

Inverse Probleme für die Wärmeleitungsgleichung

S. HANDROCK-MEYER

Es wird ein Überblick über in den letzten Jahren erzielte Resultate zur eindeutigen Bestimmung des Wärmeleitkoeffizienten in der Wärmeleitungsgleichung gegeben. Dabei werden die Fälle konstanter, ortsabhängiger, zeitabhängiger Wärmeleitkoeffizienten sowie der quasilineare Fall, d. h. der Wärmeleitkoeffizient ist eine Funktion der Temperatur, betrachtet. Außerdem wird ein einfacher Beweis für die Gültigkeit des Maximumprinzips im quasilinearen Fall angegeben.

Даётся обзор о полученных в последних годах результатах для однозначного определения коэффициента теплопроводности в уравнении теплопроводности. При этом рассматриваются случаи постоянного, зависящего от пространственной переменной, зависящего от времени коэффициента теплопроводности и квазилинейный случай, т. е. коэффициент теплопроводности является функцией температуры. Кроме того даётся простое доказательство для справедливости принципа максимума в квазилинейном случае.

A summary is given of the results obtained in the past years for the unique determination of the heat conductivity in the heat equation where the cases of a constant, a space dependent, a time dependent heat conductivity and the quasilinear case, i.e. the heat conductivity is a function of the temperature are considered. Moreover a simple proof is given for the validity of the maximum principle in the quasilinear case.

1. Problemstellung

Unter einer *inversen Aufgabe* versteht man die Ermittlung der Ursache z bei gegebener Wirkung u . Man kann diesen Tatbestand in Form einer Operatorgleichung der Gestalt

$$Az = u \quad (z \in Z, u \in U), \quad (1.1)$$

wobei Z und U metrische Räume sind, schreiben. Läßt sich der zu untersuchende Prozeß durch eine Differentialgleichung beschreiben, so besteht die Ursache z aus gewissen Koeffizienten bzw. der rechten Seite der Differentialgleichung. Diese Parameter bedingen die Wirkung u , die Lösung der Differentialgleichung. Die Ermittlung der Lösung u in Abhängigkeit von den Parametern, d. h. die Berechnung von Az nennt man Lösung der direkten Aufgabe. Bei der Behandlung inverser Probleme wird stets vorausgesetzt, daß die zugehörige direkte Aufgabe eindeutig lösbar sein möge. Die Lösung der inversen Aufgabe, d. h., das Auffinden der Ursache z aus der Wirkung u läßt sich in der Form

$$z = Ru \quad (1.2)$$

schreiben. Der Lösungsbegriff sowie die Auswahl der Räume Z und U werden durch die konkrete Aufgabenstellung festgelegt. Unter R versteht man die Gesamtheit der

algebraischen und analytischen Operationen, die (1.1) lösen. Man muß also, um ein inverses Problem lösen zu können, die Lösung des direkten Problems kennen. Diese wird in der Regel durch Messungen, die natürlich mit Fehlern behaftet sind, ermittelt. Aus diesem Grunde ist es sehr wichtig zu wissen, ob die Lösung (1.2) stabil bezüglich kleiner Änderungen von u ist, d. h., es ist zu untersuchen, ob das Problem (1.1) korrekt gestellt ist.

Definition 1: Das Problem der Lösung von (1.1) heißt *korrekt im Sinne von Hadamard*, wenn folgendes gilt:

- 1° Für jedes $u \in U$ existiert eine Lösung $z \in Z$.
- 2° Die Lösung z ist eindeutig im Raum Z .
- 3° Die Lösung z hängt stetig von u ab.

Ist wenigstens eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so spricht man von einem *inkorrekt gestellten Problem*.

