

## Identifikation von Interferenzschichtsystemen

H. KAISER und H.-C. KAISER

Wesentliche Methoden der Identifikation geschichteter Medien werden unter systemtheoretischen Gesichtspunkten zusammengefaßt und einheitlich begründet. Neue Ergebnisse betreffen funktionentheoretische Eigenschaften der Transferkoeffizienten und eine geschlossene Darstellung der Synthese optimaler Achromasiesysteme. Leitlinie für die Identifikation der beim Einfall elektromagnetischer Wellen als lineare Übertragungssysteme fungierenden geschichteten Medien ist die Abgrenzung zweier Arbeitsstufen: Die erste zielt auf die Bestimmung der frequenzabhängigen Systemfunktion, die zweite auf die davon ausgehende Strukturaufklärung. Das Konzept wird am Beispiel der Identifikation des homogenen Halbraumes und eines Stapels homogener Schichten gleicher optischer Dicke durchgeführt und mit Bezug auf die verfügbaren Meßwerte bzw. Vorgaben methodologisch kommentiert.

Основные методы идентификации слоистых сред рассматриваются с системно-теоретической точки зрения и едино обосновываются. Новые результаты получены о функционально-теоретических свойствах трансферных коэффициентов, а также о полном представлении синтеза оптимальных ахроматизированных систем. Главным для идентификации слоистых сред как линейных переносных систем, возникающих при впадении электромагнитных волн, является различение двух ступеней работы: цель первой ступени заключается в определении зависящей от частоты системной функции, цель второй — в исходящем из этого выяснении структуры системы. Эта концепция демонстрируется на примере идентификации однородного полупространства со стопкой однородных слоев одинаковой оптической толщины и, ссылаясь на имеющиеся в распоряжении измерения и данные, методологически комментируется.

A unified approach to methods and tendencies in the identification of layered media within the framework of systems theory is given. New results concerning the holomorphic properties of transfer coefficients and their characterization by differential equations come to bear. A complete universal method for the synthesis of optimal achromatic systems has been developed. — With regard to the reflection or transmission of electromagnetic waves stratified media act as linear transfer systems. The guiding principle in their identification has been to operate in the following two steps: the first objective in mind is to determine the system function depending on the frequency; based upon this characteristic of the system one then explores its internal structure. These conceptions have been carried out for a homogeneous halfspace and a stack of homogeneous layers of equal optical thickness. The methods are discussed with regard to the significance of measurements as well as prescribed values.

### 1. Mathematische Modellierung von Interferenzschichtsystemen

Wir untersuchen die Ausbreitung harmonischer elektromagnetischer Wellen in geschichteten Medien [1, 23, 26, 35, 37, 43, 54] und legen dabei ein kartesisches Koordinatensystem  $\mathbb{R}^3$  zu Grunde, in dem die  $z$ -Achse die Raumrichtung der Schichtung bestimmt;  $i, j, k$  seien die Achseneinheitsvektoren (vgl. Abb. 1). Die zeitfreien Anteile harmonischer Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (1.1)$$

genügen den Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } \hat{\mathbf{H}} - ik\hat{\epsilon}\hat{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot } \hat{\mathbf{E}} + ik\mu\hat{\mathbf{H}} = 0; \quad (1.2)$$

$\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  bedeuten den *elektrischen* bzw. *magnetischen Vektor*,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  den *Ortsvektor*,  $t$  die *Zeit*,  $\mu$  und  $\hat{\epsilon} = \epsilon - 4\pi i\sigma/\omega$  die *magnetische Permeabilität* bzw. *komplexe Dielektrizitätskonstante*,  $k = \omega/c$  und  $c$  die *Wellenzahl* bzw. *Lichtgeschwindigkeit* im Vakuum. Bei der Substitution

$$\hat{\mathbf{E}} := -\hat{\mathbf{H}}, \quad \hat{\mathbf{H}} := \hat{\mathbf{E}}, \quad \mu := \hat{\epsilon}, \quad \hat{\epsilon} := \mu \quad (1.3)$$

geht das System der Gleichungen (1.2) in sich über. Daraus folgt, daß jede daraus ableitbare Aussage über harmonische Felder wieder in eine solche übergeht, wenn man sie der Invarianztransformation (1.3) unterwirft. Das ist der Inhalt des *Dualitätsprinzips* der Maxwell'schen Theorie.

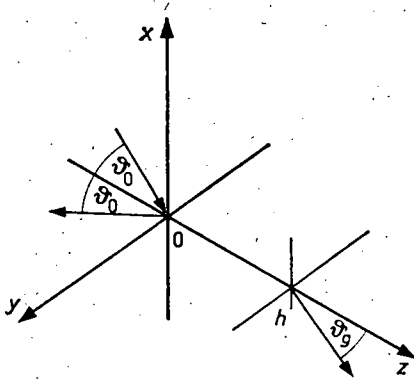


Abb. 1

Bezüglich des Koordinatensystems  $\mathfrak{R}$  führt man in geschichteten Medien die dualen Begriffe des *TE-Feldes* (transverse electric wave) und *TM-Feldes* (transverse magnetic wave) ein. In solchen schwingt der elektrische bzw. magnetische Vektor in  $x$ -Richtung; die von Null verschiedenen Komponenten der Feldvektoren erweisen sich als von  $x$  unabhängig. Umgekehrt läßt sich in einem geschichteten Medium jedes von  $x$  unabhängige Feld eindeutig in einen *TE-* und *TM-Anteil* zerlegen; damit zusammenhängende Größen werden mit  $s$  bzw.  $p$  ausgezeichnet. Beim Einfall einer ebenen harmonischen Welle

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A} \exp(-ikN\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}), & \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{A}} \exp(-ikN\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^1), \\ \tilde{\mathbf{A}} &= \frac{N}{\mu} \mathbf{s} \times \mathbf{A}, & \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} &= \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{s} = 0, & \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} &= 1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

( $N = \sqrt{\mu\hat{\epsilon}}$  — *komplexer Brechungsindex des Mediums*) wird die durch deren Fortpflanzungsvektor  $\mathbf{s}$  und die  $z$ -Achse der Schichtung bestimmte *Einfallsebene* mit der  $(y, z)$ -Ebene von  $\mathfrak{R}$  identifiziert, so daß

$$\mathbf{s} = \sin \vartheta_0 \mathbf{j} + \cos \vartheta_0 \mathbf{k} \quad (1.5)$$

ist, wobei  $\vartheta_0$  den Einfallswinkel bedeutet. Die Zerlegung von (1.4) in den TE- und

<sup>1)</sup> Auch für komplexe Vektoren  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  sei  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ .

TM-Anteil liefert

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= E_s \mathbf{j} + E_p \mathbf{l}, & \hat{\mathbf{H}} &= H_s \mathbf{l} + H_p \mathbf{j}, \\ E_s &= A_s \exp(-ikNr \cdot s), & H_s &= \frac{N}{\mu} A_s \exp(-ikNr \cdot s), \\ E_p &= A_p \exp(-ikNr \cdot s), & H_p &= -\frac{N}{\mu} A_p \exp(-ikNr \cdot s), \\ A_s &= A_z, & A_p &= s_z A_v - s_v A_z, & \mathbf{l} &= s_z \mathbf{j} - s_v \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Abb. 1 veranschaulicht die Standardsituation der Schichtenoptik: Zwischen den Ebenen  $z = 0$  und  $z = h$  von  $\mathfrak{R}$  befindet sich ein durch ein Brechzahlprofil  $N = N(z)$  charakterisiertes Stratum, das in den Halbräumen  $z < 0$  und  $z > h$  von zwei homogenen Medien mit den Brechzahlen  $N = N_0$  bzw.  $N = N_g$  begrenzt wird. Auf Grund der Maxwell'schen Theorie existiert ein harmonisches elektromagnetisches Feld, das im Halbraum  $z < 0$  Superposition einer einfallenden und reflektierten ebenen Welle ist und durch ein Feld in  $0 \leq z \leq h$  mit einer in den Halbraum  $z > h$  transmittierten ebenen Welle gekoppelt ist. Dabei sind die Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  an den Trennebenen stetig. Die Fortpflanzungsrichtungen der reflektierten und transmittierten Welle sind durch die Einheitsvektoren

$$s_r = \sin \vartheta_0 \mathbf{j} - \cos \vartheta_0 \mathbf{k} \quad \text{bzw.} \quad s_t = \sin \vartheta_g \mathbf{j} + \cos \vartheta_g \mathbf{k} \quad (1.7)$$

gegeben, wobei  $\vartheta_0$  durch das Snelliussche Brechungsgesetz

$$N_0 \sin \vartheta_0 = N_g \sin \vartheta_g \quad (1.8)$$

bestimmt ist. Auf Grund von (1.5) und (1.7) sind die Felder in  $z < 0$  und  $z > h$  von  $x$  unabhängig und lassen sich somit in TE- und TM-Anteile zerlegen, die durch ein TE- bzw. TM-Feld in der Schicht gekoppelt sind. Nach ABELÈS [1] wird dieser Zusammenhang durch je eine charakteristische ( $2 \times 2$ )-Matrix  $M^{(s)}$  bzw.  $M^{(p)}$  vermittelt, deren Elemente vom Brechzahlprofil der Schicht in  $0 \leq z \leq h$ , der Frequenz der einfallenden Welle und vom Einfallswinkel  $\vartheta_0$  abhängen und aus gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmt werden, die sich durch Separation der Gleichungen (1.2) ergeben. Auf diese Weise berechnet man  $M^{(s)}$  und  $M^{(p)}$  zunächst über den Stetigkeitsintervallen des Brechzahlprofils. Wenn dieses Sprünge enthält, findet man  $M^{(s)}$  und  $M^{(p)}$  für das Gesamtsystem durch Multiplikation der Teilmatrizen in der der Lichtausbreitung entsprechenden Reihenfolge. Die Matrizen  $M^{(s)}$  und  $M^{(p)}$  sind zueinander dual. Für reellen Einfallswinkel und dielektrische Medien sind bei Abwesenheit von Totalreflexion die Elemente in der Hauptdiagonalen reell, in der Nebendiagonalen rein imaginär.

Für die Tangentialkomponenten der TE- bzw. TM-Felder bei  $z = 0$  und  $z = h$  gilt

$$\begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix}_{z=0} = M^{(s)} \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \end{pmatrix}_{z=h} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -H_x \\ E_y \end{pmatrix}_{z=0} = M^{(p)} \begin{pmatrix} -H_x \\ E_y \end{pmatrix}_{z=h} \quad (1.9)$$

Mit den durch (1.6) definierten Senkrecht- und Parallelkomponenten von  $\mathbf{E}$ ,  $E_s$ ,  $E_t$  — der elektrischen Vektoren der einfallenden, reflektierten bzw. transmittierten Welle — werden die folgenden *Transferkoeffizienten* gebildet. Diese haben eine fundamentale systemtheoretische Bedeutung und gestatten es, die mit der Identifikation geschichteter Medien zusammenhängenden Probleme übersichtlich zu formulieren und bei ihrer Lösung Arbeitsstufen abzugrenzen.

Reflexionskoeffizienten:

$$r_s = \frac{E_{rs}|_{z=0}}{E_s|_{z=0}} \quad \text{und} \quad r_p = \frac{E_{rp}|_{z=0}}{E_p|_{z=0}} \quad (1.10)$$

Transmissionskoeffizienten:

$$t_s = \frac{E_{ts}|_{z=h}}{E_s|_{z=0}} \quad \text{und} \quad t_p = \frac{E_{tp}|_{z=h}}{E_p|_{z=0}} \quad (1.11)$$

Kardsche Transmissionskoeffizienten (2. Art):

$$d_s = \sqrt{Y_g^{(s)}/Y_0^{(s)}} t_s \quad \text{und} \quad d_p = \sqrt{Y_g^{(p)}/Y_0^{(p)}} t_p \quad (1.12)$$

Hierin bedeuten

$$Y^{(s)} = \frac{N}{\mu} \cos \vartheta \quad \text{und} \quad Y^{(p)} = \frac{\mu}{N} \cos \vartheta, \quad (1.13)$$

wobei der untere Index auf das zu betrachtende Medium hinweist. Die in (1.10) und (1.12) definierten Senkrecht- und Parallel-Koeffizienten sind dual bezüglich der Invarianztransformation (1.3). Es sei

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

die charakteristische Matrix des geschichteten Mediums in  $0 \leq z \leq h$  für ein TE- oder TM-Feld. Dann lassen sich der Reflexionskoeffizient  $r$  und der Kardsche Transmissionskoeffizient  $d$  gemäß

$$r = \frac{Y_0(M_{11} + Y_g M_{12}) - (M_{21} + Y_g M_{22})}{Y_0(M_{11} + Y_g M_{12}) + (M_{21} + Y_g M_{22})} \quad (1.15)$$

und

$$d = \frac{2\sqrt{Y_0 Y_g}}{Y_0(M_{11} + Y_g M_{12}) + (M_{21} + Y_g M_{22})} \quad (1.16)$$

bestimmen, wobei diese Ausdrücke durch entsprechende Auszeichnung mit  $s$  und  $p$  für das TE- bzw. TM-Feld zu aktualisieren sind.

