+(t)$ anstelle von F eingesetzt werden, dann sind alle Aufsprung-, Absprung- und Verweilstellen eines Prozesses (x, u) bez. der Randfläche

$$R^- := \{(t,\xi) \in G \mid Q\xi = \alpha^-(t)\} \quad (\text{bzw. } R^+ := \{(t,\xi) \in G \mid Q\xi = \alpha^+(t)\})$$

gerade Minimalstellen von F^- (bzw. Maximalstellen von F^+) bez. x. Deshalb ist der folgende Satz von Bedeutung.

Satz 5: *Es sei (x^*, u^*) ein optimaler Prozeß des Problems* (P). *Weiterhin sei $F = F^+$ und $\alpha = \alpha^+$, oder es sei $F = F^-$ und $\alpha = \alpha^-$. Dann besitzt F kein Maximum bez. x^* in*

$$G^+[\alpha] \cap \{(t,\xi) \mid t_0 < t < t_1,\ \alpha^-(t) < Q\xi \leqq \alpha^+(t)\}$$

und kein Minimum bez. x^* in

$$G^-[\alpha] \cap \{(t,\xi) \mid t_0 < t < t_1,\ \alpha^-(t) \leqq Q\xi < \alpha^+(t)\}.$$

Beweis: Angenommen, F^+ besitzt ein Maximum bez. x^* in

$$G^+[\alpha^+] \cap \{(t,\xi) \mid t_0 < t < t_1,\ \alpha^-(t) < Q\xi \leqq \alpha^+(t)\},$$

etwa in $t = z$, d. h. nach (10)

$$\begin{aligned} &\tilde{V}(z, x^*(z), v, \ddot{\alpha}^+(z)) > 0 \ \forall v \quad \text{mit} \quad Q(C(z) + D^{\mathrm{T}}v) = \dot{\alpha}^+(z),\\ &t_0 < z < t_1, \quad \alpha^-(z) < Qx^*(z) \leq \alpha^+(z). \end{aligned} \tag{11}$$

Weil $\dot{x}^*(t) = C(t) + D^{\mathrm{T}}u^*(t)$ und u^* nach Satz 2 stetig und fast überall differenzierbar in einer Umgebung von z sind, folgt aus der Definition der Maximalstelle von F^+ bez. x^*

$$\frac{d}{dt} F^+(z, x^*(z)) = Q(C(z) + D^{\mathrm{T}}u^*(z)) - \dot{\alpha}^+(z) = 0, \tag{12}$$

und für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\frac{d^2}{dt^2} F^+(t, x^*(t)) = Q\ddot{x}^*(t) - \ddot{\alpha}^+(t) \leqq 0$$

auf einer Menge von positivem Maß aus $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$. Da α^+ zweimal stetig differenzierbar ist und x^*, u^* und $\tilde{V}$ stetig sind, erfüllt der optimale Prozeß (x^*, u^*) wegen (11)—(12) für hinreichend kleines ε die Ungleichung

$$\tilde{V}(t, x^*(t), u^*(t), \ddot{\alpha}^+(t)) > 0 \quad \text{für alle} \quad t \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon).$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen ergibt sich

$$\tilde{V}(t, x^*(t), u^*(t), Q\ddot{x}^*(t)) > 0 \text{ auf einer Menge von positivem Maß aus } (z - \varepsilon, z + \varepsilon), \tag{13}$$

denn die Funktion $\tilde{V}$ ist nach der Definition in (8) monoton fallend bez. der vierten Komponente. Infolge von (4), (11) und (12) sowie der Stetigkeit von x^* und u^* kann ε so klein gewählt werden, daß $\alpha^-(t) < Qx^*(t) \leqq \alpha^+(t)$ und $u^*(t) \in \operatorname{int} U$ für alle $t \in (z - \varepsilon, z + \varepsilon)$ gilt. Damit steht (13) im Widerspruch zu Satz 4. Also ist die obige Annahme falsch, und ein Teil des Satzes wurde bewiesen. Der übrige Teil läßt sich analog zeigen ∎