Inverse Probleme sind im allgemeinen inkorrekt, und zwar ist die Bedingung 3° nicht erfüllt, denn mitunter erzeugen verschiedene (im Sinne der Metrik) innere Parameter z dieselben Meßwerte u . Bis vor kurzer Zeit wurde angenommen (auch Hadamard war dieser Meinung), daß inkorrekte Aufgaben keinen physikalischen Sinn haben. Diese Ansicht erwies sich jedoch als unhaltbar, da eine große Anzahl von praktisch wichtigen Aufgaben nicht korrekt im Sinne von Hadamard sind. Deshalb machte sich die Einführung eines schwächeren Korrektheitsbegriffes erforderlich. Dieser wurde von LAURENT'EV [12] eingeführt. Dabei wird der Lösungsraum Z auf eine in der Regel kompakte Menge \hat{Z} , die sogenannte *Korrektheitsmenge*, eingeschränkt.

Definition 2: Das Problem der Lösung von $Az = u$ ($z \in \hat{Z} \subset Z$, $u \in U$) heißt *korrekt im Sinne von Tichonov* (oder *bedingt korrekt*) auf der Menge \hat{Z} , wenn folgendes gilt:

- 1° Apriori sei bekannt, daß eine Lösung $z \in \hat{Z}$ existiert.
- 2° Die Lösung z ist eindeutig in der Menge \hat{Z} .
- 3° Unendlich kleine Änderungen von u , für die gilt $u' + du \in A(\hat{Z})$, d. h. solche Änderungen von u , die die Lösung z nicht aus \hat{Z} herausführen, ziehen unendlich kleine Änderungen von z nach sich.

Man kann somit durch sinnvolle Auswahl einer Korrektheitsmenge \hat{Z} ein inkorrekt gestelltes Problem in ein bedingt korrektes überführen.

Für stetige Operatoren A gilt noch der folgende

Satz von Tichonov: *Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:*

- 1° \hat{Z} sei ein Kompakt in der Metrik von Z .
- 2° A sei stetig auf \hat{Z} .
- 3° Für jedes $u \in A(\hat{Z})$ existiere genau eine Lösung $z \in \hat{Z}$ der Gleichung $Az = u$.

Dann ist die inverse Abbildung $z = Ru$ stetig in der Metrik von Z .

Daraus folgt: Das zentrale Problem bei der Untersuchung bedingt korrekter Aufgaben mit stetigem Operator ist der Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis in \hat{Z} , wobei letzterer der wesentlichere Teil ist. Die Existenz einer Lösung wird vielfach als Folgerung der Richtigkeit des Modells angesehen, d. h., es existiert ein kausaler Zusammenhang zwischen beobachtbarer Wirkung und Ursache. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung inverser Aufgaben versucht man durch Vorgabe von Nebenbedingungen (zusätzliche Informationen über das Modell, Restriktionen für die Parameter [z. B. Ungleichungen, untere und obere Schranken]) zu erreichen. Aus dem Satz von Tichonov folgt dann für stetige Operatoren A die Stabilität der Lösung und somit die bedingte Korrektheit des Problems, welche für eine numerische Bearbeitung der Aufgabe unerlässlich ist.

Zusammenfassend kann man folgende Merkmale inverser Aufgaben anführen:

- a) Sie sind experimentell nicht nachvollziehbar (innere Materialparameter sind direkten Messungen unzugänglich).
- b) Ihre mathematische Formulierung ist oft sehr kompliziert.
- c) Sie sind im allgemeinen nichtlinear und nur in Spezialfällen analytisch lösbar.

2. Das Eindeutigkeitsproblem bei der Lösung inverser Aufgaben

Bei inversen Aufgaben für Wärmeleitungsprozesse ist in der Regel eine der folgenden Größen zu bestimmen: Die *Wärmeleitfähigkeit* a , die *Wärmeübergangszahl* α oder Parameter in der rechten Seite der Differentialgleichung. Wir werden uns auf die Bestimmung von a beschränken. Es lassen sich sehr leicht Beispiele angeben, in denen a nicht eindeutig zu ermitteln ist.