## 2. Geschichtete Medien als lineare Übertragungssysteme und deren Identifikation

Geschichtete Medien fungieren im Rahmen der Maxwell'schen Theorie als lineare Übertragungssysteme [21]. In dieser Sicht kann man etwa die Reflexion einer TE-Welle an der vorderen Trennebene des Stratums betrachten, wobei die  $x$ -Komponente des elektrischen Vektors der einfallenden und reflektierten Welle bei  $z = 0$  das zeitabhängige Ein- bzw. Ausgabesignal  $X$ ,  $Y$  ist. Das Input-Output-Verhalten des Systems  $\mathcal{S}$  läßt sich in einer geeignet gewählten Faltungsalgebra  $\mathcal{M}$  durch eine Responseformel

$$Y = \mathcal{S}[X] = G * X \quad (X, Y, G \in \mathcal{M}) \quad (2.1)$$

beschreiben. Für den Übertragungsfaktor  $G$  gilt

$$G = \mathcal{S}[\delta], \quad (2.2)$$

wobei  $\delta$  das als Dirac-Impuls zu deutende Einselement von  $\mathcal{M}$  ist. Bei der Untersuchung kausaler Signale ( $X(t) = 0$  für  $t < 0$ ) ist es zweckmäßig [11, 40],  $\mathcal{M}$  als den Körper der Mikusiński-Operatoren [44] zu wählen. Das ist der Quotientenkörper des Integritätsbereiches  $\mathcal{C}$  der auf  $[0, \infty)$  stetigen komplexwertigen Funktionen bezüglich der Multiplikation

$$(F_1 * F_2)(t) = \int_0^t F_1(t - \tau) F_2(\tau) d\tau \quad (F_1, F_2 \in \mathcal{C}).$$

Die als Element von  $\mathcal{M}$  mit  $l$  bezeichnete Heaviside-Funktion fungiert gemäß  $(l * F)(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau$  als Integrationsoperator,  $s = \delta/l$  als Differentiationsoperator. Nach (2.1), (2.2) ist  $\mathcal{S}[l] = \mathcal{S}[\delta] * l, G = \mathcal{S}[\delta] = s * \mathcal{S}[l]$ .

Das diskrete Analogon zu  $\mathcal{M}$  ist die Faltungsalgebra  $\mathcal{K}$  der Elementfolgen über einem Körper  $K$ , die der mathematischen Modellierung linearer Automaten zugrunde liegt. Als Verknüpfungsoperationen in der Gesamtheit  $\mathcal{R}$  dieser Folgen definiert man für  $a = \{a_t\}$  und  $b = \{b_t\}$  aus  $\mathcal{R}$  ( $a_t, b_t \in K; t \in \mathbb{N}$ ) und  $\alpha$  aus  $K$

$$a + b = \{a_t + b_t\}, \quad a * b = \left\{ \sum_{j=0}^t a_{t-j} b_j \right\}, \quad \alpha a = \{\alpha a_t\}. \quad (2.3)$$

$\mathcal{R}$  ist bezüglich  $+$  und  $*$  ein Integritätsbereich,  $\mathcal{K}$  der zugehörige Quotientenkörper, das Einselement von  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{K}$  ist  $\delta = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ , und dem Integrationsoperator in  $\mathcal{M}$  entspricht der Summationsoperator  $l = \{1, 1, 1, \dots\}$ . Für den Verschiebungsoperator  $p = \{0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$  gilt mit Bezug auf (2.3)  $p * a = \{0, a_0, a_1, a_2, \dots\}$ .  $K$  ist vermöge  $\alpha\delta \leftrightarrow \alpha$  ( $\alpha \in K$ ) isomorph in  $\mathcal{K}$  eingebettet; dementsprechend wird  $\alpha\delta$  durch  $\alpha$  ersetzt.

Die Responseformel (2.1) beschreibt das Systemverhalten in der Zeit, und die Bestimmung von  $G$  in der Faltungsalgebra als Quotient aus einem bekannten Output und entsprechendem Input wird als *Zeitganganalyse* bezeichnet. Diese ist in dem hier erörterten Problemkreis der Optik kaum durchführbar. Stattdessen ist man auf die *Frequenzganganalyse* von  $\mathcal{S}$  verwiesen, die auf der Eigenschaft linearer Übertragungssysteme beruht, unter gewissen Voraussetzungen auf harmonische Eingangssignale  $\bar{X} = A \exp(i\omega t)$  stationär mit einem harmonischen Output  $Y = B \exp(i\omega t)$  zu antworten. Das Amplitudenverhältnis  $B/A$  ist eine Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$ , die mit dem Übertragungsfaktor (2.2) gemäß

$$G(i\omega) = B/A \quad (2.4)$$

zusammenhängt.  $G(i\omega)$  wird als *Systemfunktion* bezeichnet; ihre Bestimmung ist Anliegen der Frequenzganganalyse.

Auf Grund von (2.4) und (1.10), (1.11) erweisen sich der Reflexions- und Transmissionskoeffizient als Systemfunktionen, die jedoch direkt nicht meßbar sind. Als meßbare Größen stehen in der Optik für die Frequenzganganalyse der *ellipsometrische Quotient*

$$r_p/r_s = \tan \psi e^{i\delta}$$

und die mit der reflektierten und transmittierten Welle transportierten Anteile  $R$  bzw.  $T$  der einfallenden Energie zur Verfügung. Sie werden als *Reflexions-* bzw. *Transmissionsgrad* bezeichnet und sind durch

$$R = \mathcal{E}_B|_{z=0} \cdot \mathbf{k} / \mathcal{E}_A|_{z=0} \cdot \mathbf{k} \quad \text{und} \quad T = \mathcal{E}_C|_{z=h} \cdot \mathbf{k} / \mathcal{E}_A|_{z=0} \cdot \mathbf{k}$$

definiert. Darin bedeuten  $\mathcal{S}_A|_{z=0}$ ,  $\mathcal{S}_B|_{z=0}$  und  $\mathcal{S}_C|_{z=h}$  die zeitlich gemittelten *Poynting-vektoren* der einfallenden, reflektierten und transmittierten (ebenen) Welle bei  $z = 0$  bzw.  $z = h$  und übereinstimmender  $y$ -Koordinate. Für den Reflexions- bzw. Transmissionsgrad  $R_s$  und  $T_s$  des TE-Feldes ergibt sich mit (1.10)–(1.13) (vgl. [23, 26])

$$R_s = |r_s|^2 \quad \text{und} \quad T_s = \frac{|\operatorname{Re}[Y_g^s] Y_0^s|}{|\operatorname{Re}[Y_0^s] Y_g^s|} |d_s|^2 \quad (2.5)$$

und durch Dualisierung für die entsprechenden Größen des TM-Feldes

$$R_p = |r_p|^2 \quad \text{und} \quad T_p = \frac{|\operatorname{Re}[Y_g^p] Y_0^p|}{|\operatorname{Re}[Y_0^p] Y_g^p|} |d_p|^2. \quad (2.6)$$

Auf Grund dessen sind die Beträge der Transferkoeffizienten durch Intensitätsmessungen in ihrer spektralen Abhängigkeit bestimmbar. Um die komplexen Größen selbst zu finden, muß man noch ein Phasenrekonstruktionsproblem [5] lösen.

Wenn der Übertragungsfaktor  $G$  (in der Schichtenoptik also ein entsprechender Transferkoeffizient) bekannt ist, läßt sich das Verhalten von  $\mathcal{S}$  vorausberechnen. Das ist ein erster Schritt der Systemerkennung. Ein weitergehender ist auf die Bestimmung der Struktur von  $\mathcal{S}$  im Rahmen einer Modellvorstellung oder *Strukturhypothese* gerichtet, die in der Vorgabe einer Klasse  $\Sigma$  von Systemen bestimmter Art besteht.

Unsere Auffassung von *Identifikation* beinhaltet die Synthese und Erkennung von Systemen in  $\Sigma$ , d. h. die Bestimmung ihrer Struktur auf Grund von Vorgaben über ein zu realisierendes Verhalten bzw. von Beobachtungen (Messungen) desselben an einem existierenden System. Es ist also in  $\Sigma$  ein System  $\mathcal{S}$  zu finden, das mit seinem Verhalten solchen Gegebenheiten möglichst gut entspricht. Bei geschichteten Medien beziehen sich Strukturparameter wesentlich auf die Charakterisierung des Brechzahlprofils; Messungen betreffen Energieanteile wie Reflexions- und Transmissionsgrad und ellipsometrische Größen.

Methoden zur Identifikation linearer Übertragungssysteme setzen die Kenntnis der Systemfunktion voraus. Hier lassen sich bezüglich einer Modellvorstellung  $\Sigma$  zwei Arbeitsstufen abgrenzen:

- (i) *Bestimmung der Systemfunktion als Lösung eines Phasenrekonstruktionsproblems* (1. Identifikationsproblem).
- (ii) *Lösung des Strukturproblems durch Interpretation der Systemfunktion in  $\Sigma$*  (2. Identifikationsproblem).

Im folgenden Abschnitt werden dazu die theoretischen Grundlagen erörtert.

### 3. Methoden der Systemidentifikation

Die Identifikation linearer Übertragungssysteme beruht auf funktionentheoretischen Eigenschaften der Systemfunktion. Diese läßt sich unter gewissen Voraussetzungen [47, 52, 55] als Laplace-Transformierte der Systemantwort (2.2) auf den Dirac-Impuls charakterisieren. Aus den Eigenschaften des Laplace-Integrals ergibt sich dann, daß die Systemfunktion

$$G(i\omega) = \rho(\omega) \exp(i\Phi(\omega)) \quad (3.1)$$

in der von der  $\omega$ -Achse berandeten unteren Halbebene einer komplexen Frequenz  $\omega$

holomorph ist [21, 33]. Überdies gilt [33: (2.5.7)]

$$\varrho(-\omega) = \varrho(\bar{\omega}), \quad \Phi(-\omega) = -\Phi(\bar{\omega}), \quad (3.2)$$

auch auf der reellen  $\omega$ -Achse. Unter der Voraussetzung, daß die Systemfunktion (3.1) in  $\text{Im } \omega < 0$  keine Nullstellen hat — also ein Mindestphasensystem vorliegt — existiert ein in der unteren  $\omega$ -Halbebene holomorpher Zweig des Logarithmus  $\log G(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$ . Der Realteil desselben ist

$$u = \ln \varrho(\omega), \quad (3.3)$$

der Imaginärteil  $v$  ein Phasenwert von (3.1). Damit ist das Phasenrekonstruktionsproblem (i) (s. Ende von Abschnitt 2) auf ein funktionentheoretisches Randwertproblem zurückgeführt:

In der unteren  $\omega$ -Halbebene ist eine holomorphe Funktion  $w = u + iv$  zu bestimmen, von der die Randwerte des Realteils  $u$  auf der reellen  $\omega$ -Achse durch  $u = \ln \varrho(\omega)$  gegeben sind. Die Randwerte des Imaginärteils  $v$  der Lösung, die das Phasenspektrum liefern, können aus denen des Realteils  $u$  durch die Hilbert-Transformation gewonnen werden:

$$v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - \omega} d\tau \quad \text{und} \quad u(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\tau)}{\tau - \omega} d\tau, \quad (3.4)$$

wobei die uneigentlichen Integrale im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen sind. — Mit Bezug auf die frequenzabhängige Dielektrizitäts„konstante“ sind die Formeln (3.4) als *Kramers-Kronig-Relationen* bekannt.

Ein allgemeineres gemischtes Randwertproblem wird durch die *Formel von Keldysch-Sedow* (vgl. z. B. [41]) gelöst. Dabei handelt es sich darum, eine in der oberen Halbebene holomorphe Funktion zu bestimmen, die auf den offenen Intervallsegmenten einer Zerlegung der reellen Achse abwechselnd gegebene Werte des Real- und Imaginärteils, sowie einen vorschreibbaren Wert im Unendlichen annimmt. In [33] wird auf diese Weise eine Systemfunktion — dort ein Reflexionskoeffizient — zu den Vorgaben für einen dielektrischen Spiegel über einem Wellenlängenintervall ermittelt.

Die Lösung des Phasenrekonstruktionsproblems vereinfacht sich im Hinblick auf die erforderlichen Meßdaten und einzusetzenden mathematischen Methoden, wenn dafür eine spezielle Strukturhypothese  $\mathcal{Z}$  zugrunde gelegt wird. Wir werden das im einfachsten Fall der Identifikation eines homogenen Halbraums (s. Abschnitt 4) und für die Klasse  $\mathcal{Z}$  aller Stapel einer festen Anzahl  $S$  homogener dielektrischer Schichten gleicher optischer Dicke (s. Abschnitt 5) erläutern.

