Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 7 (6) 1988, S. 483–493

Zur Interpretation von Meßergebnissen

G. Anger

Im Prinzip ist jedes angewandte Problem in Wissenschaft, Technik und Medizin ein inverses Problem. Es ist dies der einzigste Weg, experimentelle Ergebnisse vollständig zu analysieren. Viele Parameter, z. B. die Erdschwere, können sehr genau gemessen werden. Andererseits gibt es praktisch keine Theorie zur Bestimmung von einzelnen Koeffizienten oder des Quellterms einer Differentialgleichung aus Meßwerten. Der Autor hat bei der Beschäftigung mit inversen Problemen bei Differentialgleichungen folgende Erfahrungen gemacht: Nur in Ausnahmefällen kann ein inverses Problem eindeutig durch zusätzliche Informationen am Rand eines Gebietes gelöst werden. Als erster Schritt läßt sich die Menge aller Lösungen studieren. In einem Labor kann man versuchen, davon eine Lösung auszuwählen, die für die Anwendungen von Interesse ist. Es gibt Beziehungen zur Cantorschen Kontinuumshypothese.

В принципе каждая прикладная задача в науке, технике и медицине — обратная задача. Только такой подход позволяет провести полный анализ экспериментальных результатов. Многие параметры, как, например, сила тяжести, могут быть измерены точно. С другой стороны практически нет теории, которая позволила бы определить отдельные коэффициенты или источник дифференциального уравнения по измеряемым величинам. Опыт автора изучения обратных задач дифференциальных уравнений приводит его к следующим заключениям: только лишь в исключительных случаях обратная задача может быть однозначно решена посредством дополнительной информации на границе заданной области; в качестве первого шага следует изучить множество всех решений; в лаборатории можно попытаться выбрать решение, которое представляет интерес в приложениях. Имеются связи с континуум-гипотезой Кантора.

In principle each applied problem in science, technology and medicine is an inverse problem. It is the only complete way of analyzing experimental results. Many parameters, such as, for example, gravity can be determined very accurately. On the other hand, there is almost a complete lack of a theory which would allow the determination of individual coefficients or the source term of a differential equation from measured data. The author's experiences made in inverse problems of differential equations are the following: it is exceptional that an inverse problem can be uniquely solved by additional information on the boundary of a given domain. In general one can study the set of all solutions of an inverse problem as a first step. In a laboratory one can attempt to select a solution which is of interest in applications. There are relations to Cantor's Continuum Hypothesis.

1. Einige spezielle inverse Probleme

Im Jahre 1823 studierte H. Abel das folgende inverse Problem [17, 21]. Es besteht in der Bestimmung der Gestalt eines Berges aus der Laufzeit eines Massenpunktes. Das Teilchen gleite reibungslos auf dem Berg mit einer Anfangsenergie E. Man mißt seine Laufzeit $T(E)$, wobei vorausgesetzt wird, daß das Teilchen zurückkehrt. Kann man die Gestalt des Berges aus $T(E)$ für alle $E \leqq E_0$ bestimmen? Es bezeichne s die Bogenlänge entlang des Berges und $h(s)$ seine Höhe mit $h(0) = 0$. Weiter sei m die

Masse des Teilchens, g_0 die Erdbeschleunigung, $s(t)$ die Position des Teilchens zur Zeit t. Für seine potentielle Energie gilt $V(s) = mg_0h(s)$.
Die Bewegungsgleichung des Teilchens lautet

$$m\,\frac{d^2s(t)}{dt^2} = -\frac{dV(s)}{ds}, \qquad s(0) = 0, \qquad \frac{ds(0)}{dt} = v_0 > 0. \tag{1}$$

Multipliziert man diese mit ds/dt und integriert, so ergibt sich

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + V(s) = E, \qquad E = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{2}$$

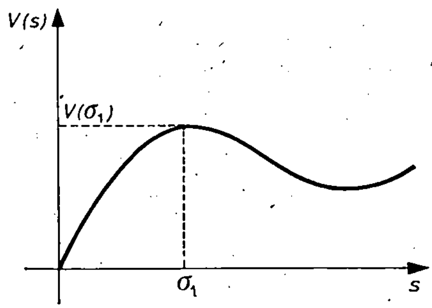

Fig. 1

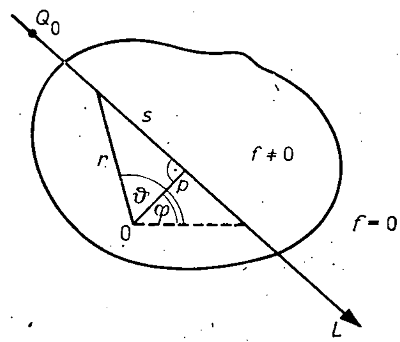

Fig. 2

Durch Auflösung von (2) nach dt kommt man zu

$$t = \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \int\limits_0^s \frac{ds'}{(E - V(s'))^{1/2}}, \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\,T(E). \tag{3}$$

Gleichung (3) stellt die Lösung der direkten Aufgabe dar. Es sei $s_1(E)$ der kleinste Wert $s = s_1$ mit $E - V(s) = 0$. Die entsprechende Laufzeit sei $T(E)/2$. Dann gilt für die Gesamtlaufzeit

$$T(E) = (2m)^{1/2} \int\limits_0^{S_1(E)} \frac{ds'}{(E - V(s'))^{1/2}} = (2m)^{1/2} \int\limits_0^E (E - V)^{-1/2}\,\frac{ds_1(V)}{dV}\,dV. \tag{4}$$