Beispiel (BEZNOŠČENKO [1]): Es wird folgendes Anfangswertproblem betrachtet:

$$\begin{aligned} u_t - au_{xx} &= -3x^2, & (-\infty < x < +\infty; 0 < t < +\infty), \\ u(x, 0) &= x^4/12 & (0 < x < +\infty). \end{aligned}$$

Weiter sei als Zusatzinformation (Meßwert) $u(0, t) = -2t^2$ ($0 < t < +\infty$) gegeben. Für $a = \text{const}$ ist $u(x, t) = (a^2 - 3a)t^2 + ax^2t + x^4/12 - 3x^2t$ Lösung der direkten Aufgabe. Ihr Einsetzen in den Meßwert liefert $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$, d. h., die Zusatzinformation ist nicht hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit der inversen Aufgabe.

Es ist sinnvoll, folgende Forderungen an die Zusatzinformation zu stellen:

1. Sie soll die eindeutige Lösbarkeit der inversen Aufgabe gewährleisten.
2. Sie soll minimal sein (möglichst wenig Zusatzinformationen).
3. Sie soll meßtechnisch gut erfaßbar sein.

Im weiteren werde mit Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^n mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ bezeichnet, T sei eine positive, fest vorgegebene reelle Zahl, $D_T = \Omega \times (0, T)$ und $\overline{B}_T = \partial\Omega \times [0, T]$. Ferner seien \overline{D}_T und $\overline{\Omega}$ die Abschließungen von D_T und Ω , $\partial/\partial\nu$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen. Es ist eine umfangreiche Literatur zur Frage der eindeutigen Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit a bekannt. Die wichtigsten Fälle, einschließlich der Art der Zusatzinformationen, sollen hier zusammengestellt werden, wobei die Angaben zu den Verfassern keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Ferner wird vorausgesetzt, daß in allen formulierten Aufgabenstellungen die Kompatibilitätsbedingungen zwischen Anfangs- und Randbedingungen sowie den Zusatzinformationen erfüllt sind. Außerdem seien die Lösung u des direkten Problems sowie die Anfangs- und Randbedingungen hinreichend glatt.

I. $a = \text{const} > 0$. DÜMMEL [6] betrachtete die erste Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= a\Delta u & \text{für alle } (x, t) \in D_T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) & \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x, t) &= \psi(x, t) & \text{für alle } (x, t) \in \overline{B}_T \end{aligned}$$

mit der Zusatzinformation

$$u(x_1, t_1) = h \quad (x_1 \in \Omega; 0 < t_1 < T), \quad h \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(x_1) \neq h.$$

Unter der Voraussetzung, daß u_t für jedes a und alle $(x, t) \in D_T$ nicht negativ und beschränkt ist, wurde die Eindeutigkeit von a mit Hilfe der Darstellung der Lösung u durch die Greensche Funktion nachgewiesen.

II. $a = a(x)$, $a(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$, a stetig in $\bar{\Omega}$ und unabhängig von der n -ten Koordinate x_n . DÜMMEL [7] untersuchte das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= a(x) \Delta u && \text{für alle } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{für alle } x \in \bar{\Omega}, \\ u(x, t) &= \psi(x, t) && \text{für alle } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty) \end{aligned}$$

mit einer Zusatzinformation der Gestalt

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = h(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty).$$

Die Eindeutigkeit des ortsabhängigen Wärmeleitkoeffizienten $a = a(x)$ wurde unter Verwendung potentialtheoretischer Hilfsmittel bewiesen. Ortsabhängige Wärmeleitkoeffizienten sind auch von RICHTER [18] betrachtet worden.

III. $a = a(t)$, $a(t) > 0$ für alle $t \in [0, t_0]$, a stetig in $[0, t_0]$, wobei t_0 eine hinreichend kleine positive Zahl ist. JONES [11] und CANNON [3] beschäftigten sich mit der Problemstellung

$$\begin{aligned} u_t &= a(t) u_{xx} && \text{für alle } (x, t) \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{für alle } x \in [0, 1], \\ u(0, t) &= \varphi_1(t) && \text{für alle } t \in [0, T), \\ u(1, t) &= \varphi_2(t) && \text{für alle } t \in [0, T), \end{aligned}$$

wobei eine Zusatzinformation der Form

$$a(t) u_x(0, t) = h(t) \quad \text{für alle } t \in (0, T)$$

bekannt sei. Falls die Lösung u der direkten Aufgabe gewissen zusätzlichen Bedingungen genügt, so ist das inverse Problem der Ermittlung von $a = a(t)$ eindeutig lösbar. Dies wurde durch Rückführung des obigen Problems auf eindeutig lösbare äquivalente Aufgaben gezeigt. Resultate über zeitabhängige Koeffizienten findet man außerdem in den Arbeiten von LAVRENT'EV, ROMANOV und VASIL'EV [13], LAVRENT'EV und REZNIČKAJA [14] und BEZNOŠČENKO [1].