Wir wenden uns nun der Lösung des 2. Identifikationsproblems — der Strukturbestimmung aus der Systemfunktion — zu. Diese sei hier der Reflexionskoeffizient (1.10) eines geschichteten dielektrischen Mediums in  $z \geq 0$  an dessen Trennfläche  $z = 0$  zu einem homogenen vorgelagerten Dielektrikum. Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir senkrechten Lichteinfall voraus und betrachten dann den TE-Reflexionskoeffizienten  $r = r_s$ . Ziel ist die Bestimmung des (reellen) Brechzahlprofils  $n = n(z)$  in  $z \geq 0$  aus dem spektralen Verlauf von  $r$ . Grundlage dafür ist die Darstellung von  $r$  durch die *Bremmersche Reihe* ([9] und [23: Abschnitt 2.5]) und insbesondere die Approximation durch deren erstes Glied

$$r(k) \approx -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{n'(z)}{n(z)} \exp\left(-ik \int_0^z n(\zeta) d\zeta\right) dz.$$

Hieraus gewinnt man eine explizite Darstellung des Brechzahlprofils

$$n(x) = n(0) \exp\left(-2 \int_{-2x}^0 F(\xi) d\xi\right) \quad (3.5)$$

in Abhängigkeit von der optischen Dicke

$$x(z) := \int_0^z n(\zeta) d\zeta \quad (3.6)$$

durch die Fourier-Transformierte des Reflexionskoeffizienten

$$F(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} r(k) dk = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} r(k) e^{-ikz} dk \quad (3.7)$$

[27; 29]. Im Falle eines unstetigen Brechzahlprofils hat man (3.5) und (3.7) in distributivem Sinne zu interpretieren; Sprünge im Brechzahlprofil korrespondieren dann mit Dirac-Impulstermen in der Fourier-Transformierten von  $r$  [27].<sup>2)</sup>

Bei einem im ganzen Raum stetigen hinreichend glatten Brechzahlprofil entspricht der Näherungslösung (3.5) des Strukturproblems eine solche des inversen Problems für die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi = k^2\Psi, \quad (3.8)$$

mit dem Potential  $V(x) = n(x)^{-1/2} d^2\sqrt{n(x)}/dx^2$ , die auf MOSES [45] zurückgeht. In Abhängigkeit von der optischen Dicke (3.6) hängt die Lösung  $\Psi = \Psi(x, k)$  von (3.8) gemäß  $\Psi(x, k) = \sqrt{n(x)} \mathcal{U}(x, k)$  mit der Lösung  $U(z, k) = \mathcal{U}(x, k)$  der Schwingungsgleichung  $d^2U/dz^2 + k^2n^2U = 0$  zusammen, welche die  $x$ -Komponente des elektrischen Vektors  $\hat{E}_x = U(z, k) \exp(-ikN_0 \times \sin \theta_0 y)$  bestimmt. In diesem Rahmen wurde (3.5) von HIRSCH abgeleitet [13].

Kennt man beispielsweise den Reflexionsgrad und damit den Betrag der Systemfunktion  $r$  für alle Frequenzen, so gewinnt man gemäß (3.2), (3.3) die Randwerte von  $\log r$  auf der reellen  $\omega$ -Achse und daraus nach (3.4) ein Phasenspektrum von  $r$ . Aus der somit über dem ganzen Spektrum bekannten Systemfunktion  $r$  läßt sich das Brechzahlprofil — z. B. durch (3.5)–(3.7) näherungsweise — berechnen, womit auch das Strukturproblem gelöst ist. Die Schwierigkeiten bei diesem Vorgehen liegen in der Erfassung des Reflexionsgrades über dem ganzen Spektrum und der numerischen Auswertung der involvierten Integrale.

Die Feststellung, daß ein geschichtetes Medium beim Einfall einer ebenen harmonischen Welle als lineares Übertragungssystem fungiert, setzt natürlich eine bestimmte Betrachtung voraus. Sie ist z. B. nicht zutreffend, wenn an Stelle der Input-Output-Situation in Abschnitt 2 eine Energiegröße wie der Reflexions- oder Transmissionsgrad das Ausgangssignal darstellt.

Bei der Strukturaufklärung nichtlinearer Systeme ist unmittelbar von einer bestimmten Modellvorstellung auszugehen. Wir wollen auf einige oft benutzte Identifikationsmethoden hinweisen, welche eine  $m$ -parametrische Strukturhypothese

$$\Sigma = \Sigma_{\mathbf{A}} = \{\mathcal{S}_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^m\} \quad (3.9)$$

zugrunde legen [31]. Das Verhalten eines Systems  $\mathcal{S}_{\mathbf{a}}$  der Klasse (3.9) werde durch den Werteverlauf einer auf einer Menge  $\mathbf{X}$  definierten Funktion

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{F}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_{\mathbf{a}}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} \quad (3.10)$$

charakterisiert, welche neben dem Argumentvektor  $\mathbf{x}$  den Parametervektor  $\mathbf{a}$  enthält. Die Messungen bzw. das gewünschte Verhalten des Systems seien durch die

<sup>2)</sup> In [27] werden auf schneller Fourier-Transformation und „Peak detection“ beruhende numerische Realisierungen der Brechzahlprofilbestimmung auf Grund einer Diskretisierung von (3.5) untersucht.



Funktion

$$f: X \rightarrow Y \tag{3.11}$$

gegeben. Die im folgenden skizzierten Methoden unterscheiden sich in der Art der Anpassung der Strukturparameter an die Vorgaben. Häufig betrachtet man die Funktionen (3.10) und (3.11) in ihrer Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  als Element eines linear normierten Funktionenraumes und konstruiert mit dessen Norm  $\|\cdot\|$  die Ziel-(Merit-)funktion

$$Z(\mathbf{a}) := \|f - F_{\mathbf{a}}\|. \tag{3.12}$$

„Gute“ Systeme in (3.9) sind dann durch Minima von  $Z$  ausgezeichnet. Zu ihrer Bestimmung werden Suchverfahren der nichtlinearen Optimierung eingesetzt, die aber im allgemeinen nur relative Extrema von (3.12) ermitteln. Um unter diesen ein absolutes zu finden, ist es unumgänglich, Suchprozesse wiederholt von verschiedenen Startsituationen aus zu initiieren. Die Durchführung dieses Konzepts wird mit wachsender Dimension des Parameterraumes fragwürdig. — Bewährt hat sich in vielen Praxisbereichen das ableitungsfreie Simplexverfahren von NELDER und MEAD [46, 48]. In [22, 24] wird die Abhängigkeit der Minima von der in (3.12) benutzten Norm für spezielle Synthesaufgaben der Schichtenoptik untersucht.

Die Minimierung von (3.12) über der Klasse (3.9) ist eine Aufgabe der Approximationstheorie. In Spezialfällen ist es möglich, die gesuchte Bestapproximation auf Grund ihrer theoretischen Charakterisierung ohne Suchprozesse zu bestimmen. Ein Beispiel dafür ist die Methode von Tschebyscheff, die voraussetzt, daß die Funktionen (3.10) Polynome eines bestimmten Grades  $S$  in einer reellen Veränderlichen  $x$  sind:

$$F_{\mathbf{a}}(x) = A_S(\mathbf{a}) x^S + A_{S-1}(\mathbf{a}) x^{S-1} + \dots + A_1(\mathbf{a}) x + A_0(\mathbf{a}); \tag{3.13}$$

$X$  sei ein endliches Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und in (3.12) wird  $\|f - F_{\mathbf{a}}\| = \max_{x \in I} |f(x) - F_{\mathbf{a}}(x)|$  gewählt. An dieser Stelle sei erwähnt, daß Tschebyscheff seine für die Theorie der gleichmäßigen Approximation grundlegenden Ideen im Zusammenhang mit der angenäherten Synthese von Gelenkmechanismen entwickelt hat [8, 10]. Auch in anderen Anwendungsbereichen ist in (3.12) die Maximum-Betrag-Norm angemessen. Im letzten Abschnitt werden wir das in Verbindung mit der optimalen Synthese von Achromasiesystemen erläutern.

Die Tschebyscheff-Methode der Systemsynthese beruht auf einer charakteristischen Eigenschaft der durch  $T_S(x) = \cos(S \arccos x)$  definierten Tschebyscheff-Polynome 1. Art: Die normierten Polynome  $1/2^{S-1} T_S$  weichen unter allen Polynomen  $S$ -ten Grades mit dem Leitkoeffizienten 1 über dem Intervall  $[-1, 1]$  im Sinne der Maximum-Betrag-Norm am wenigsten von Null ab. Für ein beliebiges Intervall  $[\alpha, \beta]$  wird diese Bestapproximation von den Polynomen

$$\tilde{T}_S(\zeta) = \frac{(\beta - \alpha)^S}{2^{2S-1}} T_S\left(\frac{2\zeta - (\beta + \alpha)}{\beta - \alpha}\right) = \sum_{j=0}^S p_j(\alpha, \beta) \zeta^j, \quad p_S(\alpha, \beta) = 1 \tag{3.14}$$

realisiert; die maximale Abweichung von Null ist

$$\max_{\alpha \leq \zeta \leq \beta} |\tilde{T}_S(\zeta)| = \frac{(\beta - \alpha)^S}{2^{2S-1}}. \tag{3.15}$$

Die Polynome  $\tilde{T}_S$  genügen der Differentialgleichung

$$(\beta - \zeta)(\zeta - \alpha) \tilde{T}_S''(\zeta) - \left(\zeta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \tilde{T}_S'(\zeta) + S^2 \tilde{T}_S(\zeta) = 0. \tag{3.16}$$

Durch Koeffizientenvergleich gewinnt man mit (3.16) und (3.14)

$$p_{S-1}(\alpha, \beta) = -S(\alpha + \beta)/2 \quad (3.17)$$

und für  $j = 0, 1, \dots, S - 2$  die Rekursionsformel

$$p_j = \frac{j+1}{S^2 - j^2} \left( \alpha\beta(j+2) p_{j+2} - (\alpha + \beta) \left( j + \frac{1}{2} \right) p_{j+1} \right).$$

Induktiv läßt sich damit die explizite Koeffizientenformel

$$p_j(\alpha, \beta) = (-1)^{S-j} \binom{S}{j} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^{S-j} \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{S-j}{2} \rfloor} \left( -\frac{1}{4} \right)^\nu \left( \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \right)^{2\nu} \frac{\binom{S-j}{2\nu}}{\binom{S-1}{\nu}} \binom{2\nu}{\nu} \quad (3.18)$$

( $j = 0, 1, \dots, S - 1$ ) beweisen. Speziell folgt aus ihr

$$p_{S-2}(\alpha, \beta) = \frac{S}{16} (2(S-1)(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2) \quad (3.19)$$

und aus (3.17), (3.19)

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{2}{S} p_{S-1}(\alpha, \beta), \\ (\alpha - \beta)^2 &= \frac{8}{S} \left( \frac{S-1}{S} p_{S-1}^2(\alpha, \beta) - 2p_{S-2}(\alpha, \beta) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Damit kann man in den Gleichungen (3.18)  $\alpha, \beta$  eliminieren und gewinnt auf diese Weise  $S - 2$  Beziehungen für die Koeffizienten der Polynome  $\hat{T}_S$ . Diese sogenannten *Grundgleichungen* gestatten es, die Lösungen von Syntheseaufgaben unabhängig vom Intervall  $[\alpha, \beta]$  im Parameterraum zu lokalisieren und unter Umständen zu entscheiden, ob praxisrelevante Lösungen existieren. Im Zusammenhang mit der angenäherten Synthese von Mechanismen werden solche Fragen in [8] und [31] erörtert. Beispielsweise ergibt sich für  $S = 3$  eine Grundgleichung, und zwar  $27p_0 = p_2(9p_1 - 2p_2^2)$ . Von besonderem Praxisinteresse ist der Fall  $\alpha = 0$ , wo sich (3.18) zu

$$p_j(0, \beta) = (-1)^{S-j} \binom{S}{j} \left( \frac{\beta}{2} \right)^{S-j} \frac{(2S-3)(2S-5)\dots(2j+1)}{(2S-2)(2S-3)\dots(S+j)}$$

spezialisiert. Durch Elimination von  $\beta$  gemäß  $\beta = -(2/S) p_{S-1}(0, \beta)$  (vgl. (3.20)) gewinnt man daraus  $S - 1$  Grundgleichungen, etwa für  $S = 2$  die Gleichung  $p_0 = p_1^2/8$ .

