

Zur Entwicklung von Randintegralgleichungen für eine Aufgabenklasse der mathematischen Physik

H. GRÜNDEMANN

Ausgehend von den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik wird für eine Aufgabenklasse der Mechanik ein einheitliches Randwertproblem entwickelt. Als Lösungsmethode wird ein Zugang über Randintegralgleichungen beschrieben. Besondere Betonung erfährt die Berechnung der Fundamentallösungen.

Исходя из основных уравнений сплошной среды развивается общая краевая задача для некоторого класса задач механики. Как метод решения описывается подход через граничные интегральные уравнения. Особое ударение дается вычислению фундаментальных решений.

Based upon basic equations of continuum theory for a scope of mechanical problems a unified boundary value problem is derived. A general boundary integral solution procedure for this problem is presented. Special emphasis is taken to computational aspects of fundamental solutions.

1. Einleitung

Unser Ziel ist, für eine umfangreiche Aufgabenklasse der mathematischen Physik eine Lösungsstrategie auf der Basis von Randintegralgleichungen zu entwickeln. Der Schwerpunkt liegt dabei in der Konstruktion der Fundamentallösungen für diese Aufgabenklasse. Diese sind gleichzeitig die Kerne der auftretenden Potentiale der einfachen und doppelten Schicht sowie des Volumens [5]. Die Verfügbarkeit der Fundamentallösungen und damit die Aktualisierbarkeit der Randintegralgleichungen bilden letztlich die Voraussetzung für die numerische Lösung von Randwertproblemen nach der Randelementmethode [1, 2]. Diese Methode hat in den letzten Jahren als alternatives Berechnungsverfahren zur Methode der finiten Elemente an Bedeutung gewonnen. Der Vorteil der Randelementmethode gegenüber gebietsorientierten Diskretisierungsmethoden (wie z. B. der Methode der finiten Elemente) liegt darin, daß nur der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ eines Gebietes Ω zu diskretisieren ist, in dem das gestellte Randwertproblem definiert ist. Im Abschnitt 2 wird, ausgehend von den Beziehungen der Kinematik, den Bilanz- und Materialgleichungen ein Randwertproblem der mathematischen Physik entwickelt, wobei die Differentialgleichung in Divergenzform auftritt. Im Mittelpunkt des Abschnitts 3 steht die Konstruktion von Fundamentallösungen. Als Ergebnis entstehen Ausdrücke, die direkt numerisch auswertbar sind. Schließlich wird im Abschnitt 4 die zum Randwertproblem äquivalente Randintegralformulierung angegeben. Das Hauptaugenmerk liegt stets in der technischen Ausführung und auf Aspekten der direkten Berechenbarkeit. Deshalb wurde bewußt auf die Einführung entsprechender Funktionenräume für die verwendeten Größen verzichtet. Bezüglich einer detaillierten funktionalanalytischen Untersuchung sei z. B. auf die Monografie von KUPRADSE [5] verwiesen. Die dort praktizierte Methodik ist unmittelbar auf die hier beschriebene Aufgabenklasse übertragbar.

2. Grundgleichungen und Randwertprobleme

Gegeben sei ein Gebiet Ω aus dem dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 , welches durch einen stückweisen glatten Rand Γ begrenzt ist (Γ sei die Vereinigung endlich vieler Ljapunov-Ränder). Das Gebiet Ω kann sowohl endlich als auch unendlich sein. Vorausgesetzt wird aber, daß der Rand Γ endlich ist. In jedem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \Omega$ sind die Größen $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = (U_i(\mathbf{x}))$, $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_j(\mathbf{x}))$ und $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = (S_j(\mathbf{x}))$ ($i = 1, \dots, q$; $j = 1, \dots, p$) zu bestimmen, die den physikalischen Zustand eines Körpers beschreiben, der das Gebiet Ω einnimmt und der unter dem Einfluß vorgeschriebener Werte auf dem Rand Γ und im Gebiet Ω steht. Im Rahmen einer linearen Theorie und unter den Bedingungen der Statik resultieren aus der Kontinuumsmechanik deformierbarer Medien [4, 8] folgende drei Klassen von Grundgleichungen, die das physikalische Verhalten des Körpers beschreiben:

1. *Verallgemeinerte kinematische Beziehung.* Durch diese wird ein Zusammenhang zwischen den Größen $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ gemäß $E_j(\mathbf{x}) = B_{ji}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot U_i(\mathbf{x})$ ($j = 1, \dots, p$) hergestellt. In kompakter Form geschrieben erhält man