IV. $a = a(x, t) > 0$. BEZNOŠČENKO [2] betrachtete das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit verschiedenen Zusatzinformationen. Unter gewissen Zusatzforderungen bezüglich a und u ist das inverse Problem eindeutig lösbar.

3. Das Eindeutigkeitsproblem bei der Lösung inverser Aufgaben im quasilinearen Fall

In der Praxis ist die Wärmeleitfähigkeit a oft eine Funktion der Temperatur u . Die Wärmeleitungsgleichung ist dann vom quasilinearen Typ. Außer der Gleichung

$$u_t - a(u) \Delta u = 0 \tag{3.1}$$

betrachtet man noch den Divergenzfall

$$u_t - \operatorname{div} (a(u) \operatorname{grad} u) = 0. \tag{3.2}$$

Für Gleichungen der Gestalt (3.2) und somit auch für (3.1) gilt das Maximumprinzip, d. h., es gilt der folgende

Satz: Sei $a = a(u)$ eine streng positive und stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei

1. $u = u(x, t)$ stetig in $\overline{D_T}$ und zweifach stetig differenzierbar in D_T ,
2. $u_i(x, t) = \operatorname{div} (a(u(x, t)) \operatorname{grad} u(x, t))$ ($(x, t) \in D_T \cup \Omega_T$).

Dann gilt

$$\max_{(x,t) \in \overline{D_T}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_T}} u(x, t), \quad (3.3)$$

$$\min_{(x,t) \in \overline{D_T}} u(x, t) = \min_{(x,t) \in \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_T}} u(x, t). \quad (3.4)$$

Dabei ist $\Omega_0 = \Omega \times \{t = 0\}$ und $\Omega_T = \Omega \times \{t = T\}$.

Beweis: Die Beziehung (3.3) wird indirekt bewiesen. Wir setzen ihre rechte Seite gleich M und nehmen an, daß u sein Maximum in einem gewissen Punkt $(x_0, t_0) \in D_T \cup \Omega_T$ erreicht. Dabei gelte

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.5)$$

Es gilt notwendig

$$u_{x_i}(x_0, t_0) = 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.6)$$

Weil $u(x_0, \cdot)$ in t_0 seinen Maximalwert erreicht, gilt

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0. \quad (3.7)$$

Schreibt man nun (3.2) in der Gestalt

$$u_t(x, t) = a(u(x, t)) \Delta u(x, t) + a_u(u(x, t)) (\operatorname{grad} u(x, t))^2, \quad (3.8)$$

so folgt aus (3.6) und der Positivität von $a(u(x_0, t_0))$ für die rechte Seite von (3.8) die Ungleichung

$$a(u(x_0, t_0)) \Delta u(x_0, t_0) + a_u(u(x_0, t_0)) (\operatorname{grad} u(x_0, t_0))^2 \leq 0.$$

Wegen (3.7) sind die Vorzeichen der linken und der rechten Seite von (3.8) im Punkt (x_0, t_0) verschieden, aber beide Seiten können gleichzeitig verschwinden. Deshalb bestimmen wir für den vollständigen Beweis des Satzes einen Punkt (\bar{x}, \bar{t}) mit $\Delta u(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$, $\operatorname{grad} u(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ und $u_t(\bar{x}, \bar{t}) > 0$. Zu diesem Zwecke betrachten wir eine Hilfsfunktion v ,