Zahlreiche Praxisprobleme erfordern, den Parametervektor  $\mathbf{a}$  in (3.13) so zu bestimmen, daß  $\mathbf{F}_\bullet$  über einem Intervall  $[\alpha, \beta]$  von einem vorgegebenen Wert  $H$  möglichst wenig abweicht. Dazu gehören z. B. Aufgaben der Geradföhrung von Punkten eines Gelenkmechanismus und in der Optik die Synthese von Achromasiesystemen. — Zur optimalen Minimierung von (3.12) bezüglich des Intervalls  $[\alpha, \beta]$  und der Funktion (3.11)  $\mathbf{f} \equiv H$  im Sinne gleichmäßiger Approximation hat man die Koeffizienten des aus (3.13) abgeleiteten Polynoms  $(\mathbf{F}_\bullet - H)/A_S$  mit denen von (3.14) zu vergleichen und aus diesen Beziehungen die Strukturparameter  $a_1, a_2, \dots, a_m$  zu bestimmen. Auf diese Weise ergeben sich folgende Synthesegleichungen:

$$\frac{A_0 - H}{A_S} = p_0(\alpha, \beta), \quad \frac{A_1}{A_S} = p_1(\alpha, \beta), \dots, \quad \frac{A_{S-1}}{A_S} = p_{S-1}(\alpha, \beta). \quad (3.21)$$

Der im Zusammenhang mit der Minimierung von Meritfunktionen angedeutete „Fluch der Dimension“ war für BELLMAN Veranlassung, eine als *Quasilinearisation* bezeichnete universelle Identifikationsmethode zu entwerfen [6, 15, 34]. Dabei wird angenommen, daß die in (3.9) zu bestimmenden Strukturparameter in einem das Systemverhalten beschreibenden Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\mathbf{w}' = \mathbf{g}(z, \mathbf{w}, \mathbf{a}), \quad 0 \leq z \leq h, \quad \mathbf{w}(h) = \mathbf{c}(\mathbf{a}) \tag{3.22}$$

auftreten. Die ersten  $l$  Komponenten von  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^L$  sind Verhaltensgrößen von  $\mathcal{S}_a$ , welche bei  $z = 0$  einem entsprechenden Tupel  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^l$  von Meßwerten bzw. Vorgaben anzupassen sind. Quasilinearisation ist eine darauf bezogene iterative Technik zur Identifikation des Parametervektors  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ . Dazu wird dieser als konstante Vektorfunktion  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(z) = \text{const}$  durch

$$\mathbf{a}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(h) = \mathbf{a} \tag{3.23}$$

charakterisiert. Mit

$$\mathbf{W}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}(z) \\ \mathbf{a}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(z, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(z, \mathbf{w}, \mathbf{a}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{c}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

gewinnt man aus (3.22), (3.23) das neue Anfangswertproblem

$$\mathbf{W}' = \mathbf{G}(z, \mathbf{W}), \quad \mathbf{W}(h) = \mathbf{C}(\mathbf{a}). \tag{3.24}$$

Das schrittweise vorgehende Verfahren beginnt mit der Auswahl eines Vektors  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$  und der – im allgemeinen numerischen – Integration des dadurch spezifizierten Anfangswertproblems (3.24); die entsprechende Lösung sei  $\mathbf{W}_0$ . Ausgehend von  $\mathbf{W}_j$  gewinnt man  $\mathbf{W}_{j+1}$  durch Linearisierung von (3.24) an der Stelle  $\mathbf{W}_j$ ,

$$\mathbf{W}' = \mathbf{G}(z, \mathbf{W}_j) + \mathcal{J}(z, \mathbf{W}_j) (\mathbf{W} - \mathbf{W}_j) \tag{3.25}$$

( $\mathcal{J} = \mathcal{J}(z, \mathbf{W})$ -Jacobi-Matrix von  $\mathbf{G}$ ) und Auswahl einer mit den Vorgaben  $\mathbf{Q}$  korrespondierenden Lösung von (3.25). Charakterisiert man den Lösungsraum von (3.25) durch

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{P}(z) + \mathcal{H}(z) \mathbf{b}, \tag{3.26}$$

wobei  $\mathbf{P}$  eine Lösung von (3.25) zur Anfangsbedingung  $\mathbf{P}(h) = \mathbf{0}$  und die Spalten  $\mathbf{H}_i$  der  $(L + m) \times (L + m)$ -Matrix  $\mathcal{H}$  ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung mit  $\mathcal{H}(h) = \text{Einheitsmatrix}$  bilden, so wird  $\mathbf{W}_{j+1}$  in (3.26) durch die Lösung  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^*$  eines mit Bezug auf die Vorgaben  $\mathbf{Q}$  problemrelevant zu formulierenden Approximationsproblems definiert. Im Konvergenzfall liefert die Vektorfolge  $\{\mathbf{W}_j(h)\}_{j=1}^{\infty}$  mit den letzten  $m$  Komponenten einen Vektor  $\mathbf{a}^*$  als Lösung des Identifikationsproblems. – Wie von der Struktur her zu erwarten, weist das Verfahren auch im Konvergenzverhalten Ähnlichkeit mit dem Newtonschen Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme auf.

In der Schichtenoptik resultiert (3.22) aus einer Riccatischen Differentialgleichung für den Reflexionskoeffizienten  $r$ , die auf WALKER und WAX [53] und KOFIŇK [38] zurückgeht (vgl. [14, 26]) und sich mit dem Bellmanschen Prinzip des „invariant imbedding“ gewinnen läßt [7, 15]. Die Komponenten von  $\mathbf{w}$  bedeuten den Betrag und die Phase von  $r$  für verschiedene Wellenlängen;  $z$  ist die Koordinate der Schichtung. – Numerische Experimente zur Identifikation von Interferenzschichtsystemen durch Quasilinearisation sind in [32] dargestellt.

Bei Strukturmodellen mit kleiner Parameteranzahl kann man versuchen, die dem Identifikationsproblem immanente Ambiguität durch endliche Diskretisierung des Parameterraumes auszuschöpfen, indem man das Verhalten der entsprechenden Systeme mit dem durch (3.11) vorgegebenen vergleicht. In Anbetracht der großen Zahl von Fallstudien kommt es mit Rücksicht auf vertretbare Rechenzeiten darauf an, universelle – d. h. für jeden Fall relevante – Größen zu bestimmen und als Hintergrunddaten für den gesamten Durchmusterungsprozeß bereitzustellen. Weitere Voraussetzung für die Durchführbarkeit der Methode sind schnelle Algorithmen der automatischen Kurvendiskussion. In dieser Hinsicht haben sich durch den Dialogverkehr über Bildschirm neue Möglichkeiten eröffnet. Derartige Complete-Scanning-Algorithmen wurden für Stapel mit kleiner Schichtenzahl entwickelt und mit Erfolg bei der Lösung von Synthesaufgaben erprobt [16, 29–31].

Hat man in (3.9) eine Lösung  $\mathcal{S}_{a^*}$ ,  $a^* \in A$  als Bestapproximation vorliegender Identifikationsdaten bestimmt und werden weitere Meßgrößen (möglicherweise von anderer physikalischer Qualität) durch  $\mathcal{S}_{a^*}$  gut reproduziert, so bedeutet das eine Bestätigung der gewählten Strukturhypothese. Andernfalls hat man diese durch eine umfassendere zu ersetzen und diesbezüglich das Identifikationsproblem dem erweiterten Informationsstand entsprechend neu zu lösen.

4. Identifikation des homogenen Halbraumes

Bezüglich des Koordinatensystems  $\mathfrak{R}$  wird ein Stratum angenommen, das in den Halbräumen  $z < 0$  und  $z > 0$  aus je einem homogenen Medium mit den Brechungsindizes  $N_0$  bzw.  $N_1$  besteht;  $N_0$  sei reell und bekannt,  $N_1 = n_1 - ix_1$  ist zu bestimmen. — Die Transferkoeffizienten für eine aus dem Halbraum  $z < 0$  in der  $(y, z)$ -Ebene unter dem Winkel  $\vartheta$  einfallende ebene harmonische Welle sind durch die Fresnelschen Formeln gegeben. Beispielsweise ist mit entsprechender Auszeichnung der  $s$ - bzw.  $p$ -Polarisation und (1.13)

$$r = (Y_0 - Y_1)/(Y_0 + Y_1). \tag{4.1}$$

Hieraus folgt der von AZZAM [4] gefundene Zusammenhang

$$r_s^0 = \frac{1 - \sqrt{((1 - r_s)/(1 + r_s))^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}}{1 + \sqrt{((1 - r_s)/(1 + r_s))^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}} = f(r_s, \vartheta) \tag{4.2}$$

zwischen den Reflexionskoeffizienten  $r_s^0$  und  $r_s$  für eine senkrecht bzw. unter dem Winkel  $\vartheta$  einfallende TE-Welle. Darauf beruht die als TRM (*Two Reflectance Method*) bezeichnete Methode zur Lösung des 1. Identifikationsproblems im Zusammenhang mit der Bestimmung von  $z = r_s$  bzw.  $w = r_s^0$ . Dabei geht man von je einer Messung  $R_s^0$  und  $R_s$  des Reflexionsgrades für senkrechten bzw. schrägen Einfall unter dem Winkel  $\vartheta$  aus. Die komplexe Größe  $r_s^0$  muß nach (2.5) in einer Gaußschen  $w$ -Ebene auf dem Kreis  $|w| = \sqrt{R_s^0}$  liegen. Ein weiterer geometrischer Ort ist das Bild des Kreises  $|z| = \sqrt{R_s}$  bei der sich aus (4.2) ergebenden konformen Abbildung  $w = f(z, \vartheta)$ . Ein wohlbestimmter Schnittpunkt liefert dann  $r_s^0$ , und aus

$$r_s^0 = (1 - N_1/N_0)/(1 + N_1/N_0), \quad N_1/N_0 = (1 - r_s^0)/(1 + r_s^0)$$

gewinnt man auch die Lösung des Strukturproblems. In (4.2) ist der Wurzelzweig so zu wählen, daß  $r_s = 0$  und  $r_s^0 = 0$  korrespondieren. Dann vermittelt  $w = f(z, \vartheta)$  eine nullpunktstreue schlichte konforme Abbildung des Kreises  $|z| < 1$  auf einen geradlinig geschlitzten Einheitskreis der  $w$ -Ebene (vgl. Abb. 2). Das Schlitzende  $E$  ist durch  $E(\vartheta) = (1 - |\sin \vartheta|)/(1 + |\sin \vartheta|)$  bestimmt.

Die Theorie der schlichten konformen Abbildungen des Einheitskreises wird maß-

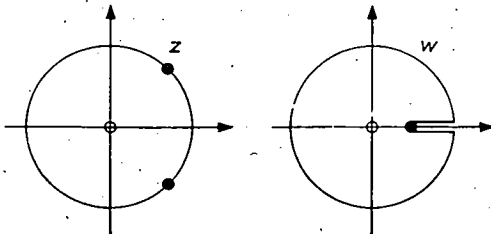


Abb. 2

geblich durch die von LÖWNER [42] hergeleitete Differentialgleichung

$$\partial w / \partial t = -w(\lambda(t) + w) / (\lambda(t) - w) \tag{4.3}$$

bestimmt, in der  $\lambda$  eine im Intervall  $[0, \infty)$  stetige Funktion mit  $|\lambda(t)| = 1$  ist. Jede Lösung  $w = f(z, t)$  von (4.3) über diesem Intervall, die der Anfangsbedingung  $f(z, 0) = z$  genügt, ist für fixiertes  $t$  als Funktion von  $z$  in  $|z| < 1$  holomorph und schlicht, und es gilt  $f(0, t) = 0, \partial f(0, t) / \partial z = e^{-t}$ . Außerdem existiert die ebenfalls holomorphe und schlichte Grenzfunktion

$$f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t); \tag{4.4}$$

für diese ist  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  (vgl. z. B. [12]). In [17, 18] wurden integrable Fälle der Differentialgleichung (4.3) bestimmt und gezeigt, daß für  $\lambda \equiv 1$  die Funktion  $w = F(z, t)$ ,

$$F(z, t) = \frac{1 - \sqrt{((z - 1)/(z + 1))^2 e^{-t} + 1 - e^{-t}}}{1 + \sqrt{((z - 1)/(z + 1))^2 e^{-t} + 1 - e^{-t}}} \tag{4.5}$$

Lösung von (4.3) ist und bei entsprechender Wahl des Wurzelzweiges der Anfangsbedingung  $F(z, 0) = z$  genügt. Mit der Substitution  $e^{-t} = \cos^2 \vartheta$  geht (4.5) in (4.2) über, und man gewinnt aus dem Löwnerschen Satz folgende Aussage über die holomorphe Beziehung der Transferkoeffizienten  $r_s$  und  $r_s^0$  ([19] und [23: Abschnitt 3.4.1]):  $r_s^0 = f(r_s, \vartheta)$  ist die durch die Anfangsbedingung  $f(r_s, 0) = r_s$  bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$\partial r_s^0 / \partial \vartheta = -2r_s^0(1 + r_s^0) / (1 - r_s^0) \tan \vartheta.$$

Anstelle von (4.4) erhält man die Grenzfunktion

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} (f(r_s, \vartheta) / \cos^2 \vartheta) = r_s / (1 + r_s)^2.$$

Der (4.2) entsprechende Zusammenhang zwischen den Reflexionskoeffizienten des TM-Feldes für senkrechten und schrägen Lichteinfall wird in [23: Abschnitt 3.4.2] ebenfalls durch eine Differentialgleichung charakterisiert und in seinen Abbildungseigenschaften untersucht.

Für die Fresnel-Koeffizienten  $r_s$  und  $r_p$  zum gleichen Einfallswinkel  $\vartheta$  ergibt sich nach [3]

$$\tilde{r}_p / r_s = (r_s - \cos 2\vartheta) / (1 - r_s \cos 2\vartheta). \tag{4.6}$$

Falls  $\vartheta$  reell, ist die rechte Seite ein Automorphismus des Einheitskreises in der komplexen  $r_s$ -Ebene. Damit läßt sich  $r_s$  aus einer ellipsometrischen Messung bestimmen und mit Hilfe des Snellius-Gesetzes (1.8) aus (4.1)  $N_1$  berechnen. Die mit  $z := r_s$  und  $w := r_p$  aus (4.6) zu gewinnende Funktion

$$w = z(z - \cos 2\vartheta) / (1 - z \cos 2\vartheta) \tag{4.7}$$

vermittelt eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich, deren Eigenschaften genauer in [23] untersucht wurden. Diese läßt sich für kleine Werte von  $\vartheta$  näherungsweise wieder durch eine Löwnersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial \vartheta} = -2 \tan(2\vartheta) \frac{1 - w}{1 + w} w$$

mit der Anfangsbedingung  $w = -z$  bei  $\vartheta = 0$  charakterisieren (vgl. [23: Abschnitt 3.4.3]). — Die Umkehrfunktion zu (4.7) genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 2 \tan(2\vartheta) \frac{1}{1+Q} \frac{1+z}{1-z} z, \quad Q = \frac{2z}{(1-z)^2} \frac{\cos 2\vartheta - 1}{\cos 2\vartheta}$$

und für  $\vartheta = 0$  der Anfangsbedingung  $z = -w$ .