Hierbei ist $s = s_1(V)$ die Inverse zu $V = V(s)$, $0 \leqq E \leqq V(\sigma_1)$. Die Auflösung der Abelschen Integralgleichung (4) liefert [17]

$$\frac{ds_1(V)}{dV} = \frac{T(0)}{(2mV)^{1/2}} + \frac{1}{(2m)^{1/2}\,V} \int\limits_0^V (V - E)^{-1/2}\,T'(E)\,dE. \tag{5}$$

Eine Integration von (5) ergibt im Intervall $0 \leqq s \leqq \sigma_1$ die endgültige Formel

$$s_1(V) = \frac{1}{(2m)^{1/2}} \int\limits_0^V (V - E)^{-1/2}\,T(E)\,dE, \qquad 0 \leqq V \leqq V(\sigma_1). \tag{6}$$

Diese stellt die Lösung der inversen Aufgabe dar.

Ähnliche Formeln gelten für ein Teilchen, das sich in einem Potentialtopf $V(s)$ bewegt. Die direkte Aufgabe ist die Bestimmung der Schwingungsperiode $P(E)$ des Teilchens mit der Energie E. Die inverse Aufgabe besteht in der Bestimmung des Potentials $V(s)$ aus der Schwingungsperiode $P(E)$. J. B. KELLER [21] bewies, daß die inverse Aufgabe für die Abelsche Integralgleichung (4) keine eindeutige Lösung hat, falls $V(s)$ Maxima und Minima besitzt.

Auf Abelsche Integralgleichungen führen viele Probleme aus den Anwendungen [17, 19]. Hier sei kurz das Problem der Computertomographie skizziert. Das Problem wurde mathematisch bereits 1917 von J. Radon gelöst, 1963 erneut von A. M. CORMACK [13] aufgegriffen und 1973 durch G. N. Hounsfield in die Praxis umgesetzt.

Im Punkt Q_0 befinde sich eine Röntgenquelle mit der Intensität I_0. Nach Verlassen des Körpers habe sie eine Intensität I, die durch die Beziehung (Fig. 2)

$$I = I_0 \exp\left(-\int_L f(Q)\, ds\right) \tag{7}$$

gegeben ist. Damit ist das Linienintegral bekannt. Im Fall einer Dichte f, die nur vom Radius r abhängt, erhält man wegen $s^2 = r^2 - p^2$

$$\hat{f}(p) := \int_L f(Q)\, ds = 2 \int_p^\infty \frac{f(r)\, dr}{(r^2 - p^2)^{1/2}}. \tag{8}$$

Dies ist eine Abelsche Integralgleichung mit der Lösung

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{\hat{f}'(p)\, dp}{(p^2 - r^2)^{1/2}}. \tag{9}$$

Der allgemeine Fall $f = f(r, \theta)$ wird mittels Fourier-Reihen gelöst [13].

Die beiden Beispiele zeigen deutlich die Schwierigkeiten, die bei inversen Problemen auftreten. Bezeichnen wir mit g die Meßwerte (äußeren Parameter eines Problems) und mit f die zu bestimmenden Werte (innere Parameter, direkten Messungen unzugänglich), so können sowohl (4) als auch (8) formal als Gleichung erster Art

$$Af = g \tag{10}$$

geschrieben werden. Hieraus ist f zu bestimmen. Im ersten Beispiel kann es mehrere Lösungen f geben, im zweiten Beispiel ist zwar $f = A^{-1}g$ eindeutig bestimmt, hängt aber von der Ableitung g' ab. In den Anwendungen läßt sich meist nur g messen. In den Normen von L^2 oder C ist die Abbildung $g \mapsto g'$ unstetig.

Die folgenden Beispiele sollen die letzten Bemerkungen ergänzen. Wir betrachten die einfachste Differentialgleichung

$$u' = f, \qquad u(a) = 0. \tag{11}$$

Es sei $f(x) = 0$ für $x \notin [a, b]$ und f stetig auf $[a, b]$. Dann gilt

$$Af(x) := u(x) = \int_a^x f(y)\, dy = \int H(x - y)\, f(y)\, dy. \tag{12}$$

Hierbei ist H die Heaviside-Funktion, $H(z) = 1$ für $z > 0$, $H(z) = 0$ für $z \leq 0$. Aus $u(b) = c$ läßt sich f nicht eindeutig bestimmen. Es sei $G(x, y) := H(x - y)$ und $f(y) = P(y, \partial)\, \varphi := \varphi'(y)$. Dann folgt aus (12) direkt

$$\int G(x, y)\, P(y, \partial)\, \varphi(y)\, dy = \varphi(x) \tag{13}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Die in (12) definierte Zuordnung $f \mapsto Af$ ist umkehrbar eindeutig. Weiter gilt

$$f = A^{-1}u = u'. \tag{14}$$

Man erkennt an diesem Beispiel die Unstetigkeit von A^{-1} in den Normen von L^2 oder C. Bereits bei den Abelschen Integralgleichungen traten Ableitungen unter dem Integralzeichen auf. Setzt man

$$f(y) = P(y, \partial)\, \varphi(y), \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset [a_1, b_1] \subset [a, b], \tag{15}$$

und erklärt $u(x) = Af(x)$ nur für $x \notin [a_1, b_1]$, so gilt für die in (15) erklärten Funktionen

$$Af(x) = 0, \qquad x \notin [a_1, b_1]. \tag{16}$$

Der Kern der Abbildung A, d. h. alle f mit $Af(x) = 0$, $x \notin [a_1, b_1]$, besteht aus überabzählbar vielen f. Diese Aussage findet man oft bei inversen Problemen [4, 6].