Wegen $\alpha^-(t) \leqq Qx^*(t) \leqq \alpha^+(t)$ ist jedes $z \in (t_0, t_f)$ mit $Qx^*(z) = \alpha^-(z)$ (bzw. $Qx^*(z) = \alpha^+(z)$) eine Minimalstelle von F^- (bzw. eine Maximalstelle von F^+) bez. x^*. Also ergibt sich aus dem letzten Satz sofort die

Folgerung: *Es sei* (x^*, u^*) *ein optimaler Prozeß des Problems* (P). *Dann existiert kein* $z \in (t_0, t_f)$ *mit* $(z, x^*(z)) \in (G^+[\alpha^+] \cap R^+) \cup (G^-[\alpha^-] \cap R^-)$.

Auf diese Weise können Zonen angegeben werden, wo kein Aufsprung, Absprung sowie Verweilen auf den Rändern R^+ und R^- des Zustandsbereichs auftreten kann. Darüber hinaus bleibt, wenn $R^+ \subset G^+[\alpha^+]$ (bzw. $R^- \subset G^-[\alpha^-]$) gilt und die Zustandsfunktionen festen Anfangs- und Endwert x_0 und x_f haben (d. h. $e_0(\xi) := \xi - x_0$ und $e_f(\xi) := \xi - x_f$), der Rand R^+ (bzw. R^-) bis auf den Anfang und das Ende inaktiv. In diesem Fall kann die a priori als inaktiv erkannte Zustandsrestriktion aus der Aufgabenstellung weggelassen werden. Das bedeutet natürlich eine Erleichterung für die weitere Untersuchung.

Mit Hilfe von Satz 5 können wir noch die folgende Behauptung ableiten, die zur Angabe oberer Schranken für die Anzahl der Aufsprung- bzw. Absprungstellen anwendbar ist.

Satz 6: *Wenn die optimale Trajektorie des Problems* (P) *in einem Zeitintervall* $Z \subset [t_0, t_f]$ *nur in* $G^-[\alpha^+]$ *(bzw.* $G^+[\alpha^-]$*) verläuft, kann sie höchstens einen Aufsprung auf die Randfläche* R^+ *(bzw.* R^-*) und einen Absprung davon haben, wobei die Aufsprungstelle niemals hinter der Absprungstelle liegt.*

Beweis: Wir brauchen wiederum nur einen Teil stellvertretend zu zeigen. Angenommen, es gäbe $z_1, z_2 \in Z$ mit $z_1 < z_2$ und $(t, x^*(t)) \in G^-[\alpha^+]$ für alle $t \in (z_1, z_2)$, wobei z_1 und z_2 beide Aufsprungstellen auf R^+ oder beide Absprungstellen von R^+ sind, oder z_1 eine Absprungstelle von R^+ und z_2 eine Aufsprungstelle auf R^+ ist. In jedem Fall gilt $x^*(z_1) = \alpha^+(z_1)$ und $x^*(z_2) = \alpha^+(z_2)$ sowie $x^*(t) < \alpha^+(t)$ für gewisse $t \in (z_1, z_2) \neq \emptyset$. Demzufolge besitzt F^+ ein Minimum bez. x^* in

$$G^-[\alpha^+] \cap \{(t, \xi) \mid z_1 < t < z_2, \alpha^-(t) \leqq \xi < \alpha^+(t)\},$$

im Widerspruch zu Satz 5. Also ist die obige Annahme falsch, und der Satz ist bewiesen ∎

Nun sieht unsere Vorgehensweise wie folgt aus: Zunächst wird der Zustandsbereich gemäß (10) eingeteilt. Als Ergebnis entstehen zusammenhängende Bereiche, die jeweils in $G^+[\alpha^-]$ oder $G^-[\alpha^-]$ oder $G^+[\alpha^+]$ oder $G^-[\alpha^+]$ liegen oder sich mit diesen nicht überschneiden. Auf Grund dieser Struktur können wir Anzahl und Ort der möglichen Aufsprünge und Absprünge nach Satz 6 abschätzen. Anschließend werden die Randwertaufgaben vom Typ (7) in ihrem Geltungsintervall gelöst, ihre Lösungen zusammengekoppelt und die sich ergebenden Prozesse auf Optimalität getestet. Selbstverständlich hängt die Effektivität dieser Methode von der Struktur des Zustandsbereichs der konkreten Aufgabe ab. Im folgenden sind zwei der günstigsten Fälle angegeben.