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Um den angegebenen Matrix-Differentialausdruck $\mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}})$ exakt zu definieren, wird die Matrix $\mathbf{B}(\boldsymbol{\xi})$ zunächst in Abhängigkeit von dem anonymen Vektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ eingeführt:

$$B_{ji}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 0 & (i = 1, \dots, q) \\ \xi_k, k = 1, 2 \text{ oder } 3 & (j = 1, \dots, p) \end{cases}.$$

Im Fall $\boldsymbol{\xi} = \nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T$, wobei zur Abkürzung $\partial_k = \partial/\partial x_k$ gesetzt wurde, sind die Komponenten von $\mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}})$ wieder entweder null oder durch das Differentiationsymbol ∂_k in eine bestimmte Koordinatenrichtung k besetzt. Soll nun mit einer nachfolgenden vektorwertigen Größe $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_i(\mathbf{x}))$ „multipliziert“ werden, so ist diese Operation im Sinne einer Differentiation der entsprechenden Komponenten von $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ zu interpretieren, was durch einen Punkt zwischen $\mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ zum Ausdruck gebracht wird. Die Komponenten von $\mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$ haben dementsprechend die Form

$$[\mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})]_j = \sum_{i=1}^q B_{ji}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot A_i(\mathbf{x})$$

mit

$$B_{ji}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot A_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } B_{ji}(\nabla_{\mathbf{x}}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_k} A_i(\mathbf{x}) & \text{für } B_{ji}(\nabla_{\mathbf{x}}) = \partial/\partial x_k. \end{cases}$$

2. *Bilanzgleichung.* Die allgemeine Form der Bilanzgleichung lautet

$$B_{ji}(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot S_j(\mathbf{x}) + f_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, \dots, q)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{B}^T(\nabla_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2)$$

Dabei sind $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_i(\mathbf{x}))$ vorgegebende Volumenkräfte, und $\mathbf{B}^T(\nabla_{\mathbf{x}})$ steht für die zu $\mathbf{B}(\nabla_{\mathbf{x}})$ transponierte Matrix.

3. *Constitutive Beziehung (Materialgleichung).* Diese verbindet die verallgemeinerten kinematischen Größen $E_i(\mathbf{x})$ mit den inneren Kraftgrößen $S_j(\mathbf{x})$: $S_j(\mathbf{x}) = D_{ji}E_i(\mathbf{x})$

beziehungsweise

$$S(x) = DE(x). \tag{3}$$

Die Komponenten der Matrix $D = (D_{ji})_{j,i=1}^p$ sollen im gesamten Gebiet Ω konstant sein und sind vorzugebende Materialparameter. Außerdem wird vorausgesetzt, daß D symmetrisch und positiv definit ist ($D^T = D > \gamma I$, I Einheitsmatrix, $\gamma > 0$). Folglich existiert auch die inverse Matrix D^{-1} .

Durch Substitution von (1) in (3) ergibt sich

$$S(x) = D(B(\nabla_x) \cdot U(x)). \tag{4}$$

Mit der Einführung des verallgemeinerten Spannungsoperators

$$T(\nabla_x) \cdot = (T_{ji}(\nabla_x) \cdot) = D(B(\nabla_x) \cdot)$$

($i = 1, \dots, q; j = 1, \dots, p$) erhält man schließlich $S(x) = T(\nabla_x) \cdot U(x)$. Durch aufeinanderfolgende Substitution von (1) und (3) in der Bilanzgleichung (2) entsteht das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$L(\nabla_x) \cdot U(x) + f(x) = 0 \tag{5}$$

mit dem elliptischen Differentialausdruck ($k, i = 1, \dots, q$)

$$L(\nabla_x) \cdot = (L_{ki}(\nabla_x) \cdot) = B^T(\nabla_x) \cdot (DB(\nabla_x) \cdot). \tag{6}$$