Es sei jetzt $P(x, \partial)\, u := -\Delta u$ der Laplace-Operator. Seine Grundlösung G_{L} ist im Fall $n \geqq 3$ der Newtonsche Kern, im Fall $n = 2$ der logarithmische Kern. Der Kern G_{L} genügt ebenfalls der Beziehung (13). Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ eine offene Menge und ferner $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$. Dann gilt $\varphi(x) = 0$ für $x \notin \Omega$. Somit folgt aus (13)

$$\int G_{\mathrm{L}}(x, y) \left(-\Delta\varphi(y)\right) dy = \int G_{\mathrm{L}}(x, y)\, f(y)\, dy = 0, \qquad x \notin \Omega. \tag{17}$$

Definiert man G_{L} nur auf $(\mathbf{R}^n \setminus \Omega) \times \Omega$ und setzt

$$Af(x) := \int G_{\mathrm{L}}(x, y)\, f(y)\, dy, \tag{18}$$

so folgt aus (17) die Existenz von überabzählbar vielen $f = -\Delta\varphi$ mit $Af = 0$. Diese Tatsache gilt für jeden linearen Differentialoperator $P(x, \partial)\, u$, der eine lokalintegrierbare Grundlösung G besitzt. Im Fall der Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{19}$$

spricht man bei Dichten f, die (17) bezüglich des Kernes G der Helmholtz-Gleichung genügen, von *nichtabstrahlenden* Dichten. Dies ist ein allgemeines Prinzip bei Differentialgleichungen, in der Theorie der Integralgleichungen kaum beachtet. Ursache hierfür ist die Tatsache, daß man bei Differentialgleichungen die rechte Seite oder gewisse Koeffizienten aus Messungen auf $\partial\Omega$ auf Ω ohne wesentliche Zusatzinformationen nicht eindeutig bestimmen kann [3, 6, 7].

Das Problem der Koeffizientenbestimmung soll jetzt kurz erläutert werden. Wir verwenden dazu die einfache Differentialgleichung

$$u' - \left(q(x) + \varphi(x)\right) u = 0, \qquad u(a) = u_0. \tag{20}$$

Hierbei sind q und φ integrierbare Funktionen. Die Lösung von (20) ist

$$u(x) = u_0 \exp\left(\int_a^x \left(q(y) + \varphi(y)\right) dy\right).$$

Es sei $\varphi = 0$ und $q = q_0 = \text{const}$. Dann gilt $u(x) = u_0 \exp\left(q_0(x - a)\right)$. Mittels einer Messung im Punkt $x^0 \neq a$ kann q_0 eindeutig bestimmt werden. Es gilt $q_0 = (x^0 - a)^{-1} \times \log\left(u(x^0)/u_0\right)$. Man sieht, daß der Zusammenhang zwischen q_0 und $u(x^0)$ streng nichtlinear ist, eine große Schwierigkeit für die Numerik. Weiter können kleine Änderungen von $u(x^0)$ in der Nähe von a große Änderungen von q_0 hervorrufen [29]. Im folgenden gelte für φ

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [a_1, b_1] \subset [a, b] \quad \text{und} \quad \int \varphi(x)\, dx = 0.$$

Bezeichnet v die Lösung von (20) für $\varphi = 0$, so gilt $u(x) = v(x)$ für $x \notin [a_1, b_1]$. Speziell für $q = 0$ und $u(0) = 1$ erhält man $u(x) = \exp\left(\int_0^x \varphi(y)\, dy\right)$. Hieraus folgt

$$\int_0^x \varphi(y)\, dy = \log u(x) \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Aus der Kenntnis von u außerhalb $[a_1, b_1]$ ist es nicht möglich, alle Werte von φ zu berechnen. Für inverse Probleme sind die vorliegenden Differentialgleichungen zu scharf formuliert. Es dürfte nützlich sein, gewisse Mittelwerte

$$c_k := \int_{a_k}^{a_{k+1}} \varphi(y)\, dy, \qquad a_1 < a_2 < \cdots < a_N,$$

einzuführen und diese aus Messungen zu bestimmen.

Die Hochtechnologie verlangt dringend die Lösung inverser Aufgaben. Während früher in den Ingenieurwissenschaften die Simulation dominierte, ist man jetzt immer mehr an der Struktur der inneren Materialparameter interessiert. Unter Simulation versteht man dabei folgendes: Man nimmt die Koeffizienten und die rechte Seite der Differentialgleichung sowie Anfangs- und Randwerte als bekannt an und berechnet die Lösung u. In Abhängigkeit der Koeffizienten und der rechten Seite wird das Verhalten von u studiert. Interessante Lösungen finden dann eine ingenieurtechnische Umsetzung. Bei diesen Aufgaben hat man gewisse Freiheitsgrade für die inneren Parameter. In der Geophysik und Medizin haben sich solche Herangehensweisen kaum bewährt, da *genau eine* Lösung für die inneren Parameter zu bestimmen ist [5]. Eine genaue Analyse der Aufgabenstellungen in Wissenschaft, Technik und Medizin zeigt, daß die Interpretation der Natur stets invers zu erfolgen hat [6, 7, 12]. Speziell finden Studenten, wenn sie die Universität verlassen, in der Industrie meist inverse Probleme vor [12].