Satz 7: *Es sei* (x^*, u^*) *ein optimaler Prozeß des Problems* (P).

a) *Wenn* $G = G^+[\alpha^-]$ *ist, dann existieren* t_1 *und* t_2 *mit* $t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_f$, $Qx^*(t) > \alpha^-(t)$ *für* $t \in [t_0, t_1) \cup (t_2, t_f]$ *und* $Qx^*(t) = \alpha^-(t)$ *für* $t \in (t_1, t_2)$.

b) *Wenn* $G = G^-[\alpha^+]$ *ist, dann existieren* t_1 *und* t_2 *mit* $t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_f$, $Qx^*(t) < \alpha^+(t)$ *für* $t \in [t_0, t_1) \cap (t_2, t_f]$ *und* $Qx^*(t) = \alpha^+(t)$ *für* $t \in (t_1, t_2)$.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 6. Man beachte dabei, daß unter den Intervallen $[t_0, t_1)$, (t_1, t_2) und $(t_2, t_f]$ auch leere sein können. In einem solchen Fall entfällt die bez. des leeren Intervalls gemachte Aussage. Falls $G = G^+[\alpha^-]$ und $t_1 > t_0$ gilt, dann ist t_1 die einzige Aufsprungstelle von (x^*, u^*) auf die Randfläche R^-. Wenn aber $t_1 = t_0$ gilt, dann hat die optimale Trajektorie keinen Aufsprung auf R^-. Analoge Argumente können aus der Formulierung von Satz 7 für den Fall $G = G^-[\alpha^+]$ bzw. für t_2 abgelesen werden.

Schließlich wollen wir noch eine abgeschwächte hinreichende Bedingung angeben.

Satz 8: *Es sei* $(\bar{x}, \bar{u})$ *ein Prozeß des Problems* (P) *mit festen Anfangs- und Endbedingungen* $x(t_0) = x_0$ *und* $x(t_f) = x_f$. *Weiterhin sei* $\bar{u}$ *stetig differenzierbar und* $\bar{N}(t) := \{v \in U \mid QD^{\mathrm{T}}v = QD^{\mathrm{T}}\bar{u}(t)\} \subset \operatorname{int} U$. *Wenn*

$$\tilde{V}(t, \xi, v, Q\dot{\bar{x}}(t)) > 0 \ \forall v \in \bar{N}(t) \text{ und } (t, \xi) \in G \text{ mit } Q\xi > Q\bar{x}(t)$$

und

$$\tilde{V}(t, \xi, v, Q\dot{\bar{x}}(t)) < 0 \ \forall v \in \bar{N}(t) \text{ und } (t, \xi) \in G \text{ mit } Q\xi < Q\bar{x}(t)$$

gilt, dann erfüllt jeder optimale Prozeß (x^*, u^*) *von* (P) *die Gleichung* $Qx^* = Q\bar{x}$.