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \quad (3.9)$$

mit einer gewissen Konstanten k , die später ausgewählt wird. Wegen (3.5) ist $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$. Weiter gilt $k(t_0 - t) \leq kT$. Wir wählen nun $k > 0$ derart, daß $k < \varepsilon/2T$ ist. Dann gilt

$$\max_{(x,t) \in \overline{D_T} \cup \overline{\Omega_T}} v(x, t) \leq M + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.10)$$

Die Funktion v ist wegen der Voraussetzung 1 stetig in $\overline{D_T}$ und erreicht deshalb in einem Punkt (\bar{x}, \bar{t}) ihr Maximum. Offenbar ist $v(\bar{x}, \bar{t}) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon$, folglich wegen (3.10) $(\bar{x}, \bar{t}) \in \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_T}$, und notwendig gilt $v_{x_i}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$, $v_{x_i x_i}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$

($i = 1, \dots, n$) und $v_i(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$. Auf Grund von (3.9) ist nun

$$\begin{aligned} u_{x_i}(\bar{x}, \bar{t}) &= v_{x_i}(\bar{x}, \bar{t}) = 0 \\ u_{x_i x_i}(\bar{x}, \bar{t}) &= v_{x_i x_i}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ u_i(\bar{x}, \bar{t}) &= v_i(\bar{x}, \bar{t}) + k \geq k > 0. \end{aligned}$$

Da $a(u(x, t)) > 0$ für alle $(x, t) \in \overline{D_T}$ ist, folgt

$$a(u(\bar{x}, \bar{t})) \Delta u(\bar{x}, \bar{t}) = a(u(\bar{x}, \bar{t})) \Delta v(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$$

und

$$a_u(u(\bar{x}, \bar{t})) (\text{grad } u(\bar{x}, \bar{t}))^2 = a_u(u(\bar{x}, \bar{t})) (\text{grad } v(\bar{x}, \bar{t}))^2 = 0.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} u_i(\bar{x}, \bar{t}) - a(u(\bar{x}, \bar{t})) \Delta u(\bar{x}, \bar{t}) - a_u(u(\bar{x}, \bar{t})) (\text{grad } u(\bar{x}, \bar{t}))^2 \\ = v_i(\bar{x}, \bar{t}) + k - a(u(\bar{x}, \bar{t})) \Delta v(\bar{x}, \bar{t}) - a_u(u(\bar{x}, \bar{t})) (\text{grad } v(\bar{x}, \bar{t}))^2 \geq k > 0, \end{aligned}$$

d. h., die Gleichung (3.2) ist in einem Punkt $(\bar{x}, \bar{t}) \in D_T \cup \Omega_T$ nicht erfüllt, woraus sich ein Widerspruch zur Voraussetzung 2 ergibt. Folglich kann die Lösung $u = u(x, t)$ der Gleichung (3.2) in keinem Punkt $(x, t) \in D_T \cup \Omega_T$ einen Wert annehmen, der den Maximalwert dieser Funktion für alle $(x, t) \in \overline{\Omega_0} \cup \overline{B_T}$ übersteigt. Analog beweist man die Beziehung (3.4) ■

ISKENDEROV [10] untersuchte die erste Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - a(u) \Delta u &= f(x, t) && \text{für alle } (x, t) \in D_T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(x, t) &= \psi(x, t) && \text{für alle } (x, t) \in \overline{B_T} \end{aligned}$$

mit einer Zusatzinformation, die auf dem Rand des Gebietes vorgegeben ist:

$$a(\psi(x_0, t)) \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial \nu} = g(t) \quad (x_0 \in \partial\Omega; 0 < t < T).$$

Mit Hilfe der Lösungsdarstellung durch die Greensche Funktion wird gezeigt, daß genau eine streng positive und in $[v_0, v_1]$ stetige Lösung $u = u(x, t)$ des inversen Problems existiert. Dabei ist

$$v_0 = \min_{(x,t) \in \overline{D_T}} u(x, t) \quad \text{und} \quad v_1 = \max_{(x,t) \in \overline{D_T}} u(x, t).$$