In den folgenden Ausführungen sollen die Erfahrungen zusammengestellt werden, die der Autor bei der Beschäftigung mit inversen Problemen während der vergangenen 17 Jahre gesammelt hat. Diese Ausführungen geben weiterhin eine gewisse Antwort auf die in [27] aufgeworfenen Fragen.

2. Einige Ergebnisse der Physik

In den Anwendungen steht die Aufgabe der Interpretation experimenteller Ergebnisse. Viele physikalische Parameter f können nicht direkt gemessen werden. Man kennt nur ihre Wirkung g. Zwischen f und g bestehen physikalische Gesetze, die formal als Gleichung erster Art $Af = g$ geschrieben werden können. Aus dieser Gleichung ist f zu bestimmen. Im einfachsten Fall ist A eine Matrix. Integraloperatoren haben eine kompliziertere Gestalt, da sie auf dem Kontinuum erklärt sind und zu deren Studium unendlichdimensionale Funktionalräume notwendig sind [17].

An jedem Ort und zu jeder Zeit gelten gleichzeitig alle Naturgesetze, von denen unter speziellen Bedingungen einige dominant sind. Nach dem heutigen Wissensstand der Physik gibt es *nur vier* verschiedene Arten von Kräften. Auf *elektromagnetischen Kräften* und *Gravitationskräften* beruhen die meisten Anwendungen der Physik im Alltag. Wendet man sich der Kernphysik zu, werden *Kernkräfte* und *Kräfte der schwachen Wechselwirkung* bedeutsam.

Bisher sind mehr als sieben Millionen chemische Verbindungen bekannt. Weiterhin vermutet man auf der Erde die Existenz von ca. einhundert Milliarden unterschiedlicher Proteine. Hieraus folgt das Vorhandensein einer sehr großen Anzahl verschiedener Materialparameter. Mit Supercomputern kann man zur Zeit physikalische Eigenschaften von Systemen berechnen, die höchstens aus 1000 Teilchen bestehen [16]. Im Weltall enthält ein Kubikzentimeter ein Atom. Das Ultrahochvakuum enthält $10^5 - 10^{11}$ Atome/cm^3. Gase enthalten 10^{16} Atome/cm^3, Festkörper 10^{23} Atome/cm^3. In nächster Zeit wird es kaum möglich sein, mit Hilfe von Computern das physikalische Verhalten von Stoffen im voraus zu berechnen. Vom praktischen Standpunkt aus kann man nur gewisse Phenomene, die Mittelwerte über die atomaren

Strukturen sind, beschreiben und messen. Hierzu gehören unter anderem Masse, Temperatur, Festigkeit, Leitfähigkeit, elektrischer Widerstand, Kapazität usw., die als Koeffizienten bzw. als rechte Seite in die Differentialgleichungen eingehen. Die Werte dieses Materialparameter können nur experimentell bestimmt werden. Die klassische Physik beschreibt im wesentlichen solche Phenomene. Allerdings werden die atomaren Strukturen immer häufiger in die phänomenologischen Gleichungen einbezogen, eine Forderung der Hochtechnologie. Bekannt sind diese Dinge in der Mikroelektronik.

An dieser Stelle seien einige Bemerkungen zur Interpretation der Natur mittels der gewonnenen Meßergebnisse angebracht. Mit Hilfe weniger Messungen soll auf die atomaren Strukturen geschlossen werden, welche nur durch eine überdurchschnittlich große Anzahl geometrischer und physikalischer Parameter beschrieben werden können. Vom praktischen Standpunkt aus kann man die zu bestimmenden Parameter als unendlich annehmen. Der Mathematiker hat zur Behandlung solcher Probleme die Menge **R** der reellen Zahlen eingeführt, die *nichtabzählbar* ist. Dadurch entsteht eine Idealisierung der Fragen, die vom mathematischen Standpunkt aus zusätzliche Schwierigkeiten mit sich bringt. Am Schluß dieses Artikels gehen wir näher darauf ein.

3. Beschreibung physikalischer Prozesse unter Verwendung von Differentialgleichungen

Ein spezielles Problem der Physik wird durch ein großes System von Differentialgleichungen oder anderer Gleichungen beschrieben. Seine Koeffizienten und die Quellen (rechte Seite) sind innere Materialparameter, die Messungen unzugänglich sind. In diesem Fall besteht f aus den Koeffizienten oder den Quellen. Die Lösungen von Differentialgleichungen genügen dabei gewissen Anfangs- und Randbedingungen. Der Zusammenhang zwischen f und g wird über die Differentialgleichungen hergestellt, wobei in diesem Fall der Operator A eine äußerst komplizierte Gestalt hat [6, 7, 29, 30].