Die Elliptizität folgt aus der positiven Definitheit von D . Neben der Differentialgleichung sind auch die Randbedingungen einheitlich zu formulieren. Dazu wird eine Zerlegung des Randes Γ in sich nicht überschneidende Teilränder Γ_u und Γ_t benötigt, auf denen vorgegebene Größen $\bar{U}(x) = (\bar{U}_i(x))$ und $\bar{t}_n(x) = (\bar{t}_{ni}(x))$ ($i = 1, \dots, q$) wie folgt in die Randbedingungen eingehen:

$$U(x) = \bar{U}(x) \quad \text{für } x \text{ auf } \Gamma_u, \tag{7}$$

$$B^T(n_x) S(x) = \bar{t}_n(x) \quad \text{für } x \text{ auf } \Gamma_t. \tag{8}$$

Mit n_x ist die bezüglich des Gebietes Ω nach außen gerichtete Normale im Punkt x auf dem Rand Γ bezeichnet. Substituiert man die Beziehung (4) für $S(x)$, so entsteht

$$B^T(n_x) D(B(\nabla_x) \cdot U(x)) = \bar{t}_n(x) \quad \text{für } x \text{ auf } \Gamma_t.$$

Mit der Einführung des Randoperators ($i, j = 1, \dots, q$)

$$R(n_x, \nabla_x) \cdot = (R_{ij}(n_x, \nabla_x) \cdot) = B^T(n_x) D(B(\nabla_x) \cdot) \tag{9}$$

erhält die Randbedingung (8) die Form

$$R(n_x, \nabla_x) \cdot U(x) = \bar{t}_n(x). \tag{10}$$

Die Gleichungen (5), (7) und (10) ergeben zusammengefaßt das zu lösende Randwertproblem:

(AP) Die Feldgröße $U(x)$ ist aus den Gleichungen

$$L(\nabla_x) \cdot U(x) + f(x) = 0 \quad \text{für } x \text{ aus } \Omega,$$

$$U(x) = \bar{U}(x) \quad \text{für } x \text{ auf } \Gamma_u,$$

$$R(n_x, \nabla_x) \cdot U(x) = \bar{t}_n(x) \quad \text{für } x \text{ auf } \Gamma_t$$

zu berechnen.

Ist $U(x)$ bekannt, so sind auch die Größen $E(x)$ und $S(x)$ in dieser Reihenfolge aus den Beziehungen (1) und (3) berechenbar.

Im Abschnitt 4 wird eine zum Randwertproblem (AP) äquivalente Randintegralformulierung angegeben, die als Vorstufe zum Diskretisierungsprozeß nach der Randelementmethode anzusehen ist. Zwei einfache Beispiele aus dieser Aufgabenklasse sollen die gegebenen Definitionen näher erläutern (siehe auch [3]).

1. *Fouriersche Wärmeleitung* [7]: In diesem Falle ist $B(\xi) = \xi$ und damit $B(\nabla_x) := \nabla_x$ zu nehmen. Die eingeführten Größen haben dann folgende Bedeutung ($q = 1; p = 3$):

$D = (\lambda_{jl})_{j,l=1}^3$	— Matrix der Wärmeleitkoeffizienten,
$U(x)$	— Temperaturfeld (skalare Größe),
$E(x)$	— Gradient des Temperaturfeldes,
$S(x)$	— Wärmestromvektor (bei Verwendung des Fourierschen Gesetzes der Wärmeleitung),
$f(x)$	— Wärmequellen und -senken (skalare Größe).

Speziell der Differentialausdruck (6) und der Randoperator (9) nehmen die Form

$$L(\nabla_x) := \nabla_x^T \cdot (D \nabla_x \cdot) \quad \text{und} \quad R(n_x, \nabla_x) := n_x^T (D \nabla_x \cdot)$$

an und sind in diesem Falle skalare Größen.

2. *Lineare Elastostatik* [5]: Die Matrix $B(\xi)$ nimmt hier die Gestalt

$$B(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & \xi_2 \\ 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

an. Die eingeführten Größen haben dann folgende physikalische Bedeutung ($q = 3; p = 6$):

$D = (C_{jl})_{j,l=1}^6$	— Matrix der elastischen Konstanten gemäß dem Hookeschen Gesetz bei Voigtscher Notation [7],
$U(x)$	— Verschiebungsvektor,
$E(x)$	— Vektor der unabhängigen Verzerrungskomponenten.
$S(x)$	— Vektor der unabhängigen Spannungskomponenten,
$f(x)$	— Volumenkraftvektor.