Aus den holomorphen Beziehungen (4.2) und (4.6) lassen sich Abschätzungen für Betrag und Argument von Transferkoeffizienten ableiten (vgl. [23: Abschnitt 3.5] und [25]). Beispielsweise folgt aus (4.2) mit dem Schwarzschen Lemma  $|r_s^0| < |r_s|$ , sofern  $0 < |r_s| < 1$  und  $\vartheta \neq 0$  ist. Die mit (4.2) gebildete Funktion  $f(r_s, \vartheta)/\cos^2 \vartheta$  genügt den Voraussetzungen des Koebeschen Verzerrungssatzes. Aus diesem folgt

$$|r_s| \frac{\cos^2 \vartheta}{(1 + |r_s|)^2} \leq |r_s^0| < |r_s| \quad \text{und} \quad \left| \arg \frac{r_s^0}{r_s} \right| \leq \cos^2 \vartheta \ln \frac{1 + |r_s|}{1 - |r_s|}$$

Mit der für  $|z| < 1, |a| < 1$  geltenden Abschätzung

$$\frac{||z| - |a||}{1 - |a||z|} \leq \left| \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \right| \leq \frac{|z| + |a|}{1 + |a||z|} < 1$$

folgt aus (4.6) eine fundamentale Abschätzung für den ellipsometrischen Quotienten  $r_p/r_s$ :

$$\frac{||r_s| - |\cos 2\vartheta||}{1 - |\cos 2\vartheta| |r_s|} \leq \frac{|r_p|}{|r_s|} \leq \frac{|r_s| + |\cos 2\vartheta|}{1 + |\cos 2\vartheta| |r_s|} < 1.$$

In [23, 51] werden auf funktionentheoretischer Grundlage weitere Abschätzungen für Transferkoeffizienten auch an der Trennfläche von Schichtstapeln hergeleitet.

### 5. Identifikation eines Stapels homogener dielektrischer Schichten gleicher optischer Dicke

Als Strukturhypothese (3.15) legen wir die Gesamtheit von  $S$  homogenen dielektrischen Schichten mit den Brechzahlen  $n_j$  und geometrischen Dicken  $h_j$  zugrunde; für  $j = 1, 2, \dots, S$  wird angenommen, daß die optischen Dicken den konstanten Wert

$$n_j h_j = \Delta \tag{5.1}$$

besitzen. Abb. 3 zeigt den Grundriß des Stratums;  $n_0$  und  $n_g = n_{S+1}$  bezeichnen die Brechungsindizes der Extremalmedien. Die zu bestimmenden Strukturparameter sind hier bei fixiertem  $n_0$  und  $n_g$  die Brechzahlen  $n_1, n_2, \dots, n_S$ ; der Wert von  $\Delta$  und damit nach (5.1) auch der von  $h_j$  wird sich aus dem Spektralintervall ergeben, über dem die Identifikationsdaten vorliegen. Diese mögen sich auf Messungen bzw. Verhaltensvorgaben bei senkrechtem Lichteinfall beziehen. Die interessierenden physi-

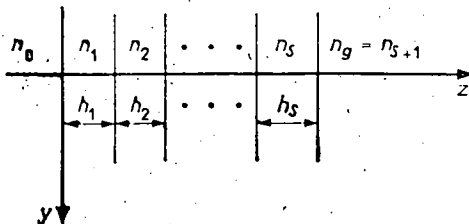


Abb. 3

kalischen Größen lassen sich dann allein mit der charakteristischen TE-Matrix  $M^{(s)}$  ausdrücken; weiterhin unterbleibt die Auszeichnung der Größen des TE-Feldes mit dem Polarisationsymbol  $s$ .

$$M = \prod_{j=1}^S M_j \tag{5.2}$$

ist das Produkt der TE-Einzelschichtmatrizen

$$M_j = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i/n_j \sin \varphi \\ i n_j \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \tag{5.3}$$

darin bedeutet

$$\varphi := \frac{\omega}{c} n_j h_j = \frac{\omega}{c} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \tag{5.4}$$

( $\lambda$  – Vakuumwellenlänge,  $i$  – imaginäre Einheit) den für alle Einzelschichten gleichen frequenz- bzw. wellenlängenabhängigen *Phasenwinkel*. Die Struktur der Elemente von (5.2) ist kompliziert; wir bestimmen diese zunächst mit Hilfe der Operatorenrechnung für Elementfolgen (vgl. Abschnitt 2) und verifizieren mit dieser Darstellung einen von KNITTL in [36] entwickelten Identifikationsalgorithmus für Schichtenstapel. Mit der Substitution

$$x := i\psi, \quad \psi := -\cot \varphi, \quad 0 < \varphi < \pi \tag{5.5}$$

ergibt sich für (5.3)

$$M_j = \frac{-1}{(x^2 - 1)^{1/2}} \begin{pmatrix} x & 1/n_j \\ n_j & x \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

wobei  $(x^2 - 1)^{1/2}$  mit positivem Imaginärteil zu bestimmen ist, und für die charakteristische Matrix (5.2) des Schichtenstapels ergibt sich

$$M = \frac{(-1)^S}{(x^2 - 1)^{S/2}} \prod_{j=1}^S \begin{pmatrix} x & 1/n_j \\ n_j & x \end{pmatrix} = \frac{(-1)^S}{(x^2 - 1)^{S/2}} \begin{pmatrix} P_{11}^{(S)}(x) & P_{12}^{(S)}(x) \\ P_{21}^{(S)}(x) & P_{22}^{(S)}(x) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Die  $P_{ij}^{(s)}$  sind Polynome der Gestalt

$$\begin{aligned} P_{11}^{(s)}(x) &= x^s + N_{S,2}^{(b)} x^{s-2} + N_{S,4}^{(b)} x^{s-4} + \dots, \\ P_{12}^{(s)}(x) &= N_{S,1}^{(b)} x^{s-1} + N_{S,3}^{(b)} x^{s-3} + \dots, \\ P_{21}^{(s)}(x) &= N_{S,1}^{(a)} x^{s-1} + N_{S,3}^{(a)} x^{s-3} + \dots, \\ P_{22}^{(s)}(x) &= x^s + N_{S,2}^{(a)} x^{s-2} + N_{S,4}^{(a)} x^{s-4} + \dots, \end{aligned} \tag{5.8}$$

deren Koeffizienten  $N_{S,j}^{(a)}$  und  $N_{S,j}^{(b)}$  rationale Funktionen der Schichtbrechzahlen bezeichnen, die von POHLACK [50] eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} N_{S,0}^{(a)} &= 1, \\ N_{S,1}^{(a)} &= n_1 + n_2 + \dots + n_S, \\ N_{S,2}^{(a)} &= \frac{n_1}{n_2} + \frac{n_1}{n_3} + \dots + \frac{n_1}{n_S} + \frac{n_2}{n_3} + \dots + \frac{n_2}{n_S} + \dots + \frac{n_{S-1}}{n_S}, \\ N_{S,3}^{(a)} &= \frac{n_1 n_3}{n_2} + \frac{n_1 n_4}{n_2} + \dots + \frac{n_1 n_S}{n_2} + \frac{n_1 n_4}{n_3} + \dots + \frac{n_1 n_S}{n_3} + \dots + \frac{n_{S-2} n_S}{n_{S-1}}, \\ &\vdots \\ N_{S,S}^{(a)} &= \frac{n_1 n_3 n_5 \dots}{n_2 n_4 n_6 \dots}; \end{aligned} \tag{5.9}$$

$N_{S,j}^{(b)}$  ergibt sich aus  $N_{S,j}^{(a)}$  bei Ersetzung der Brechzahlen  $n_1, n_2, \dots, n_S$  durch deren reziproke Werte. Die  $N_{S,j}^{(a)}$  und  $N_{S,j}^{(b)}$  lassen sich bezüglich der Schichtenanzahl  $S$  rekursiv berechnen. Dazu werden mit jeweils einheitlichem oberen Index  $a$  bzw.  $b$  die Folgen

$$N_S = \{N_{S,S}, N_{S,S-1}, N_{S,S-2}, \dots, N_{S,0}, 0, 0, 0, \dots\} \quad (5.10)$$

eingeführt und an Stelle der Polynome (5.8) deren Koeffizientenfolgen  $p_{ii}^{(S)}$  beginnend mit dem absoluten Glied betrachtet. Es ist also für  $S$  gerade

$$\begin{aligned} p_{11}^{(S)} &= \{N_{S,S}^{(b)}, 0, N_{S,S-2}^{(b)}, 0, \dots, N_{S,0}^{(b)}, 0, 0, \dots\}, \\ p_{12}^{(S)} &= \{0, N_{S,S-1}^{(b)}, 0, N_{S,S-3}^{(b)}, 0, \dots, N_{S,1}^{(b)}, 0, 0, \dots\}, \\ p_{21}^{(S)} &= \{0, N_{S,S-1}^{(a)}, 0, N_{S,S-3}^{(a)}, 0, \dots, N_{S,1}^{(a)}, 0, 0, \dots\}, \\ p_{22}^{(S)} &= \{N_{S,S}^{(a)}, 0, N_{S,S-2}^{(a)}, 0, \dots, N_{S,0}^{(a)}, 0, 0, \dots\}, \end{aligned} \quad (5.11a)$$

und für  $S$  ungerade

$$\begin{aligned} p_{11}^{(S)} &= \{0, N_{S,S-1}^{(b)}, 0, N_{S,S-3}^{(b)}, 0, \dots, N_{S,0}^{(b)}, 0, 0, \dots\}, \\ p_{12}^{(S)} &= \{N_{S,S}^{(b)}, 0, N_{S,S-2}^{(b)}, 0, \dots, N_{S,1}^{(b)}, 0, 0, \dots\}, \\ p_{21}^{(S)} &= \{N_{S,S}^{(a)}, 0, N_{S,S-2}^{(a)}, 0, \dots, N_{S,1}^{(a)}, 0, 0, \dots\}, \\ p_{22}^{(S)} &= \{0, N_{S,S-1}^{(a)}, 0, N_{S,S-3}^{(a)}, 0, \dots, N_{S,0}^{(a)}, 0, 0, \dots\}, \end{aligned} \quad (5.11b)$$

und es gilt

$$N_S^{(a)} = p_{21}^{(S)} + p_{22}^{(S)} \quad \text{und} \quad N_S^{(b)} = p_{11}^{(S)} + p_{12}^{(S)}. \quad (5.12)$$

Auf Grund von (5.7) ist

$$p_{11}^{(S)} = p_{11}^{(S-1)} * p + p_{12}^{(S-1)} n_S, \quad p_{12}^{(S)} = p_{11}^{(S-1)} \frac{1}{n_S} + p_{12}^{(S-1)} * p \quad (5.13)$$

und

$$p_{21}^{(S)} = p_{21}^{(S-1)} * p + p_{22}^{(S-1)} n_S, \quad p_{22}^{(S)} = p_{21}^{(S-1)} \frac{1}{n_S} + p_{22}^{(S-1)} * p.$$

Damit ergibt sich für die Folgen (5.10) aus (5.12)

$$N_S^{(a)} = N_{S-1}^{(a)} * p + \{(n_S^{(a)})_t (N_{S-1}^{(a)})_t\}, \quad N_S^{(b)} = N_{S-1}^{(b)} * p + \{(n_S^{(b)})_t (N_{S-1}^{(b)})_t\} \quad (5.14)$$

mit

$$n_S^{(a)} = \{\eta, \eta^{-1}, \eta, \eta^{-1}, \dots\}, \quad n_S^{(b)} = \{\eta^{-1}, \eta, \eta^{-1}, \eta, \dots\}, \quad (5.15)$$

$\eta = n_S$  für  $S$  ungerade und  $\eta = 1/n_S$  für  $S$  gerade. Startfolgen für die rekursive Berechnung von  $N_S^{(a)}$  und  $N_S^{(b)}$  sind

$$N_1^{(a)} = \{n_1, 1, 0, 0, \dots\}, \quad N_1^{(b)} = \left\{ \frac{1}{n_1}, 1, 0, 0, \dots \right\}. \quad (5.16)$$

Für die Lösung des Identifikationsproblems ist die Invertierung der rekursiven Beziehungen (5.14) für  $N_S^{(a)}$  und  $N_S^{(b)}$  wesentlich. Aus (5.13) folgt

$$p_{11}^{(S-1)} = \frac{1}{p^2 - 1} * (p_{11}^{(S)} * p - p_{12}^{(S)} n_S), \quad p_{12}^{(S-1)} = \frac{1}{p^2 - 1} * \left( p_{12}^{(S)} * p - p_{11}^{(S)} \frac{1}{n_S} \right)$$



und

$$p_{21}^{(S-1)} = \frac{1}{p^2 - 1} * (p_{21}^{(S)} * p - p_{22}^{(S)} n_S), \quad p_{22}^{(S-1)} = \frac{1}{p^2 - 1} * \left( p_{22}^{(S)} * p - p_{21}^{(S)} \frac{1}{n_S} \right).$$