Um ein großes System von Differentialgleichungen lösen zu können, muß es wesentlich vereinfacht werden. Derselbe Sachverhalt entsteht, wenn die Modellierung zu grob vorgenommen wird. Weiter sind Messungen oft nur außerhalb einer offenen Menge, wie z. B. in Geophysik und Medizin, möglich. Hieraus ergeben sich innere Mehrdeutigkeiten, d. h., verschiedene innere Parameter f erzeugen dieselben Meßwerte g [1, 7]. Bei festem g ist die Menge aller f mit $Af = g$ oft nichtabzählbar. Vom Informationsinhalt her kann man als ersten Schritt nur die Menge aller dieser f einführen und studieren [1, 3]. Durch Hinzunahme weiterer mathematischer und physikalischer Informationen ist zu versuchen, die Lösungsmenge einzuschränken bzw. genau ein Lösungselement auszuwählen. Bei einer Matrix A liegt im Fall $\det A = 0$ ein vollständiger Überblick über die Lösungsmengen vor. Weiter gibt es hier Vorschriften zur Berechnung spezieller Lösungen [31]. Oft ist die Eindeutigkeit der zu bestimmenden Koeffizienten gesichert, wenn diese nur von einer Variablen abhängen [22, 23, 26] oder analytische Funktionen sind [15]. In einigen Fällen gelingt ein Studium des inversen Problems, falls die Koeffizienten oder die rechte Seite von der Lösung u [25] oder dem Gradienten von u abhängen [22], da in diesen Fällen der Informationsgehalt der zu bestimmenden Größen geringer ist.

Neuerdings haben Mathematiker festgestellt, daß ein spezielles inverses Problem für Gebiete mit glattem Rand eindeutig lösbar ist, während es für ein Quadrat keine eindeutige Lösung gibt [25]. Man sieht daran, daß bei inversen Problemen die Geometrie wesentlichen Einfluß auf die Eindeutigkeit haben kann.

Sind die Lösungen einer linearen Differentialgleichung im ganzen Raum bekannt, so ist der Differentialoperator eindeutig bestimmt [11]. Die Massenverteilungen sind ebenfalls eindeutig bestimmt, falls deren Potentiale im ganzen Raum bekannt sind [1, 7]. Da bei inversen Problemen ein großer Informationsmangel vorliegt, ist die Beherrschung der entsprechenden Prozesse notwendig. Hierzu gehören vor allem experimentelle Erfahrungen, da diese am Gesamtsystem erzielt werden.

Inverse Probleme in der Optik lassen sich relativ einfach formulieren und verstehen. Das direkte Problem der Optik besteht darin, die Emission oder Streuung sowie die Ausbreitung von Strahlung auf der Basis bekannter Quellen- oder Streukörperbeschaffenheit zu berechnen. Das inverse Problem dagegen ist die Bestimmung der Merkmale von Quellen, Streukörpern oder Ausbreitungsmedien aus der vom Detektor empfangenen Strahlung. Eine intuitive Lösung des inversen Problems ist uns allen wohlbekannt. Wir leiten Größe, Form, Oberflächenbeschaffenheit und Materialstruktur eines Objektes aus der mit unseren Augen wahrnehmbaren Streuung und Absorption des Lichtes ab. Dabei ist zu beachten, daß unser Auge eine äußerst komplizierte Struktur aufweist. Zur Identifikation der Objekte werden wesentliche Zusatzinformationen verwendet, die im Hirn gespeichert sind. Sobald jedoch optische Information über den visuellen Eindruck hinaus verlangt wird oder optische Information durch automatische elektro-optische Geräte analysiert werden soll, ist die Intuition durch mathematische Rekonstruktion, d. h. der Lösung inverser Probleme, abzulösen [8]. Diese Gedanken gelten praktisch für alle physikalischen Vorgänge.

Die meisten inversen Probleme bei Differentialgleichungen lassen keine eindeutige Lösung zu [6, 7]. Ursache hierfür ist der zu große Informationsinhalt der Koeffizienten bzw. der rechten Seite, d. h., aus Messungen auf einer zweidimensionalen Fläche bzw. in endlich vielen Punkten soll auf eine dreidimensionale Abhängigkeit der Materialparameter geschlossen werden. Aus diesem Grund ist man auf die Simulation angewiesen. Man nimmt gewisse innere Parameter f als bekannt an und berechnet deren Bild $Af = g$. Die Berechnung von Af, als direkte Aufgabe bezeichnet, bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Der Operator A ist oft mit Hilfe eines quadratisch integrierbaren Kerns darstellbar, woraus die Kompaktheit von A folgt. Das bedeutet, daß im Bildraum von A jede unendliche Menge eine konvergente Teilfolge $Af_{k'} \to Af_0$ enthält. Daraus folgt die Approximierbarkeit von A durch endlichdimensionale Operatoren A_n. Auf dieser Eigenschaft beruhen viele numerische Näherungsverfahren [10, 20, 29].

4. Weitere Ausführungen zur inversen Problematik

Bei einer Analyse der Erfolge von Wissenschaft und Technik kommt man zu folgendem Ergebnis: Die meisten physikalischen Gesetze wurden bei Versuchen in Labors entdeckt. Hierbei werden viele physikalische Parameter konstant gehalten. Dabei ist zu beachten, daß die Mathematik oft erst ab einer gewissen Stufe in die Untersuchungen einbezogen werden kann. Die inneren Parameter vieler verwendeter Materialien, z. B. von Stahl, Silizium, organischen Substanzen usw. sind nur rein experimentell zu gewinnen. Die an dieser Stelle einsetzende Möglichkeit der Verwendung der Mathematik kann vielleicht als weiterverarbeitende Stufe gekennzeichnet werden. Um Produkte gleicher Qualität herstellen zu können, werden Mineralien aus derselben Lagerstätte, dieselbe Verarbeitung sowie die gleichen Anwendungen benötigt. Dieses gilt insbesondere für alle biologischen Systeme, die von höchster Komplexität sind.