Beweisidee: In Analogie zu Satz 5 kann unter der Voraussetzung von Satz 8 gezeigt werden, daß die Funktion $F(t, \xi) := Q\xi - Q\bar{x}(t)$ kein Maximum in $\{(t, \xi) \in G \mid t_0 < t < t_f,\ Q\xi > Q\bar{x}(t)\}$ und kein Minimum in $\{(t, \xi) \in G \mid t_0 < t < t_f,\ Q\xi < Q\bar{x}(t)\}$ bez. einer beliebigen optimalen Zustandsfunktion x^* besitzt. Daraus folgt $Qx^* = Q\bar{x}$, sonst existiert wegen

$$Qx^*(t_0) = Q\bar{x}(t_0) = Qx_0 \quad \text{und} \quad Qx^*(t_f) = Q\bar{x}(t_f) = Qx_f$$

ein nichtleeres Intervall $(t_1, t_2) \subset (t_0, t_f)$ mit $Qx^*(t_1) = Q\bar{x}(t_1)$ und $Qx^*(t_2) = Q\bar{x}(t_2)$ und entweder $Qx^*(t) > Q\bar{x}(t)$ oder $Qx^*(t) < Q\bar{x}(t)$ für alle $t \in (t_1, t_2)$. Das bedeutet, daß F ein Maximum in $\{(t, \xi) \in G \mid t_0 < t < t_f,\ Q\xi > Q\bar{x}(t)\}$ bzw. ein Minimum in $\{(t, \xi) \in G \mid t_0 < t < t_f,\ Q\xi < Q\bar{x}(t)\}$ bez. x^* hat, im Widerspruch zur letzten Behauptung ∎

Ein Beispiel

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir hier das Problem des größten Flächeninhalts I eines konvexen Körpers in einer Ebene bei vorgegebenem Durchmesser α^+ und vorgegebener Dicke α^-. Dieses Problem wurde von ANDREJEWA und KLÖTZLER [1] ausführlich mit Mitteln der Dualitätstheorie behandelt. Wir entnehmen daraus die analytische Formulierung dieser geometrischen Optimierungsaufgabe. Sie lautet:

$$\begin{gathered} I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-h'^2(\varphi) + h^2(\varphi)\right) d\varphi \to \min! \qquad \text{in } W_1{}^2(0, 2\pi), \\ \alpha^- \leqq h(\varphi) + h(\varphi + \pi) \leqq \alpha^+, \qquad h(0) = h(\pi) = \frac{\alpha^-}{2}. \end{gathered} \tag{14}$$

Hier ist h die Stützfunktion des konvexen Körpers. Eigentlich müßten in (14) noch die Bedingungen $h''(\varphi) + h(\varphi) \geqq 0$ und $\operatorname*{Max}_{[0,\pi]} (h(\varphi) + h(\varphi + \pi)) = \alpha^+$ stehen, aber sie können vernachlässigt werden, weil die optimale Lösung (14) automatisch diesen Bedingungen genügt.

Mit den Bezeichnungen $x_1(\varphi) = h(\varphi)$ und $x_2(\varphi) = h(\varphi + \pi)$ sowie $u_1(\varphi) = \dot{x}_1(\varphi)$ und $u_2(\varphi) = \dot{x}_2(\varphi)$ entsteht so die zugeordnete Aufgabe der optimalen Steuerung vom Typ (1):

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} [u_i^2 - x_i^2]\, dt \to \min! \\ &\dot{x}_1 = u_1, \qquad \dot{x}_2 = u_2, \qquad \alpha^- \leqq x_1(t) + x_2(t) \leqq \alpha^+, \\ &x_1(0) = x_1(\pi) = x_2(0) = x_2(\pi) = \frac{\alpha^-}{2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Offensichtlich erfüllt (15) alle Bedingungen (2)—(5), deshalb gehört diese Aufgabe zur Klasse (P), und alle Sätze in den letzten Abschnitten sind daher hier anwendbar.