Damit ergibt sich nach (5.12)

$$N_{S-1}^{(a)} = \frac{1}{p^2 - 1} * (N_S^{(a)} * p - \{(N_S^{(a)})_t (n_S^{(b)})_t\}) \tag{5.17}$$

$$N_{S-1}^{(b)} = \frac{1}{p^2 - 1} * (N_S^{(b)} * p - \{(N_S^{(b)})_t (n_S^{(a)})_t\}),$$

wobei die Folgen  $n_S^{(a)}$ ,  $n_S^{(b)}$  gemäß (5.15) zu bilden sind und

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 - 1} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - p} + \frac{1}{1 + p} \right) = -\frac{1}{2} (l + \{(-1)^t\}) \\ &= -\{1, 0, 1, 0, \dots\} \end{aligned} \tag{5.18}$$

ist. Die Berechnung von  $N_{S-1}^{(a)}$  und  $N_{S-1}^{(b)}$  aus  $N_S^{(a)}$  bzw.  $N_S^{(b)}$  gemäß (5.17) erfordert die Kenntnis von  $n_S$ . Dieser Wert läßt sich mit den Ausgangsfolgen  $N_S^{(a)}$  bzw.  $N_S^{(b)}$  bestimmen. Aus (5.14), (5.15) ergibt sich etwa mit

$$N_S^{(a)} = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}, \quad N_{S-1}^{(a)} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\} \tag{5.19}$$

durch Komponentenvergleich

$$\begin{aligned} v_0 &= \eta u_0, & v_1 &= u_0 + \frac{1}{\eta} u_1, & v_2 &= u_1 + \eta u_2, \\ v_3 &= u_2 + \frac{1}{\eta} u_3, & v_4 &= u_3 + \eta u_4, \dots, \\ v_{S-1} &= u_{S-2} + \begin{cases} \eta u_{S-1} & \text{für } S \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{\eta} u_{S-1} & \text{für } S \text{ gerade,} \end{cases} & v_S &= u_{S-1} = 1. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Multipliziert man die Gleichungen für  $v_1$  bis  $v_S$  abwechselnd mit  $v_0$  und  $-u_0$ , so resultiert unter Beachtung der Gleichung für  $v_0$

$$\begin{aligned} -u_0 v_0 &= -v_0 v_1 + u_0 u_1, & 0 &= u_0 v_2 - u_0 u_1 - v_0 u_2, \\ 0 &= -v_0 v_3 + u_0 u_3 + v_0 u_2, & 0 &= u_0 v_4 - u_0 u_3 - v_0 u_4, \dots, \\ \vdots & & & \\ 0 &= u_0 v_{S-1} - u_0 u_{S-2} - v_0 u_{S-1} \} & \text{bzw.} & 0 = -v_0 v_{S-1} + u_0 u_{S-1} + v_0 u_{S-2} \} \\ 0 &= -v_0 v_S + v_0 u_{S-1} \} & & 0 = u_0 v_S - u_0 u_{S-1} \} \end{aligned} \tag{5.21}$$

für  $S$  ungerade oder gerade und nach Addition dieser Gleichungen

$$u_0(v_0 + v_2 + v_4 + \dots) = v_0(v_1 + v_3 + v_5 + \dots), \tag{5.22}$$

also mit der ersten Gleichung  $v_0 = \eta u_0$  von (5.20)

$$\eta = (v_0 + v_2 + v_4 + \dots) / (v_1 + v_3 + v_5 + \dots). \tag{5.23}$$

Damit ergibt sich nun aus  $N_S^{(a)}$  gemäß (5.20) die Folge  $N_{S-1}^{(a)}$ . Diese kann wiederum in Verbindung mit der Berechnung von  $n_{S-1}$  auf  $N_{S-2}^{(a)}$  zurückgeführt werden usw. —

Der so bestimmte Invertierungsalgorithmus für die  $N_{S,j}^{(a)}$  bzw.  $N_{S,j}^{(b)}$  liefert sukzessive die Brechzahlen  $n_S, n_{S-1}, n_{S-2}, \dots, n_1$ . In der folgenden Betrachtung wird gezeigt, wie sich die Inputgrößen  $N_{S,j}^{(a)}, N_{S,j}^{(b)}$  dieses Algorithmus aus der Lösung des 1. Identifikationsproblems ergeben.

Für den Reflexionskoeffizienten des Schichtsystems der Abb. 3 zur s-Polarisation ergibt sich nach (1.15) mit (5.7), (5.8)

$$r = \frac{P_{11}^{(S)}(x) + n_g P_{12}^{(S)}(x) - \frac{1}{n_0} (P_{21}^{(S)}(x) + n_g P_{22}^{(S)}(x))}{P_{11}^{(S)}(x) + n_g P_{12}^{(S)}(x) + \frac{1}{n_0} (P_{21}^{(S)}(x) + n_g P_{22}^{(S)}(x))} = \left( \frac{\sum_{j=0}^S b_j x^{S-j}}{\sum_{j=0}^S a_j x^{S-j}} \right), \quad (5.24)$$

wobei

$$b_j = b N_{S,j}^{(b)} - a N_{S,j}^{(a)} \quad \text{und} \quad a_j = b N_{S,j}^{(b)} + a N_{S,j}^{(a)} \quad (5.25)$$

mit  $b = 1$  und  $a = n_g/n_0$  für  $j$  gerade sowie  $b = n_g$  und  $a = 1/n_0$  für  $j$  ungerade ist. Zur Lösung des 1. Identifikationsproblems sind die Größen  $a_j$  und  $b_j$  aus den vorliegenden Identifikationsdaten zu bestimmen. Dazu betrachten wir neben (5.24) noch den Transmissionskoeffizienten. Für diesen findet man mit (1.11), (1.12), (1.16) und (5.7), (5.8)

$$t = 2(-1)^S (x^2 - 1)^{S/2} \left/ \left( \sum_{j=0}^S a_j x^{S-j} \right) \right. \quad (5.26)$$

$x$  ist rein imaginär und mithin

$$e^{i\gamma} := (-1)^S ((x+1)/(x-1))^{S/2} \quad (5.27)$$

vom Betrage 1. Folglich kann der Betrag von  $t$  auch mit

$$t e^{i\gamma} = 2(1+x)^S \left/ \left( \sum_{j=0}^S a_j x^{S-j} \right) \right. \quad (5.28)$$

gebildet werden.

Zur Ableitung von Formeln für den Reflexionsgrad  $R$  und Transmissionsgrad  $T$  ist nach (2.5)  $|\gamma|^2$  bzw.  $|t|^2$  zu berechnen. — Für ein Polynom

$$y(x) = \sum_{j=0}^S g_j x^{S-j} \quad (5.29)$$

mit reellen Koeffizienten  $g_j$  und  $x = i\psi$ ,  $\psi \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} |y(x)|^2 &= y(x) y(-x) \\ &= g_0^2 \psi^{2S} + (g_1^2 - 2g_0 g_2) \psi^{2S-2} + (g_2^2 - 2g_1 g_3 + 2g_0 g_4) \psi^{2S-4} \\ &\quad + \dots + (g_{S-1}^2 - 2g_S g_{S-2}) \psi^2 + g_S^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Damit ergibt sich auf Grund von (5.24) und (5.28) für die Größen (2.5)

$$R = |\gamma|^2 = \left( \frac{\sum_{j=0}^S F_j \psi^{2(S-j)}}{\sum_{j=0}^S E_j \psi^{2(S-j)}} \right), \quad (5.31)$$

$$T = \frac{n_g}{n_0} |t|^2 = 4 \frac{n_g}{n_0} \left( \frac{\sum_{j=0}^S K_j \psi^{2(S-j)}}{\sum_{j=0}^S E_j \psi^{2(S-j)}} \right), \quad (5.32)$$

mit

$$\begin{aligned}
 E_0 &= a_0^2, & E_1 &= a_1^2 - 2a_0a_2, & E_2 &= a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4, \dots, \\
 E_j &= a_j^2 + 2 \sum_{\substack{\nu > 0 \\ j-\nu \geq 0 \\ j+\nu \leq S}} (-1)^\nu a_{j-\nu} a_{j+\nu}, \dots, & E_S &= a_S^2,
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$F_j = b_j^2 + 2 \sum_{\substack{\nu > 0 \\ j-\nu \geq 0 \\ j+\nu \leq S}} (-1)^\nu b_{j-\nu} b_{j+\nu}, \quad (j = 0, 1, \dots, S), \tag{5.34}$$

$$K_j = \binom{S}{j} \quad (j = 0, 1, \dots, S). \tag{5.35}$$

Die Energiegleichung

$$R + T = 1 \tag{5.36}$$

liefert die Beziehungen

$$F_j + 4 \frac{n_g}{n_0} K_j = E_j \quad (j = 0, 1, \dots, S), \tag{5.37}$$

die es gestatten, die Größen  $F_j$  aus den  $E_j$  zu berechnen.

Aus (5.32) folgt die für die Synthese der betrachteten Interferenzschichtsysteme grundlegende Tatsache, daß  $T^{-1}$  ein Polynom vom Grade  $S$  in der Größe

$$\zeta = \cos^2 \varphi \tag{5.38}$$

ist [16, 50]. In der Tat ergibt sich mit (5.38) und (5.5) aus (5.32)

$$\begin{aligned}
 T^{-1} &= \frac{n_0}{4n_g} \frac{1}{(1 + \psi^2)^S} \sum_{j=0}^S E_j \psi^{2(S-j)} \\
 &= \frac{n_0}{4n_g} (1 - \zeta)^S \sum_{j=0}^S E_j \left( \frac{\zeta}{1 - \zeta} \right)^{S-j} = \sum_{j=0}^S A_j \zeta^j.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Auf Grund dessen besteht zwischen den Polynomkoeffizienten  $A_j$  und den Größen  $E_j$  eine lineare Beziehung

$$A_j = \frac{n_0}{4n_g} (-1)^j \sum_{\nu=0}^j (-1)^\nu \binom{S-\nu}{S-j} E_{S-\nu} \quad (j = 0, 1, \dots, S). \tag{5.40}$$

Umgekehrt findet man mit (5.5) und (5.38) aus

$$\begin{aligned}
 T^{-1} &= \sum_{j=0}^S A_j \left( \frac{\psi^2}{\psi^2 + 1} \right)^j = \frac{1}{(\psi^2 + 1)^S} \sum_{j=0}^S A_j \psi^{2j} (\psi^2 + 1)^{S-j} \\
 &= \frac{1}{(\psi^2 + 1)^S} \sum_{j=0}^S \psi^{2j} \sum_{\nu=0}^j \binom{S-j+\nu}{\nu} A_{j-\nu} \\
 &= \frac{1}{(\psi^2 + 1)^S} \sum_{j=0}^S \psi^{2(S-j)} \sum_{\nu=0}^{S-j} \binom{S-\nu}{j} A_\nu,
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

durch Vergleich mit (5.39)

$$E_j = \frac{4n_g}{n_0} \sum_{\nu=0}^{S-j} \binom{S-\nu}{j} A_\nu, \quad (j = 0, 1, \dots, S). \tag{5.42}$$

Damit folgt aus (5.33) wegen

$$a_0 = 1 + n_g/n_0 \quad \text{und} \quad b_0 = 1 - n_g/n_0 \tag{5.43}$$

(vgl. (5.25) und (5.9)) die Identität

$$\frac{(n_0 + n_g)^2}{4n_0n_g} = \frac{n_0}{4n_g} E_0 = \sum_{j=0}^S A_j = T_{\varphi=0}^{-1}, \tag{5.44}$$

deren linke Seite den reziproken Transmissionsgrad des unbeschichteten Trägers ausdrückt.

Unter der Voraussetzung, daß die Brechzahlen  $n_0$  und  $n_g$  der Extremalmedien gegeben sind, lassen sich die erörterten Zusammenhänge zu folgender Synthesekonzeption zusammenfassen:

(i) Im Rahmen der betrachteten Identifikationshypothese wird das für  $T^{-1}$  vorgegebene spektrale Verhalten durch ein Polynom der Form (5.39) approximiert, wobei die Nebenbedingung (5.44) zu beachten ist.

(ii) Mit den aus (i) resultierenden Werten  $A_0, A_1, \dots, A_S$  sind nach (5.42) und (5.37) die Größen  $E_j, F_j$  ( $j = 0, 1, \dots, S$ ) zu berechnen und die damit aufgestellten quadratischen Gleichungssysteme (5.33), (5.34) für  $j = 1, 2, \dots, S$  mit Beachtung von (5.43) zu lösen. Die Gesamtheit der resultierenden Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_S), (b_1, b_2, \dots, b_S)$  beinhaltet die Ambiguität des Identifikationsproblems.

(iii) Aus (5.25) lassen sich nun  $N_{S,j}^{(a)}, N_{S,j}^{(b)}$  ( $j = 1, 2, \dots, S$ ) bestimmen und mit Hilfe des Invertierungsalgorithmus für diese Größen (vgl. (5.19), (5.23), (5.20), (5.15)) die gesuchten Brechzahlen  $n_1, n_2, \dots, n_S$ .

Das Polynom (5.39) ist bezüglich des Phasenwinkels  $\varphi$  periodisch mit der Periode  $\pi$  und im Periodenintervall  $[0, \pi]$  symmetrisch zu  $\pi/2$ . Diesem entspricht in  $\zeta = \cos^2 \varphi$  das doppelt durchlaufene Intervall  $[0, 1]$  (vgl. Abb. 4), und ein darin enthaltenes  $[\alpha, \beta]$ -Intervall korrespondiert in  $\varphi$  mit zwei symmetrisch zu  $\pi/2$  gelegenen Intervallen. Für  $\zeta \in [0, 1]$  sind

$$\varphi_\zeta := \text{Arc cos } \sqrt{\zeta} \quad \text{und} \quad \pi - \varphi_\zeta \tag{5.45}$$

die nach  $\zeta = \cos^2 \varphi$  zugeordneten  $\varphi$ -Werte. — Das zu realisierende spektrale Verhalten ist über einer Menge  $X \subseteq (0, \infty)$  von Wellenlängen  $\lambda$  gegeben. Um das Approximationsproblem in (i) zu lösen, hat man diese gemäß (5.4) und (5.38) in das  $\varphi$ - bzw.  $\zeta$ -Plot zu transformieren. Dabei ist die optische Dicke  $\Delta$  der Einzelschichten festzulegen.