Verläßt man Labors und untersucht das Verhalten von offenen Systemen wie das Weltall, die Atmosphäre, biologische Strukturen, das Innere der Erde usw., so bestehen folgende Tatsachen: In diesen Systemen können sich gleichzeitig viele Parameter ändern. — nur Teileffekte sind meßbar. Eine Vorhersage über das Verhalten eines solchen Systems ist unsicher. Der Wissenschaftler ist auf praktische Erfahrungen am komplexen System angewiesen. So spielen in der Biologie die Bioindikatoren eine zentrale Rolle. In der Medizin muß zur Diagnostik neben den Meßdaten, die in Labors erzielt wurden, der menschliche Körper als Bioindikator herangezogen werden.

Laufend werden neue Produkte hergestellt, deren materialmäßiges Verhalten teilweise nicht bekannt ist. Unter Verwendung von leistungsfähigen Computern bewährt sich folgende ingenieurtechnische Herangehensweise: Das Material, z. B. Stahlrohre, wird vor Inbetriebnahme einer technischen Einrichtung mit Hilfe von Ultraschallgeräten oder anderen Geräten geprüft und deren Daten registriert. Nach Inbetriebnahme des Prozesses werden in gewissen Zeitabständen die Kontrollen wiederholt. Auf diese Weise erhält man Daten, die vergleichbar sind. Somit sind Veränderungen des Materials in gewissem Umfang registrierbar. Wir weisen an dieser Stelle nochmals darauf hin, daß bei inversen Problemen *verschiedene* innere Parameter *dieselben* Meßwerte erzeugen können. Die verschiedenen inneren Parameter mit gleichen Meßwerten können sowohl den normalen Zustand als auch wesentliche Abweichungen davon angeben.

Die Ströme des Herzens bzw. die Ströme des Hirns werden durch die Maxwellschen Gleichungen beschrieben [6, 18]. Nach vorangegangenen Ausführungen läßt eine Messung dieser Ströme auf der gesamten Körperoberfläche keine eindeutige Bestimmung der inneren Parameter zu. In der Medizin vergleicht man ein neu angefertigtes EKG mit anderen EKG, deren Interpretation bekannt ist. Da es zu jedem g unendlich viele f mit gleichem g geben kann, ist diese Schlußweise oft fraglich [5].

Im täglichen Leben haben wir uns laufend mit inversen Problemen auseinanderzusetzen. Auf die Erkennung der Natur mittels optischer Informationen haben wir bereits hingewiesen. Im Prinzip gilt dasselbe für akustische Informationen und andere Prozesse, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Die folgenden Ausführungen sind uns so gut bekannt, daß wir uns darüber keine Gedanken mehr machen. Mit Hilfe einer Waage — zum Vergleich wird das Gravitationsfeld herangezogen — kann man nur die Masse eines Körpers, aber nicht seine Geometrie sowie seine physikalische Zusammensetzung bestimmen. Auch die Messungen vieler anderer physikalischer Parameter sind von dieser Art. Diese einzelnen Größen haben nur Bedeutung bei der Weiterverarbeitung des Materials. Alle inneren Parameter sind durch den Herstellungsprozeß bestimmt. Man könnte noch viele einfache inverse Probleme angeben, die keine eindeutige Lösung zulassen.

Eine Gerade durch einen Punkt ist nicht eindeutig bestimmt. Es gibt so viele Geraden durch einen Punkt, wie reelle Zahlen existieren. Betrachtet man im $\mathbf{R}^3$ alle $x = (x_1, x_2, x_3)$ mit $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, so gibt es wegen Informationsmangel kein eindeutig bestimmtes x. Hier ist

$$\det A = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Wir haben bereits mehrfach darauf hingewiesen, daß eine Gleichung erster Art $Af = g$ nichtabzählbar viele Lösungen f mit gleichem Bild g haben kann [4, 6, 25]. An dieser Stelle kommt die Aussage der Cantorschen Kontinuumshypothese zum tragen. Vor bereits hundert Jahren versuchte G. Cantor, der an der Martin-Luther-Universität Halle wirkte, zu beweisen, daß jede unendliche Menge reeller Zahlen entweder auf die Menge $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen oder die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen umkehrbar eindeutig abgebildet werden kann. Nach K. Gödel (1930—1936) und

P. Cohen (1963) ist mit den in der Analysis verwendeten Hilfsmitteln diese Aussage weder beweisbar noch widerlegbar [14]. Ähnliche Aussagen gelten für viele inverse Probleme. Ohne wesentliche Zusatzannahmen sind viele dieser Probleme nicht entscheidbar. Dabei müssen diese Zusatzannahmen aus dem Experiment kommen bzw. gewisse A-priori-Annahmen mit Hilfe von Experimenten als richtig nachgewiesen werden. Trotzdem lassen sich für solche nicht entscheidbaren Aufgaben tiefliegende Strukturuntersuchungen anstellen, die für weitere Untersuchungen von grundsätzlicher Bedeutung sein können. Bei inversen Problemen muß man oft von deren *mathematischen Entscheidbarkeit Abstand nehmen.*