3. Fundamentallösungen

Die Fundamentallösung $G(x, y)$ eines linearen selbstadjungierten Differentialausdruckes $L(\nabla_x)$ wird durch die Gleichung

$$L(\nabla_x) \cdot G(x, y) + \delta(x, y) I = 0 \quad \text{für } y \text{ aus } \mathbb{R}^3 \quad (11)$$

definiert und ist im allgemeinen eine matrixwertige Funktion der beiden Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ [6]; $\delta(x, y)$ bezeichnet die Diracsche Deltafunktion [9]. Die Differentialgleichung (11) kann mittels Fourier-Transformation gelöst werden. Man erhält dann folgende Darstellung für die Fundamentallösung [6]:

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} L^{-1}(\xi) \exp(i\xi^T(x - y)) d\Omega_\xi \quad (12)$$

Dabei ist $L^{-1}(\xi)$ die zu $L(\xi) = B^T(\xi) D B(\xi)$ inverse Matrix. Die Existenz von $L^{-1}(\xi)$ ist bei strenger Elliptizität von $L(\nabla_x)$ gesichert. Aus (12) folgt, daß die Fundamentallösung eine Funktion des Abstandes $z = x - y$, $z = (z_1, z_2, z_3)^T$ ist. Um die Bezeichnung zu vereinfachen, wird $G(z) = G(x - y) \equiv G(x, y)$ festgelegt. Aus der im Abschnitt 2 gegebenen Definition für $B(\xi)$ folgt, daß die Komponenten von $L(\xi)$ in der

Variablen ξ homogene Funktionen zweiter Ordnung sind. Auf Grund dieser Eigenschaft ist das Integral in Formel (12) weiter auswertbar. Man erhält schließlich [3]

$$G(z) = \frac{1}{\|z\|} G^0(\bar{z}), \quad G^0(\bar{z}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{I_1} L^{-1}(\bar{\xi}(\Phi)) d\Phi \tag{13}$$

mit $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$, $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, $\bar{z} = z/\|z\|$ und $\bar{\xi} = \xi/\|\xi\|$. Der Integrationsweg I_1 ist durch die Peripherie des Einheitskreises festgelegt, dessen Mitte der Punkt y ist und der sich in der Ebene mit dem Normalenvektor \bar{z} befindet (Bild 1). Das Integral in (13) ist regulär und kann durch eine Quadraturformel numerisch ausgewertet werden. Die Singularität der Fundamentallösung an der Stelle $x = y$ ist vollständig durch den Vorfaktor $1/\|z\|$ in Formel (13) bestimmt.

Zur Entwicklung von Randintegralgleichungen für das Randwertproblem (AP) wird neben $G(z)$ noch deren konormale Ableitung $F(x, y)$ benötigt. Diese erhält man durch Anwendung des Randoperators $R(n_x, \nabla_x)$ auf $G(x - y)$:

$$F(x, y) = R(n_x, \nabla_x) \cdot G(x - y).$$

Auch diese Fundamentallösung ist durch reguläre Integrale längs des Weges I_1 darstellbar und besitzt für $x = y$ eine Singularität der Form $1/\|z\|^2$. Zur Berechnung von $F(x, y)$ steht der folgende Formelsatz zur Verfügung [3]:

$$F(x, y) = \frac{1}{\|z\|^2} B^T(n_x) F^0(\bar{z}),$$

$$F^0(\bar{z}) = D(P^0(\bar{z}) - B(\bar{z}) G^0(\bar{z})), \quad P^0(\bar{z}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{I_1} \Pi(\bar{\xi}(\Phi), \bar{z}) d\Phi, \tag{14}$$

$$\Pi(\bar{\xi}, \bar{z}) = B(\bar{\xi}) L^{-1}(\bar{\xi}) [B^T(\bar{z}) DB(\bar{\xi}) + B^T(\bar{\xi}) DB(\bar{z})] L^{-1}(\bar{\xi}).$$

Bei der Ableitung von Randintegralgleichungen spielen die Eigenschaften der Fundamentallösungen G und F eine bedeutende Rolle, insbesondere die auftretenden Singularitäten für $x = y$ sind von hohem Einfluß. Direkt aus den Formeln (13) und (14) erhält man folgendes:

$$(i) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{S_\eta(y)} G(x, y) \|dS_\eta\| = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^3, \tag{15}$$

wobei $S_\eta(y) = \partial K_\eta(y)$ die Oberfläche der Kugel $K_\eta(y) = \{x \in \mathbb{R}^3: \|x - y\| < \eta\}$ ist.