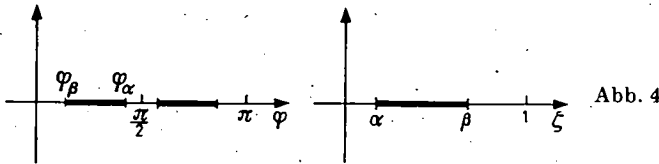


Abb. 4

Bemerkung 1: Die Lösung der quadratischen Gleichungssysteme (5.33), (5.34) kann auf die Nullstellenbestimmung je eines Polynoms zurückgeführt werden. (5.30) ist ein Polynom  $S$ -ten Grades in  $\chi = \psi^2$ , dessen Nullstellen  $\chi_j$  die negativen Quadrate der Nullstellen  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, S$ ) des Polynoms (5.29) sind. Umgekehrt ist

$$x_j = \pm \sqrt{-\chi_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S) \tag{5.46}$$

bei geeigneter Wahl der Vorzeichen. Auf diese Weise ergeben sich  $2^S$  Möglichkeiten, potentielle Nullstellen von (5.29) aus denen von (5.30) zu berechnen. In [33: Abschnitt 2] wurde gezeigt, daß das Nennerpolynom in (5.24) und (5.26) stabil ist, d. h. nur Nullstellen mit negativem

Realteil hat, so daß sich für dieses die Nullstellen eindeutig aus denen des Nennerpolynoms von (5.31), (5.32) ergeben. Vom Zählerpolynom in (5.24) kann die Stabilität nicht vorausgesetzt werden, mit Ausnahme des Falls  $S = 2$  (vgl. [33: Abschnitt 2]). — Die Wahlmöglichkeit der Vorzeichen in (5.46) bei der Berechnung der Nullstellen des Zählerpolynoms von (5.24) aus denen des Zählerpolynoms von (5.31) enthält die in (ii) hervorgehobene Ambiguität. Jede Festlegung ist mit den Energiegrößen  $E_j, F_j$  verträglich. — Aus den Nullstellen des Zähler- und Nennerpolynoms in (5.24) findet man die  $a_j, b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, S$ ) mit Hilfe der Vietaschen Koeffizientenformeln. Dabei ist zu beachten, daß der jeweilige Leitkoeffizient  $a_0$  bzw.  $b_0$  durch (5.43) gegeben und somit bekannt ist.

Bemerkung 2: Für die Koeffizienten  $A_j$  des Polynoms (5.39) sind im Zusammenhang mit der rechnergestützten Bearbeitung von Syntheseausgaben für Interferenzschichtsysteme noch andere Berechnungsverfahren entwickelt worden. Besonders hinzuweisen ist auf solche, die von der Darstellung von  $T^{-1}$  durch ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^S B_j \cos 2j\varphi \tag{5.47}$$

ausgehen [16, 20, 56]. Dessen Koeffizienten  $B_0, B_1, \dots, B_S$  lassen sich in ihrer Abhängigkeit von den Brechzahlen sehr übersichtlich durch eine mehrdimensionale Fourierentwicklung von  $T^{-1}$  für einen Stapel von Schichten (nicht notwendig gleicher optischer Dicke) nach den Phasenwinkeln gewinnen. Dabei bedient man sich grundlegender Rekursionsformeln für Transfergrößen und einer darauf bezogenen Residuenrechnung [23, 39]. Speziell gewinnt man auf diesem Wege

$$A_S = 2^{2S-1} B_S = \frac{n_0}{4n_g} (1 - q_1^2) (1 - q_{S+1}^2) \prod_{j=2}^S (1 + q_j)^2 \tag{5.48}$$

mit

$$q_j := n_j/n_{j-1} \tag{5.49}$$

Offensichtlich lassen sich die Darstellungen (5.39) und (5.47) von  $T^{-1}$  mittels einer linearen Transformation aufeinander umrechnen [28: Abschnitt 2]. Der Identität (5.44) entspricht dann

$$T_{\varphi=0}^{-1} = \sum_{j=0}^S B_j = \frac{(n_0 + n_g)^2}{4n_0 n_g} \tag{5.50}$$

Ein von (5.47) ausgehendes mit (i)–(iii) vergleichbares Synthesekonzept wurde von PEGIS [49] entwickelt.

Bemerkung 3: Im Zusammenhang mit der Interpretation der Identifikationsdaten in einer Strukturhypothese  $\Sigma$  lassen sich verschiedene Approximationsprobleme formulieren. Beispielsweise kann man die Koeffizienten  $B_0, B_1, \dots, B_S$  des trigonometrischen Polynoms (5.47) durch Quadratmittelapproximation der über einer Teilmenge des Intervalls  $(0, \pi/2)$  im  $\varphi$ -Plot gegebenen Vorgaben für  $T^{-1}$  ermitteln, wobei die Nebenbedingung (5.50) zu beachten ist.

Für die Synthese von Hochleistungsbauelementen der Schichtenoptik ist die Anpassung des Systemverhaltens an vorgegebene Leistungscharakteristiken im Sinne gleichmäßiger Bestapproximation erforderlich. Im folgenden Abschnitt beschreiben wir dementsprechend die Konstruktion breitbandiger Achromasiesysteme auf der Grundlage der oben (vgl. Abschnitt 3) dargelegten Theorie von P. L. Tschebyscheff.

### 6. Synthese optimaler Achromasiesysteme

Mit  $m = S$  sei (3.9) die in Abschnitt 5 betrachtete Systemklasse (vgl. Abb. 3, (5.1)). Darin bedeuten die Parameter die Schichtbrechzahlen  $n_1, n_2, \dots, n_S; n_0, n_g$  werden als bekannt vorausgesetzt. In  $\Sigma_A$  ist ein System zu bestimmen, dessen reziproker Transmissionsgrad (5.39) über einem Intervall  $0 \leq \alpha \leq \zeta \leq \beta < 1$  (vgl. Abb. 4)

möglichst wenig von einem vorgegebenen Wert  $H$  abweicht. Dazu sind die Synthesgleichungen (3.21) mit den Koeffizienten von  $T^{-1}$  anzuschreiben. Für ihre direkte Lösung ist es wesentlich, daß  $A_S$  bereits durch  $H$  und  $\alpha, \beta$  bestimmt ist. Wir bezeichnen diesen Zusammenhang als *Achromasiegleichung*. Zu ihrer Ableitung addiert man die Gleichungen (3.21):

$$\frac{1}{A_S} \left( \sum_{j=0}^{S-1} A_j - H \right) = \sum_{j=0}^{S-1} p_j(\alpha, \beta) = \tilde{T}_S(1) - 1,$$

und findet mit (5.44)

$$\frac{1}{A_S} \left( \frac{(n_0 + n_g)^2}{4n_0n_g} - H \right) = \tilde{T}_S(1). \quad (6.1)$$

Nach (3.14) ist  $\tilde{T}_S(1) = (\beta - \alpha)^S / 2^{1-2S} T_S((2 - (\beta + \alpha))/(\beta - \alpha))$  und mit  $\alpha = \cos^2 \varphi_\alpha$ ,  $\beta = \cos^2 \varphi_\beta$  liefert

$$T_S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( (x + i\sqrt{1-x^2})^S + (x - i\sqrt{1-x^2})^S \right) & \text{für } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2} \left( (x + \sqrt{x^2-1})^S + (x - \sqrt{x^2-1})^S \right) & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

wegen  $(2 - (\alpha + \beta))/(\beta - \alpha) \geq 1$  für die rechte Seite von (6.1)

$$\tilde{T}_S(1) = 2^{-2S} \left( (\sin \varphi_\alpha + \sin \varphi_\beta)^{2S} + (\sin \varphi_\alpha - \sin \varphi_\beta)^{2S} \right).$$

Damit gewinnt man aus (6.1) die gesuchte Beziehung

$$\frac{2^{2S}}{A_S} \left( \frac{(n_0 + n_g)^2}{4n_0n_g} - H \right) = (\sin \varphi_\alpha + \sin \varphi_\beta)^{2S} + (\sin \varphi_\alpha - \sin \varphi_\beta)^{2S}. \quad (6.2)$$

Um eine Lösung über einem möglichst großen Spektralbereich zu erhalten, betrachten wir weiterhin den Fall  $\alpha = 0$ , wo sich im  $\varphi$ -Plot (5.45) ein zusammenhängendes Intervall  $(\varphi_\beta, \pi - \varphi_\beta)$  ergibt (vgl. Abb. 4); (6.2) hat dann die Gestalt

$$\frac{2^{2S}}{A_S} \left( \frac{(n_0 + n_g)^2}{4n_0n_g} - H \right) = (1 + \sin \varphi_\beta)^{2S} + (1 - \sin \varphi_\beta)^{2S}. \quad (6.3)$$

Die Grenzen des Wellenlängenintervalls  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , über dem das Achromasieproblem zu lösen ist, definieren dessen Bandbreite  $BB := \lambda_2/\lambda_1 = (\pi - \varphi_\beta)/\varphi_\beta$ . Wird diese vorgegeben, so resultiert  $\beta = \cos^2(\pi/(BB + 1))$  und damit aus (3.15) als maximale Abweichung  $Z^*$  des reziproken Transmissionsgrades vom Achromasieniveau  $H$

$$Z^* = \max_{\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2} |T^{-1}(\lambda) - H| = 2(\beta/4)^S |A_S|; \quad (6.4)$$

die optische Dicke  $\Delta$  berechnet man nach (5.4) etwa mit Hilfe von  $\lambda_1$  zu

$$\Delta = \lambda_1(\pi - \varphi_\beta)/(2\pi). \quad (6.5)$$

Für  $S = 1$  ergibt sich  $n_1$  nach (5.48) aus der biquadratischen Gleichung

$$n_1^4 + (4n_0n_gA_S - (n_0^2 + n_g^2))n_1^2 + n_0^2n_g^2 = 0, \quad (6.6)$$

wobei  $A_S$  gemäß (6.3) bestimmt ist. Tabelle 1 enthält die praxisrelevanten Lösungen von (6.6) für  $n_0 = 1$  (Luft),  $n_g = 1,52$  (Glas) und verschiedene Werte von  $BB$  und  $H$ .

Tabelle 1. Brechzahlen  $n_1$  für den einschichtigen Tschebyscheff-Belag zur Reflexionsminderung

$BB \ H \rightarrow$	1,01	1,014	1,015	1,016	1,017	1,018
1,5	1,3501	1,3782	1,3846	1,3907	1,3966	1,4023
1,6	1,3457	1,3750	1,3816	1,3879	1,3940	1,4000
1,7	1,3409	1,3716	1,3784	1,3849	1,3912	1,3973
1,8	1,3356	1,3679	1,3749	1,3817	1,3882	1,3945
1,9	1,3299	1,3640	1,3713	1,3784	1,3851	1,3916
2,0	1,3238	1,3599	1,3676	1,3749	1,3819	1,3886

Die vollständige Syntheselösung ist etwa für  $H = 1,014$ ,  $BB = 2$

$$n_1 = 1,36, \text{ Abweichung } Z^* = 4,35 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta = 133,33 \text{ nm für } 400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$$

und für  $H = 1,016$ ,  $BB = 1,85$ .

$$n_1 = 1,38, \text{ Abweichung } Z^* = 3,23 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta = 136,32 \text{ nm für } 420 \text{ nm} \leq \lambda \leq 777 \text{ nm.}$$

Für  $S = 2$  lautet die erste der Synthesegleichungen (3.21)  $A_0 = (\beta^2/8) A_S + H$ , wobei mit (5.49)  $A_0 = 4^{-1} (\sqrt{n_g/n_0} q_2^{-1} + \sqrt{n_0/n_g} q_2)^2$  ist (vgl. [16, 20, 50]). Hieraus folgt für  $q_2$  die quadratische Gleichung

$$q_2^2 - \sqrt{\frac{n_g}{n_0} \left( \frac{\beta^2}{2} A_S + 4H \right)} q_2 + \frac{n_g}{n_0} = 0 \quad (6.7)$$

und mit einer ihrer Lösungen unter Beachtung von  $\prod_{j=1}^{S+1} q_j = n_g/n_0$  aus (5.48) für  $q_1$  die biquadratische Gleichung

$$q_1^4 + \left( \frac{4n_g}{n_0} \frac{A_S}{(1+q_2)^2} - \frac{n_g^2}{n_0^2 q_2^2} - 1 \right) q_1^2 + \frac{n_g^2}{n_0^2 q_2^2} = 0. \quad (6.8)$$

In (6.7) und (6.8) ist der Wert von  $A_S$  aus der Achromasiegleichung (6.3) zu bestimmen. Die gesuchten Brechzahlen findet man gemäß  $n_1 = n_0 q_1$  und  $n_2 = n_1 q_2$ . Für  $n_0 = 1$ ,  $n_g = 1,52$ ,  $H = 1,016$  und  $BB = 1,85$  lautet die vollständige Lösung der Synthesaufgabe  $n_1 = 1,36055$  und  $n_2 = 1,47752$ ; die maximale Abweichung  $Z^*$  vom Achromasieniveau ist nach (6.4)  $Z^* = 1,85 \cdot 10^{-4}$ , und für den Arbeitswellenlängenbereich  $420 \text{ nm} \leq \lambda \leq 777 \text{ nm}$  ist die optische Dicke nach (6.5)  $\Delta = 136,32 \text{ nm}$ .