5. Fragen der Weiterentwicklung der Mathematik

Da bei den Gleichungen der mathematischen Physik von endlich vielen Messungen auf das Kontinuum, genauer auf $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{R}^3$ geschlossen werden muß, sollte in Zukunft eine Mathematik unter Hinzunahme der Aussagen von Experimenten entwickelt werden. In der bisherigen Mathematik gelingt dieser Schluß auf das Kontinuum unter Verwendung von Potenzreihen, von kompakten Mengen (kompakten Operatoren) sowie in der Wahrscheinlichkeitstheorie unter Verwendung von a priori vorgegebenen Verteilungsfunktionen [4, 6, 7]. Grob gesprochen lassen sich die bisherigen Ergebnisse der Mathematik auf dem Gebiet der mathematischen Analysis ansehen als eine Theorie metrischer Räume, auf denen Gleichungen zweiter Art $Af + f = g$ studiert werden [7]. Ist A ein kompakter Operator, so existieren zu festem g nur endlich viele $f \neq 0$ mit $Af + f = g$. Dies ist der wesentliche Unterschied zu den Gleichungen erster Art [29]. Probleme der Spektraltheorie sind eng verknüpft mit Gleichungen zweiter Art. Aus diesem Grund haben inverse Spektralprobleme einen höheren Entwicklungsstand erreicht als die übrigen inversen Probleme [6, 7, 28]. In zunehmendem Maße werden Ergebnisse über inverse Spektralprobleme für direkte Aufgaben bei nichtlinearen Differentialgleichungen verwendet [6, 7].

In komplexen Systemen ist folgende Grundfrage nur in Sonderfällen bekannt: Welche äußeren Parameter g des Systems sollen gemessen werden, so daß gewisse innere Parameter f eindeutig und stabil bestimmt werden können [2, 3, 9]? Dabei sind für die inneren Parameter gewisse Mittelwerte einzuführen. Hieraus ergeben sich weitreichende Konsequenzen bei der Interpretation der Natur. Das Arbeiten mit Dichten als Koeffizienten und als rechte Seite einer Differentialgleichung ist für direkte Aufgabenstellungen sinnvoll, da vom verwendeten Material oft genügend viele Informationen vorliegen. Bei inversen Problemen jedoch muß man sich — je nach vorliegenden Informationen — mit weniger Aussagen zufriedengeben. In einem gewissen Sinne ist der Aussageinhalt einer Differentialgleichung zu reduzieren. Dabei sollte man gewisse charakteristische Größen finden, mit denen physikalische Entscheidungen möglich sind. Grundlage dieser Untersuchungen dürfte die moderne Strukturmathematik sein. Im Fall von linearen elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bietet sich dazu die moderne Potentialtheorie an. Solche Fragen sollten in Zukunft studiert werden [3, 11].

Die folgenden Hinweise dürften für die Beschäftigung mit angewandten Problemen von Nutzen sein. Die meisten mathematischen Modelle, die in den Anwendungen verwendet werden, sind im 18. und 19. Jahrhundert entwickelt worden. Wegen des geringen Entwicklungsstandes der Mathematik in diesen Jahrhunderten sowie des Nichtvorhandenseins von leistungsfähigen Computern wurden diese Modelle sogar noch vereinfacht. In der vereinfachten Form sind diese oft in die mathematische Grundlagenforschung eingegangen. Die Mathematiker haben seit hundert Jahren sehr viele tiefliegende innermathematische Ergebnisse erzielt, die für die Anwendungen bereitstehen. Hierzu muß eine den jetzigen Anforderungen von Wissenschaft und Technik entsprechende Modellierung erarbeitet sowie die Beziehungen zur Strukturmathematik hergestellt werden. Die inversen Probleme stehen dabei an zentraler Stelle. Viele Teile der Mathematik müssen weiterentwickelt werden.

Zu den voranstehenden Betrachtungen sind zusätzlich stets stochastische Untersuchungen anzustellen sowie eine numerische Realisierung zu versuchen [10, 20, 29]. Einen historischen Überblick über inverse Probleme findet der Leser in [6, 8, 10, 13]. Die systematische Anwendung voranstehender Ausführungen auf die einzelnen Prozesse in Wissenschaft, Technik und Medizin dürfte zu neuen Erkenntnissen und zu *großen ökonomischen Einsparungen* führen.

Unter Verwendung der Strukturmathematik läßt sich oft die Menge aller Lösungen eines inversen Problems charakterisieren [1, 3, 6, 7]. Hierbei ergeben sich neue Lösungen, die für die Anwendung von grundsätzlicher Bedeutung sein können. Einsparungen ergeben sich unter anderem bei der richtigen Analyse des Verhältnisses Theorie—Praxis. Viele Prozesse bleiben auch in Zukunft rein experimentell. Es dürfte sich kaum lohnen, die Gleichungen der mathematischen Physik bei der Herstellung von Materialien einzusetzen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Anger, G.: Lectures on potential theory and inverse problems. Geodät. und Geophys. Veröff. (Reihe III) **45** (1980), 15—95.

[2] Anger, G.: On the relationship between mathematics and its applications: A critical analysis by means of inverse problems. Inverse Problems **1** (1985), L7—L11.

[3] Ангер, Г. (Anger, G.): Нерешенные проблемы в теории обратных задач. В книге: Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды междунар. Конф. по дифф. урав. с частн. произв. Новосибирск 1983. Новосибирск: Изд-во Наука 1986, 17—31 (Engl. Original: Karl-Marx-Stadt: Inst. Mech. Acad. Sci. GDR, Preprint 04/84).