$$(ii) \quad C(y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{S_\eta(y) \cap \bar{\Omega}} F^T(x, y) \|dS_\eta\| \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^3. \tag{16}$$

Insbesondere ist $C(y) = I$ für $y \in \Omega$ und $C(y) = 0$ für $y \in \mathbb{R} \setminus \bar{\Omega}$. Die Werte von $C(y)$ für $y \in \Gamma$ werden wesentlich durch die Glattheitsbedingungen von Γ bestimmt. Im Falle eines Ljapunov-Randes (in der Umgebung des Punktes y ändert sich die Normalenrichtung an Γ stetig) erhält man $C(y) = I/2$. Befindet sich y jedoch in einer Ecke oder auf einer Kante des Randes Γ (Γ ist dann stückweise glatt), was in der Praxis häufig auftritt, so ist $C(y)$ eine Funktion des Raumwinkels, der am Punkt y durch das Kugelsegment $K_\eta(y) \cap \bar{\Omega}$ ($\eta \rightarrow 0$) gebildet wird [9]. Ein detaillierter Algorithmus zur Berechnung der Fundamentallösungen G und F für Probleme der anisotropen Elastizitätstheorie ist in [3] enthalten.

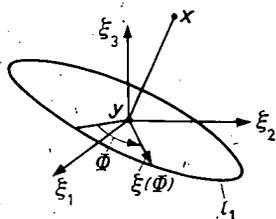


Bild 1. Integrationsweg l_1 zur Berechnung der Fundamentallösungen

4. Randintegralgleichungen

Ausgangspunkt für die Entwicklung der direkten Randintegralmethode zur Lösung des Randwertproblems (AP) ist die zweite Greensche Formel, bezogen auf den Differentialausdruck $L(\nabla_x)$ und das Gebiet Ω [9]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [v_y^T(x) L(\nabla_x) \cdot U(x) - (L(\nabla_x) \cdot v_y(x))^T U(x)] d\Omega_x \\ &= \int_{\Gamma} [v_y^T(x) R(n_x, \nabla_x) \cdot U(x) - (R(n_x, \nabla_x) \cdot v_y(x))^T U(x)] \|d\Gamma_x\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Der nächste Schritt besteht darin, in (17) die Substitution $v_y(x) = G(x, y)$ vorzunehmen und das Gebiet Ω mit dessen Rand Γ gemäß den Zuordnungen

$$\Omega \rightarrow \Omega_{\eta}(y) \equiv \Omega - \overline{K_{\eta}(y)} \quad \text{und} \quad \Gamma \rightarrow \Gamma_{\eta}(y) \equiv \partial\Omega_{\eta}(y) \quad (y \in \mathbb{R}^3)$$

abzuändern. Die Identität (17) lautet dann

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\eta}(y)} [G(x, y) L(\nabla_x) \cdot U(x) - (L(\nabla_x) \cdot G(x, y))^T U(x)] d\Omega_x \\ &= \int_{\Gamma_{\eta}(y)} [G(x, y) t_n(x) - F^T(x, y) U(x)] \|d\Gamma_x\|, \end{aligned}$$

wobei $t_n(x) = R(n_x, \nabla_x) \cdot U(x)$ ist. Mit den Gleichungen (5) und (11) folgt weiter

$$\int_{\Gamma_{\eta}(y)} [G(x, y) t_n(x) - F^T(x, y) U(x)] \|d\Gamma_x\| = - \int_{\Omega_{\eta}(y)} G(x, y) f(x) d\Omega_x. \quad (18)$$

In dieser Identität wird zum Grenzwert $\eta \rightarrow 0$ übergegangen. Unter Verwendung der Beziehungen (15) und (16) erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\eta}(y)} G(x, y) t_n(x) \|d\Gamma_x\| &= \int_{\Gamma} G(x, y) t_n(x) \|d\Gamma_x\|, \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\eta}(y)} F^T(x, y) U(x) \|d\Gamma_x\| &= \int_{\Gamma} F^T(x, y) U(x) \|d\Gamma_x\| + C(y) U(y), \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\eta}(y)} G(x, y) f(x) d\Omega_x &= \int_{\Omega} G(x, y) f(x) d\Omega_x \end{aligned}$$

für beliebiges $y \in \mathbb{R}^3$. Das Integral im zweiten Grenzwert ist dabei im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu berechnen und wurde deshalb mit einem Strich durch das Integrationssymbol gekennzeichnet. Damit entsteht aus (18) schließlich die Integralgleichung

$$\begin{aligned} & C(y) U(y) + \int_{\Gamma} F^T(x, y) U(x) \|d\Gamma_x\| \\ &= \int_{\Gamma} G(x, y) t_n(x) \|d\Gamma_x\| + \int_{\Omega} G(x, y) f(x) d\Omega_x. \end{aligned} \quad (19)$$