Die algebraische Lösung der Synthesegleichungen (3.21) für  $S > 2$  gestaltet sich wegen der komplizierten Abhängigkeit der  $A_j$  von den Brechzahlen schwierig. Hier empfiehlt sich der in Abschnitt 5 beschriebene Algorithmus, welcher im Prinzip eine einheitliche Programmierung mit der Schichtzahl  $S$  als Parameter gestattet. Dabei ist die Ambiguität der Identifikation in der Nullstellengesamtheit eines durch die Vorgaben bestimmten Polynoms überschaubar (vgl. Abschnitt 5/Bemerkung 1). — Die numerische Lösung der Synthesegleichung (3.21) für  $S = 3$  wurde in [2] untersucht.

Die durch ein Syntheseverfahren bestimmten Strukturparameter sind in der Praxis nicht immer realisierbar. Beispielsweise stehen in der Optik zur Beschichtung kaum Substanzen mit einem Brechungsindex kleiner als 1,36 zur Verfügung. In einer solchen Situation kann man versuchen, durch Abänderung der Leistungsparameter realisierbare Systeme zu identifizieren. Dazu benötigt man eine für die interaktive

Problembearbeitung, d. h. den Dialog mit dem Rechner geeignete Software. Tabelle 1 vermittelt einen Eindruck, wie der Strukturparameter  $n_1$  von den Leistungsparametern  $H$  und  $BB$  abhängt. Eine derartige Systemsensitivität hat für die Praxis erhebliche Bedeutung. Im Herstellungsprozeß lassen sich die Strukturparameter meist nicht fehlerfrei reproduzieren und es ist notwendig, die Auswirkung dieser Ungenauigkeiten auf die Nennleistung des Systems zu minimieren. Daraus abzuleitende Stabilitätsforderungen sind häufig eine beim Design zu erfüllende Nebenbedingung.

Auch bei der Synthese ist es unter Umständen notwendig, einen Wechsel der Strukturhypothese vorzunehmen, wie er am Ende von Abschnitt 3 im Zusammenhang mit der Systemerkennung begründet wurde. Im Fall der Synthese von Achromasiesystemen kann man mit Rücksicht auf die geforderte Güte und Realisierbarkeit der Brechzahlwerte etwa die Anzahl der Schichten erhöhen. Eine andere Möglichkeit ist, nicht realisierbare Brechzahlen geeignet durch solche verfügbarer Substanzen zu ersetzen und das System durch eine nachfolgende Dickenvariation zu optimieren.

## LITERATUR

- [1] ABELÈS, F.: Recherches sur la propagation des ondes électromagnétiques sinusoidales dans les milieux stratifiés: Application aux couches minces. *Ann. Physique* 12<sup>e</sup> serie 5 (1950), 596—640.
- [2] ANDERS, H.-J., SINGER, K., und E. UHLMANN: Three-layer broadband ARC in the visible, IR and UV by Chebyshev approximation and Newton iteration. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 30 (1986), 103—107.
- [3] AZZAM, R. M. A.: Direct relation between Fresnel's interface reflection coefficients for the parallel and perpendicular polarizations. *J. Optical Soc. Amer.* 69 (1979), 1007—1016.
- [4] AZZAM, R. M. A.: Transformation of Fresnel's interface reflection and transmission coefficients between normal and oblique incidence. *J. Optical Soc. Amer.* 69 (1979), 590—596.
- [5] BALTES, H. P.: Forschung in theoretischer optischer Physik. *Landis & Gyr-Mitt.* 27 (1980), 7—11.
- [6] BELLMAN, R.: Functional equations in the theory of dynamic programming: V. Positivity and quasilinearity. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 41 (1955), 743—746.
- [7] BELLMAN, R., und R. KALABA: Functional equations, wave propagation, and invariant imbedding. *J. Math. Mech.* 8 (1959), 683—704.
- [8] BLOCH, S. SCH.: Angenäherte Synthese von Mechanismen. Berlin: Verlag Technik 1951 (Übers. a. d. Russ.).
- [9] BREMMER, H.: The WBK approximation as the first term of a geometrical optical series. In: *The Theory of Electromagnetic Waves. A Symposium held at the Washington Square College of Arts and Sciences, June 6—8, 1950.* New York: Intersci. Publ. 1952, 169—179.
- [10] CHEBYSHEV, P. L.: Oeuvres, Vol. I, II. St. Petersburg: Acad. Imp. Sci. 1899 und 1907.
- [11] FREUDENTHAL, H.: Operatorenrechnung — von Heaviside bis Mikusinski. *Überblicke Mathematik* 2 (1969), 131—148.
- [12] GOLUSIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1957.
- [13] HIRSCH, J.: An analytical solution to the synthesis problem for dielectric thin-film layers. *Optica Acta* 26 (1979), 1273—1279.
- [14] JACOBSON, R.: Light reflection from films of continuously varying refractive index. *Progress in Optics* 5 (1966), 247—286.
- [15] KAGIWADA, H. H.: System identification: methods and applications. Reading (Mass.): Addison-Wesley 1974.
- [16] KAISER, H.: Algorithmen zur Analyse und Synthese von Interferenzschichtsystemen. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 17 (1973), 117—132.
- [17] KAISER, H.: Beiträge zur Theorie der Löwnerschen Differentialgleichung. In: *Internat. Math.-Kongreß Moskau, 16.—26. August 1966. Sektion 6: Gew. Differentialgl., Resümees.* Moskau: Int. Congr. Math. (ICM) 1966, S. 10.
- [18] KAISER, H.: Beiträge zur Theorie der Löwnerschen Differentialgleichung. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 11 (1967), 55—92.



- [19] KAISER, H.: Charakterisierung des Fresnelschen Reflexionskoeffizienten  $r$ , bei senkrechtem und schrägen Einfall durch eine Löwnersche Differentialgleichung. In: 4. Kolloquium Interferenzschichtsysteme Lindow/Mark (DDR), 26.–30. 3. 1984 (Potsdamer Forsch.: Reihe B, Heft 45). Potsdam: Päd. Hochsch. 1984, 22–26.
- [20] KAISER, H.: Extremwerte des Reflexionsgrades. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 21 (1977), 189–203.
- [21] KAISER, H.: Geschichtete Medien als lineare Übertragungssysteme. In: 4. Kolloquium Interferenzschichtsysteme Lindow/Mark (DDR), 26.–30. 3. 1984 (Potsdamer Forsch.: Reihe B, Heft 45). Potsdam: Päd. Hochsch. 1984, 15–21.
- [22] KAISER, H.: Search procedures in the synthesis of thin-film systems with prescribed optical properties. In: *Thin Films, Vol. II. Proc. 3rd Int. Conf. Budapest, August 25–29, 1975* (Eds: J. Giber and J. F. Pócsa). Lausanne: Elsevier-Sequoia, S. A. 1976, p. 348.
- [23] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Analysis der Transferkoeffizienten geschichteter Medien (Report: R-Math-05/86). Berlin: Inst. Math. Akad. Wiss. 1986, I–X und 1–139.
- [24] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Beiträge zur Synthese von Interferenzschichtsystemen. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 20 (1976), 137–153.
- [25] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Betragsabschätzungen für den Reflexionskoeffizienten. In: 4. Kolloquium Interferenzschichtsysteme Lindow/Mark (DDR), 26.–30. 3. 1984 (Potsdamer Forsch.: Reihe B, Heft 45). Potsdam: Päd. Hochsch. 1984, 27–36.
- [26] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Elektromagnetische Wellen in geschichteten Medien: Allgemeine Grundlagen (Potsdamer Forsch.: Reihe B, Heft 16). Potsdam: Päd. Hochsch. 1979, 1–151.
- [27] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Identification of stratified media based on the Bremmer series representation of the reflection coefficient. *Applied Optics* 22 (1983), 1337–1345.
- [28] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Interferenzschichtsysteme zur Entspiegelung bei diskreten Wellenlängen. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 19 (1975), 123–130.
- [29] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Mathematical methods in synthesis and identification of thin-film systems. *Applied Optics* 20 (1981), 1043–1049.
- [30] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Methods of pattern recognition in the synthesis and identification of thin-film systems. *Thin Solid Films* 74 (1980), 173–178.
- [31] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Numerical methods in system design and identification with application to wave propagation in layered media. *Banach Center Publ.* 13 (1948), 291–311.
- [32] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Synthesis and identification of thin-film systems by means of quasilinearization. *Wiss. Z. Päd. Hochsch. Potsdam* 25 (1981), 111–120.
- [33] KAISER, H., and H.-C. KAISER: Zur Bestimmung des Brechzahlprofils aus dem Reflexionskoeffizienten. In: 3. Kolloquium Interferenzschichtsysteme Lindow/Mark (DDR), 22. bis 26. 3. 1982 (Potsdamer Forsch.: Reihe B, Heft 31). Potsdam: Päd. Hochsch. 1982, 75–99.
- [34] KALABA, R.: On nonlinear differential equations: the maximum operation and monotone convergence. *J. Math. Mech.* 8 (1959), 519–574.
- [35] КАРД, П. Г.: Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин: Изд-во ВАЛГУС 1971.
- [36] KNITTL, Z.: A rational function approach to multilayer synthesis. *Applied Optics* 6 (1967), 331–340.
- [37] KNITTL, Z.: *Optics of Thin Films*. London—New York—Sidney—Toronto: J. Wiley & Sons 1976.
- [38] KOFINK, W.: Reflexion elektromagnetischer Wellen an einer inhomogenen Schicht. *Ann. Phys. (6. Folge)* 1 (1947), 119–132.
- [39] KÖPPE, A.: Systemtheoretische Begründung der Identifikation geschichteter Medien: Dissertation. Potsdam: Math.-Nat. Fakultät Päd. Hochsch. 1986.
- [40] LAUGWITZ, H.: Ein Jahrzehnt Operatorenrechnung. *Überblicke Mathematik* 2 (1969), 149–153.
- [41] LAWRENTJEW, M. A., and B. W. SHABAT: *Methoden der komplexen Funktionentheorie*. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1967.
- [42] LÖWNER, K.: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *Math. Ann.* 89 (1923), 103–121.
- [43] MACLEOD, H. A.: *Thin-Film Optical Filters*. London: A. Hilger Ltd. 1969.

- [44] MIKUSINSKI, J.: Operatorenrechnung. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1957.
- [45] MOSES, H. E.: Calculation of the scattering potential from reflection coefficients. *Phys. Review* **102** (1956), 559—567.
- [46] NELDER, J. A., and R. MEAD: A simplex method for function minimization. *Comp. J.* **7** (1965), 308—313.
- [47] PAPOULIS, A.: *Systems and Transforms*. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1968.
- [48] PARKINSON, J. M., and D. HUTCHINSON: An investigation into the efficiency of variants of the simplex method. In: *Numerical methods for non-linear optimization* (Ed.: F. A. Lootsma). London—New York: Acad. Press 1972.
- [49] PEGIS, R. J.: An exact design method for multilayer dielectric films. *J. Optical Soc. Amer.* **51** (1961), 1255—1264.
- [50] POHLACK, H.: Die Synthese optischer Interferenzschichtsysteme mit vorgegebenen Spektraleigenschaften. In: *Jenäer Jahrbuch 1952. Wiss. Veröff. d. Zeisswerks* (Hrsg.: VEB Optik Carl Zeiss Jena). Jena: Gustav-Fischer-Verlag 1952, 181—221.
- [51] SCHÖBEL, W.: Anwendung funktionentheoretischer Methoden bei der Identifikation von Interferenzschichtsystemen: Dissertation A. Potsdam: Math.-Nat. Fakultät Päd. Hochsch. 1987.
- [52] UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie*. Berlin: Akademie-Verlag 1969.
- [53] WALKER, L. R., and N. WAX: Non-uniform transmission lines and reflection coefficients *J. Appl. Phys.* **17** (1946), 1043—1045.
- [54] WOLTER, H.: *Optik dünner Schichten*. In: *Handbuch der Physik*, Bd. XXIV (Hrsg.: S. Flügge). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1956.
- [55] WUNSCH, G.: *Systemanalyse. Band 1: Lineare Systeme*. Berlin: Verlag Technik 1972.
- [56] ZEMLIN, E.: Die Bestimmung des maximalen Reflexionskoeffizienten bei Interferenzschichtsystemen. *Wiss. Z. Päd. Hochschule Potsdam* **18** (1974), 117—128.

Manuskripteingang: 02. 12. 1987

#### VERFASSER:

Prof. Dr. HANS KAISER  
 Sektion Mathematik/Physik  
 der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht“  
 Am Neuen Palais  
 DDR-1500 Potsdam

Dr. HANS-CHRISTOPH KAISER  
 Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik  
 der Akademie der Wissenschaften der DDR  
 Mohrenstr. 39  
 DDR-1086 Berlin