Um die Aufgabe (15) mit Hilfe der Methode der Bereichsanalyse zu lösen, berechnen wir zuerst $\tilde{V}$ nach (8):

$$\tilde{V}(t, \xi, v, \eta) = -\xi_1 - \xi_2 - \eta.$$

Weil α^- und α^+ positive konstante Funktionen sind, gilt $\ddot{\alpha}^- = \ddot{\alpha}^+ = 0$. Weiterhin ist $\tilde{V}(t, \xi, v, 0) < 0$ für alle (t, ξ) aus $G = \{(t, \xi) \mid 0 \leqq t \leqq \pi, \alpha^- \leqq \xi_1 + \xi_2 \leqq \alpha^+\}$ und alle v, d. h. nach (10) $G^-[\alpha^-] = G^-[\alpha^+] = G$. Demzufolge existieren nach Satz 7 und der Folgerung aus Satz 5 zwei Werte t_1 und t_2 mit $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \pi$, $\alpha^- < x_1^*(t) + x_2^*(t) < \alpha^+$ für $t \in (0, t_1) \cup (t_2, \pi)$ und $\alpha^- < x_1^*(t) + x_2^*(t) = \alpha^+$ für $t \in (t_1, t_2)$, wobei x_1^* und x_2^* Komponenten der Zustandsfunktion des optimalen Prozesses (x^*, u^*) von (15) sind.

Aus Satz 4 folgt $x_1^*(t) + x_2^*(t) = -\ddot{x}_1^*(t) - \ddot{x}_2^*(t)$ für $t \in (0, t_1) \cup (t_2, \pi)$, d. h.

$$x_1^*(t) + x_2^*(t) = a \cos (t + b) \qquad \text{für gewisse } a \text{ und } b. \tag{16}$$

Angenommen, es ist $x_1^*(t) + x_2^*(t) < \alpha^+$ für alle $t \in [0, \pi]$ (d. h. $t_1 = t_2$). Dann gilt $x_1^*(t) + x_2^*(t) = a \cos (t + b)$ für alle $t \in [0, \pi]$. Wegen $x_1^*(0) + x_2^*(0) = x_1^*(\pi) + x_2^*(\pi) = \alpha^- > 0$ liefert (16) $a > 0$ und $\cos b = \cos (b + \pi)$. Folglich gilt $b = 0$ und somit $x_1^*(\pi/2) + x_2^*(\pi/2) = a \cos (\pi/2) = 0 < \alpha^-$, im Widerspruch zur Zulässigkeit von (x^*, u^*). Also existieren tatsächlich t_1 und t_2 mit $0 < t_1 \leqq t_2 < \pi$ und $x_1^*(t_1) + x_2^*(t_1) = x_1^*(t_2) + x_2^*(t_2) = \alpha^+$. Darüber hinaus gilt wegen der Stetigkeit der optimalen Steuerung $\dot{x}_1^*(t_1) + \dot{x}_2^*(t_1) = \dot{x}_1^*(t_2) + \dot{x}_2^*(t_2) = 0$. Durch Einsetzen der letzten Gleichungen und $x_1^*(0) = x_1^*(\pi) = x_2^*(0) = x_2^*(\pi) = \alpha^-/2$ in (16) können die Konstanten a und b für die jeweiligen Intervalle $(0, t_1)$ und (t_2, π) bestimmt werden, und es entsteht

$$x_1^*(t) + x_2^*(t) = \begin{cases} \alpha^+ \cos (t - t_1) & \text{für } t \in [0, t_1], \\ \alpha^+ & \text{für } t \in [t_1, t_2], \\ \alpha^+ \cos (t - t_2) & \text{für } t \in [t_2, \pi], \end{cases} \tag{17}$$

$$t_1 = \pi - t_2 = \arccos \alpha^-/\alpha^+.$$

Um x_1^* und x_2^* zu bestimmen, brauchen wir jetzt noch $x_1^* - x_2^*$. Weil $H_v(t, x^*(t), u^*(t), p(t), 1) = 0$ für fast alle t ist (vgl. Satz 1), folgt aus Satz 3

$$0 = \int_0^t \mathcal{D}(z, x^*, u^*)\, dz + \int_{[0,t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (-d\mu_1 + d\mu_2)$$

und damit

$$0 = \mathcal{D}_1(t, x^*, u^*) - \mathcal{D}_2(t, x^*, u^*) = -x_1^*(t) - \dot{u}_1^*(t) + x_2^*(t) - \dot{u}_2^*(t)$$

fast überall. Das bedeutet $x_1^*(t) - x_2^*(t) = -\ddot{x}_1^*(t) + \ddot{x}_2^*(t)$ und demzufolge $x_1^*(t) - x_2^*(t) = c \sin (t + d)$ für alle $t \in [0, \pi]$, wobei c und d bestimmte Konstanten sind. Weil $x_1^*(0)$