MUZYLEV [17] sowie CANNON und DUCHATEAU [4, 5] beschäftigten sich mit dem eindimensionalen Problem in Divergenzform

$$\begin{aligned} u_t - (a(u) u_x)_x &= 0 && \text{für alle } (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= d = \text{const} && \text{für alle } x \in (0, l), \\ a(u) u_x(0, t) &= 0 && \text{für alle } t \in (0, T], \\ a(u) u_x(l, t) &= \Phi(t) > 0 && \text{für alle } t \in (0, T], \quad \Phi(0) = 0. \end{aligned}$$

Die Zusatzinformation ist ebenfalls wieder auf dem Rand des Gebietes vorgegeben:

$$u(l, t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in (0, T].$$

Wenn f stetig und streng monoton in $[0, T]$ ist und außerdem $f(0) = d$ gilt, so existiert genau eine streng positive, einmal stetig differenzierbare in $[v_0, v_1]$ Funktion $a = a(u)$.

In den Arbeiten von DÜMMELE [8, 9] und HANDROCK-MEYER [15, 16] wurde ein einheitlicher Zugang zur Behandlung inverser Probleme für die Gleichungen (3.1) und (3.2) vorgeschlagen, wobei die Zusatzinformationen im Inneren des Gebietes vorgegeben sind. Es wird die partielle Differentialgleichung

$$u_t - a(u) \Delta u = 0 \quad \text{für alle } (x, t) \in D_T$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

bzw. die Divergenzform dieser Gleichung

$$u_t - \operatorname{div} (a(u) \operatorname{grad} (u)) = 0 \quad \text{für alle } (x, t) \in D_T,$$

$$u(x, 0) = d = \operatorname{const} \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

betrachtet. Außerdem genüge u in beiden Fällen noch einer Randbedingung der Gestalt

$$u(x, t) = \psi(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \overline{B_T}.$$

Auf Grund der Gültigkeit des Maximumprinzips für quasilineare Gleichungen kann man setzen

$$v_0 = \min \left\{ \min_{x \in \overline{\Omega}} \varphi(x), \min_{(x,t) \in \overline{B_T}} \psi(x, t) \right\},$$

$$v_1 = \max \left\{ \max_{x \in \overline{\Omega}} \varphi(x), \max_{(x,t) \in \overline{B_T}} \psi(x, t) \right\},$$

wobei wir stets $v_0 < v_1$ voraussetzen. Folgende Klassen von Koeffizienten werden untersucht:

1. $a(u) = b(u - v_0)^l + c$, wobei l eine natürliche Zahl und b, c reelle Zahlen mit den Eigenschaften $b > -c(v_1 - v_0)^{-l}$, $c > 0$ sind. Wir setzen voraus, daß $a(v_0) = c$ bekannt ist. Dann reduziert sich der Eindeutigkeitsnachweis von $a = a(u)$ auf die eindeutige Ermittlung der reellen Konstante b . Es erweist sich, daß eine Zusatzinformation der Form $u(x_1, t_1) = h$ mit $x_1 \in \Omega$, $0 < t_1 < T$ und $\varphi(x_1) \neq h$ (wie sie im Falle $a = \operatorname{const}$ vorausgesetzt wurde) und einige schwache zusätzliche Voraussetzungen bezüglich der Lösung u des direkten Problems hinreichend sind, um b eindeutig zu ermitteln.

2. Sei $a = a(u)$ analytisch in $[v_0^*, v_1^*] \supset [v_0, v_1]$ und $a(d) = a_0 > 0$ bekannt. Als Zusatzinformation sei

$$u(x_0, t) = h(t) \quad \text{für } x_0 \in \Omega, t \in [0, T]$$

gegeben. Dabei sei h eine einmal stetig differenzierbare Funktion, und es existiere ein $t_0 > 0$ mit der Eigenschaft $h'(t) > 0$ für alle $t \in (0, t_0]$. Unter gewissen schwachen Zusatzvoraussetzungen bezüglich u , wobei man natürlich für die Divergenzform etwas mehr fordern muß, läßt sich die Eindeutigkeit von $a = a(u)$ nachweisen.