Ist $y \in \Omega$, so ist gemäß Definition $C(y) = I$. Die Beziehung (19) kann deshalb als Bestimmungsgleichung für $U(y)$ Verwendung finden, vorausgesetzt, die Werte $U(x)$ und $t_n(x)$ sind auf dem gesamten Rand Γ bekannt. Gemäß dem zu lösenden Randwertproblem (AP) liegen diese Werte jedoch nur auf jeweils durchschnittsfremden Teilrändern Γ_u und Γ_t vor. Die erste Aufgabe besteht deshalb darin, die noch unbekannt Randwerte zu bestimmen. Als Bestimmungsgleichung wird dazu wieder die Beziehung (19) mit $y \in \Gamma$ genommen, in die auch die bekannten Randwerte $U(x)$ auf Γ_u und $t_n(x)$ auf Γ_t eingehen. Das entstehende Integralgleichungssystem ist dann singular. Nach der Lösung dieses Systems liegen die Werte für $\bar{U}(x)$ und $t_n(x)$ auf dem gesamten Rand Γ vor. In einem beliebigen Punkt $y \in \Omega$ ist dann die Lösung $U(y)$ direkt berechenbar. Da die Fundamentallösungen $G(x, y)$ und $F(x, y)$ für $x \neq y$ beliebig oft bezüglich y stetig differenzierbar sind, können aus (19) auch Darstellungsformeln für die Ableitungen der Lösung $U(y)$ entwickelt werden. Zum Beispiel sind die „verallgemeinerten Spannungen“ $S(y)$ in der Form

$$S(y) = T(\nabla_y) \cdot U(y) = \int_{\Gamma} T(\nabla_y) \cdot G(x, y) t_n(x) \|d\Gamma_x\| \\ - \int_{\Gamma} T(\nabla_y) \cdot F^T(x, y) U(x) \|d\Gamma_x\| + \int_{\Omega} T(\nabla_y) \cdot G(x, y) f(x) d\Omega_x \quad (y \in \Omega)$$

darstellbar. Für die Kerne $T(\nabla_y) \cdot G(x, y)$ und $T(\nabla_y) \cdot F^T(x, y)$ können analog zu den Formeln für die Fundamentallösungen Ausdrücke in geschlossener Form angegeben werden. Allerdings ist für den allgemeinen Fall der analytische Aufwand schon sehr beträchtlich [6].

LITERATUR

- [1] BANERJEE, P. K., and R. BUTTERFIELD: Boundary Element Methods in Engineering London—New York—St. Louis u. a.: McGraw Hill Book Company 1981.
- [2] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., and L. C. WROBEL: Boundary Element Techniques — Theory and Application in Engineering. Berlin—New York: Springer-Verlag 1984.
- [3] GRÜNDEMANN, H.: A General Boundary Integral Approach to Elliptical Boundary Value Problems. Engineering Analysis 4 (1987) 3, 165—173.
- [4] GURTIN, M. E.: The Linear Theory of Elasticity. In: Handbuch der Physik, Vol. VIa/2 (Ed.: C. A. Truesdell). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1973, 1—295.
- [5] КУПРАДЗЕ, В. Д.: Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Изд-во Наука 1976.
- [6] MURA, T.: Micromechanics of Defects in Solids. Hague—Boston—London: Martinus Nijhoff Publishers 1982.
- [7] TEODOSIU, C.: Elastic Models of Crystal Defects. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1982.
- [8] TRUESDELL, C. A., and W. NOLL: The Non-Linear Field Theories of Mechanics. In: Handbuch der Physik, Vol. III/3 (Ed.: S. Flügge). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1965.
- [9] Угодчиков, А. Г., и Н. М. Хуторянский: Метод граничных элементов в механике деформируемого твёрдого тела. Казань: Изд-во унив-та 1986.

Manuskripteingang: 24. 11. 1987

VERFASSER:

Dr. H. GRÜNDEMANN
 Institut für Mechanik
 der Akademie der Wissenschaften der DDR
 DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, PSF 408