[4] Anger, G.: Inverse problems: examples, counterexamples, consequences for the applications. In: Mathematical Methods of Solutions of Inverse Problems of Geophysical Fields (Ed.: M. Škorvanek). Bratislava (ČSSR): Geophys. Inst. Slovak. Acad. Sci. 1987, 7—20.

[5] Anger, G.: Zur Diagnostik in Wissenschaft, Technik und Medizin. In: Fracture Mechanics, Micromechanics, Coupled Fields (Ed.: B. Michel): Vol. **38**, 14—29. Karl-Marx-Stadt: Inst. für Mech. Akad. Wiss. DDR 1987.

[6] Anger, G.: The information content of an inverse problem: a theory of equivalence classes. Indianapolis J. Math. and Phys. (to appear).

[7] Anger, G.: Inverse problems in differential equations. Berlin: Akademie-Verlag (to appear).

[8] Baltes, H. P. (ed.): Inverse scattering problems in optics (Topics in Current Physics: Vol. 20). Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer-Verlag 1981.

[9] Balzer, W.: Theorie und Messung. Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer-Verlag 1985.

[10] Beck, J. V., Blackwell, B., and C. R. S. Clair: Inverse heat conduction. Ill-posed problems. New York—Toronto—Singapore: Wiley Intersci. 1985.

[11] Bliedtner, J., and W. Hansen: Potential theory. An analytic and probalistic approach to balayage. Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer-Verlag 1986.

[12] Bolt, B.: What can inverse theory do for applied mathematics and the sciences. Austral. Math. Soc. Gaz. **7** (1980), 69—78.

[13] Cormack, A. M.: Computed tomography: Some history and recent development. In: Computed tomography (Ed.: L. A. Shepp) (Proc. Symposia Appl. Math.: Vol. 27). Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. 1982.

[14] DAHN, B. I.: Zwei Wegbereiter der modernen Logik: Alfred Tarski (1901—1983) und Kurt Gödel (1906—1978). Wissenschaft und Fortschritt (1986) 12, 324—326.
[15] DÜMMEL, S., and S. HANDROCK-MEYER: Uniqueness of the Solution of an Inverse Problem for a Quasilinear Parabolic Equation in Divergence Form. Z. Anal. Anw. 7 (1988), 241—246.
[16] DUPUIS, M. (ed.): Supercomputer simulations in chemistry (Lecture Notes in Chemistry: Vol. 44). Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer-Verlag 1986.
[17] FENYÖ, I., und H. W. STOLLE: Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen III. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1983.
[18] FRANZONE, P. C.: Some inverse problems in electrocardiology. In: Numerical Treatment of Inverse Problems in Differential and Integral Equations (Eds: P. Deuflhard and E. Hairer) (Progress in Scientific Computing: Vol. 2). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1983.
[19] GORENFLO, R., and S. VESSELLA: Abel integral equations: Applications and analytic properties. Preprint. Berlin (West): Freie Universität, Preprint 236 (1986).
[20] HOFMANN, B.: Regularization for applied inverse and ill-posed problems. A numerical approach (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 85). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1986.
[21] KELLER, J. B.: Inverse problems. Amer. Math. Monthly 83 (1976), 107—118.
[22] KLEINE, E.: On the Identification of the Adiabatic Equation of State in Compressible Gas Flow. Z. Anal. Anw. 7 (1988), 557—562.
[23] LAVRENT'EV, M. M., REZNITSKAYA, K. G., and V. G. YAKNO: One-dimensional inverse problems of mathematical physics. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. 1986.
[24] PILANT, M. S., and W. RUNDELL: An inverse problem for a nonlinear parabolic equation. Comm. Part. Diff. Equ. 11 (1986), 445—457.
[25] PILANT, M. S., and W. RUNDELL: A uniqueness theorem for determining conductivity from overspecified boundary data. J. Math. Anal. Appl. (to appear).
[26] РОМАНОВ, В. Г., КАБАНИХИН, С. И., и Т. А. ПУХНАЧЕВА: Обратные задачи электродинамики. Новосибирск: Сиб. отд-ие Акад. Наук СССР 1984.
[27] SCHELER, W.: Stellung und Aufgaben der Mathematik bei der Entwicklung von Wissenschaft und Technik in unserer Gesellschaft. In: Materialien der Wissenschaftlich-methodischen Konferenz Mathematik. Mitt. Math. Ges. DDR (1984) 2/3, 5—41.
[28] TALENTI, G. (ed.): Inverse problems. (Papers 1st 1986 session Centro Int. Mat. Estivo held in Montecatini Terme, May 28—June 5, 1986.) Lect. Notes Math. 1225 (1987), 1—204.
[29] TIKHONOV, A., and V. ARSENIN: Solutions of ill-posed problems. Washington, D. C.: V. H. Winston & Sons, and New York—Toronto—London: John Wiley & Sons 1977.
[30] TIKHONOV, A., and A. GONCHARKII: Ill-posed problems in natural sciences. Moscow: Mir 1987.
[31] ZIELKE, G.: Verallgemeinerte inverse Matrizen. In: Jahrbuch Überblicke Math. 1983. Mannheim—Zürich—Wien: Bibliogr. Inst. 1983, 95—116.

Manuskripteingang: 24. 11. 1987

VERFASSER:

Prof. Dr. GOTTFRIED ANGER
Sektion Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg
Universitätsplatz 6
DDR-4010 Halle