Die Beweisidee ist einheitlich für beide Koeffizientenklassen und für die Gleichungen (3.1) und (3.2): Man nimmt an, daß zwei Lösungen a_1 und a_2 der inversen Aufgabe existieren. Es läßt sich zeigen, daß die Differenz der Lösungen u_1 und u_2 des zugehörigen direkten Problems

einer *linearen* parabolischen Differentialgleichung mit von Null verschiedener rechter Seite sowie homogenen Anfangs- und Randbedingungen genügt. Dieses lineare Randwertproblem ist eindeutig lösbar. Seine Lösung läßt sich durch die Greensche Funktion angeben. Auf Grund der Zusatzinformation ist die linke Seite der Lösungsdarstellung gleich Null, die rechte jedoch nicht. Aus diesem Widerspruch folgt die Eindeutigkeit des Koeffizienten a .

LITERATUR

- [1] Безнощенко, Н. Я.: Об определении коэффициента в параболическом уравнении. Дифф. ур-ия 10 (1974), 24–35.
- [2] Безнощенко, Н. Я.: Об определении коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении. Дифф. ур-ия 11 (1975), 19–26.
- [3] CANNON, J. R.: Determination of an unknown coefficient in a parabolic differential equation. Duke Math. J. 30 (1963), 313–323.
- [4] CANNON, J. R., and P. DUCHATEAU: An inverse Problem for a nonlinear diffusion equation. SIAM J. Appl. Math. 39 (1980), 272–289.
- [5] DUCHATEAU, P.: Monotonicity and uniqueness results in identifying an unknown coefficient in a nonlinear diffusion equation. SIAM J. Appl. Math. 41 (1981), 310–323.
- [6] DÜMMEL, S.: Ein inverses Problem für die Wärmeleitungsgleichung. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 23 (1981), 355–359.
- [7] DÜMMEL, S.: Ein Eindeutigkeitsatz zur Bestimmung eines Koeffizienten in der Wärmeleitungsgleichung. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 26 (1984), 198–200.
- [8] DÜMMEL, S.: Uniqueness Theorems for the Determination of a Coefficient in a Quasilinear Parabolic Equation. Z. Anal. Anw. 5 (1986), 419–424.
- [9] DÜMMEL, S., and S. HANDROCK-MEYER: Uniqueness of the Solution of an Inverse Problem for a Quasilinear Parabolic Equation in Divergence Form. Z. Anal. Anw. 7 (1988), 241–246.
- [10] Искендеров, А. Д.: Об обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений. Дифф. ур-ия 10 (1974), 890–898.
- [11] JONES, B. F.: Various methods for finding unknown coefficient in parabolic differential equations. Com. Pure and Appl. Math. 16 (1963), 33–34.
- [12] Лаврентьев, М. М.: О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. Акад. Наук СССР 1962.
- [13] Лаврентьев, М. М., Романов, В. Г., и В. Г. Васильев: Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Москва: Изд-во Наука 1969.
- [14] Лаврентьев, М. М., и К. Г. Резницкая: Теоремы единственности некоторых нелинейных обратных задач уравнений параболического типа. Докл. Акад. Наук СССР 208 (1973), 531–532.
- [15] MEYER, S.: Die Existenz einer Lösung für ein inverses Problem der Wärmeleitungsgleichung im quasilinearen Fall. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 26 (1984), 259 bis 264.
- [16] MEYER, S.: Die Eindeutigkeit der Lösung eines inversen Problems für die Wärmeleitungsgleichung im quasilinearen Fall. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 27 (1985), 117–120.
- [17] Музылев, Н. В.: Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности. Ж. выч. мат. и мат. физ. 20 (1980), 388–400.
- [18] RICHTER, G.: An inverse problem for the steady state diffusion equation. SIAM J. Appl. Math. 41 (1981), 210–221.

Manuskripteingang: 02. 12. 1987

VERFASSER:

Doz. Dr. sc. SYBILLE HANDROCK-MEYER
 Sektion Mathematik der Technischen Universität
 PSF 964
 DDR-9010 Karl-Marx-Stadt