$-x_2^*(0) = x_1^*(\pi) - x_2^*(\pi) = 0$ gilt, ist $d = 0$. Das heißt $x_1^*(t) - x_2^*(t) = c \sin t$ für alle $t \in [0, \pi]$. Durch Kombination mit (17) bekommen wir

$$x_i^*(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^+}{2} \cos(t - t_1) + \frac{1}{2} c_i \sin t & \text{für } t \in [0, t_1], \\ \frac{\alpha^+}{2} + \frac{c_i}{2} \sin t & \text{für } t \in [t_1, t_2], \\ \frac{\alpha^+}{2} \cos(t - t_2) + \frac{1}{2} c_i \sin t & \text{für } t \in [t_2, \pi] \end{cases}$$

für $i = 1, 2$, $c_1 = -c_2$, $t_1 = \pi - t_2 = \arccos \alpha^-/\alpha^+$.

Für jedes c_1 liefert die letzte Darstellung eine optimale Lösung von (15). Alle diese Lösungen entsprechen jedoch ein und derselben Lösung der ursprünglichen geometrischen Aufgabe. (Die Mehrdeutigkeit der Lösung von (15) kommt daher, daß mit der Anfangsbedingung $x_1(0) = x_2(0) = x_1(\pi) = x_2(\pi) = \alpha^-/2$ der Ursprung des Koordinatensystems zur Beschreibung des konvexen Körpers noch nicht eindeutig festgelegt wurde.) Dieses Ergebnis stimmt mit dem Resultat von Andrejewa und Klötzler [1] überein. Zum besseren Verständnis übernehmen wir von dort noch die geometrische Deutung der optimalen Lösung: Eine konvexe Figur mit maximalem Flächeninhalt bei vorgegebener Dicke α^- und vorgegebenem Durchmesser α^+ entsteht als Durchschnitt eines Parallelstreifens der Dicke α^- mit einem Kreis vom Durchmesser α^+, wobei der Mittelpunkt des Kreises in der Mitte des Streifens liegt (vgl. Abb. 6 in [1]).

LITERATUR

[1] Andrejewa, J. A., und R. Klötzler: Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen. ZAMM **64** (1984), 35–44 und 147–153.

[2] Ioffe, A. D., und V. M. Tichomirov: Theorie der Extremalaufgaben (Übers. a. d. Russ.). Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1979.

[3] Phú, H. X.: Zur Stetigkeit der Lösung der adjungierten Gleichung bei Aufgaben der optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen. Z. Anal. Anw. **3** (1984), 527–539.

[4] Phú, H. X.: Lösung einer eindimensionalen regulären Aufgabe der optimalen Steuerung mit engen Zustandsbereichen anhand der Methode der Bereichsanalyse. Optimization **16** (1985), 431–438.

[5] Phú, H. X.: Einige notwendige Optimalitätsbedingungen für einfache reguläre Aufgaben der optimalen Steuerung. Z. Anal. Anw. **5** (1986), 465–475.

[6] Phú, H. X.: Methoden der Bereichsanalyse und der Orientierungskurven zur Lösung von Aufgaben der optimalen Steuerung mit Zustandsbeschränkungen. Dissertation B. Leipzig: Karl-Marx-Universität 1987.

[7] Phú, H. X.: Solution of some high-dimensional linear optimal control problems by the method of region analysis. Int. J. Control (to appear).

Manuskripteingang: 05. 10. 1987

VERFASSER:

Dr. Hoàng Xuân Phú
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig

Ab Nov. 1987: Institute of Mathematics
P. O. Box 631 Bo Ho
10000 Hanoi, Vietnam