Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (1) 1989, S. 43–56

Behandlung Fredholmscher Integralgleichungen mit schwachen Singularitäten und Unstetigkeiten erster Art in den Kernfunktionen

C. Wisotzki

Zur Lösung Fredholmscher Integralgleichungen zweiter Art, deren Kernfunktionen Unstetigkeiten erster Art entlang beliebiger stetiger Kurven und schwache Singularitäten aufweisen, werden Quadraturen vom Zweifachinterpolationstyp mit angepaßter Produktintegration verwendet. Die mit Hilfe solcher Quadraturen unter Nutzung der zwei vorgeschlagenen Anpassungsprinzipien erstellten Folgen von Näherungsoperatoren sind kollektiv kompakt, d. h., sie liefern konvergente Näherungsverfahren.

Для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода ядерные функции которых имеют разрывы вдоль любых непрерывных кривых и слабые особенности, потребляются квадратурные методы двухинтерполяционного типа с адаптивным методом интегрирования по частям. Таким методом интегрирования при помощи двух рекоммендуемых принципа адаптирования возникающие последовательности приближённых операторов коллективно компактны; т.е. они дают сходящийся метод приближения.

Twice interpolatory type quadrature formulas with adapted product integration have been used for solving Fredholm integral equations of the second kind, where the kernel function has discontinuities of the first kind along any continuous curve and weak singularities. The series of approximation operators developed by means of such quadrature formulas with the help of two recommended adaption principles are collectively compact, i.e. they give a convergent approximation method.

1. Einleitung

Es werden Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art

$$y - \mathcal{K}[y] = G \tag{1.1}$$

mit Integraloperatoren

$$\mathcal{K}[y](s) = \int_a^b H(s,t)\, K(s,t)\, y(t)\, dt, \qquad s \in [a,b] \tag{1.2}$$

im Banachraum $C[a,b]$ der stetigen Funktionen auf dem endlichen Intervall $[a,b]$ mit der Maximumnorm betrachtet. Über die Kernanteile H und K wird folgendes vorausgesetzt:

(**V1**) Es existieren $d \in C[a,b]$ und $\alpha < 1$, so daß für die Funktion

$$Z(s,t) = H(s,t)\, |d(s) - t|^{\alpha} \qquad (s,t \in [a,b])$$

$Z(s,\cdot) \in C[a,b]$ für alle $s \in [a,b]$ gilt.

(**V2**) $\lim\limits_{\Delta \to 0} \int_a^b |H(s+\Delta,t) - H(s,t)|\, dt = 0$ für alle $s \in [a,b]$.

(V 3) Es existieren $c \in C[a, b]$ und $K_1, K_2 \in C[a, b]^2$, so daß

$$K(s, t) = \begin{cases} K_1(s, t), & \text{falls } t < c(s), \\ K_2(s, t), & \text{falls } t > c(s), \end{cases}$$

gilt.

Aus diesen drei Voraussetzungen folgt die Beziehung

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_a^b |H(s + \Delta, t)\, K(s + \Delta, t) - H(s, t)\, K(s, t)|\, dt = 0 \qquad \forall\, s \in [a, b] \quad (1.3)$$

und damit die Kompaktheit des Integraloperators (1.2).

Zur Approximation von Integraloperatoren (1.2) wurden von Micke und Wisotzki [6] für den Fall beschränkter unstetiger Kernfunktionen (d. h., $H \equiv 1$, und K genügt (V 3)) Quadraturen vom Zweifachinterpolationstyp vorgeschlagen, die auf einer Kombination einer einfachen Quadratur, die der Unstetigkeit von K angepaßt wird, und einer Interpolation beruhen. In der vorliegenden Arbeit wird die Technik der Quadratur vom Zweifachinterpolationstyp verwendet, wobei anstelle der angepaßten einfachen Quadratur eine an die Unstetigkeit von K angepaßte Produktintegration, die die schwache Singularität von H berücksichtigt, eingesetzt wird.

Beispiele für Integralgleichungen mit Operatoren der Gestalt (1.2) sind Volterra-Integralgleichungen, deren Kernfunktionen schwache Singularitäten aufweisen, und Gleichungen mit schwach singulären und Greenschen Kernanteilen. Integraloperatoren mit schwach singulären Kernen $K_0(s, t)$, die eine komplizierte Gestalt besitzen und deren schwache Singularität qualitativ bekannt ist (d. h., $K_0(s, t)/L(s, t)$ erfüllt (V3), $L(s, t) = \ln |d(s) - t|$ oder $L(s, t) = |d(s) - t|^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$), können mit $K(s, t) = K_0(s, t)/L(s, t)$ und $H(s, t) = L(s, t)$ in die Form (1.2) gebracht und mit der Technik der Quadratur vom Zweifachinterpolationstyp approximiert werden. (Solche Kernfunktionen können hypergeometrische Funktionen sein, die bei der Anwendung der Randintegralmethode auf Differentialgleichungen der mathematischen Physik entstehen.)

Im Abschnitt 2 werden Quadraturen vom Zweifachinterpolationstyp eingeführt. Im Abschnitt 3 wird die Konstruktion der an die Unstetigkeitstrajektorie von K angepaßten Familie von Quadraturen beschrieben. Es wird die gleichmäßige Konvergenz dieser Quadraturen bewiesen. Im Abschnitt 4 wird, bezugnehmend auf die Resultate von Micke und Wisotzki [6], gezeigt, daß mit Hilfe der Quadraturen vom Zweifachinterpolationstyp kollektiv kompakte Folgen von Näherungsoperatoren für den Operator (1.2) erzeugt werden können.

2. Quadraturen vom Zweifachinterpolationstyp

Sei $h \in L_1(a, b)$ (Raum der auf $[a, b]$ absolut integrierbaren Funktionen) und $g \in C[a, b]$. Es werden Quadraturen $Q_{MN}[h; g; \cdot]: C[a, b] \to \mathbf{R}_1$ der Gestalt

$$Q_{MN}[h; g; f] = \sum_{i=1}^{N'} W_i^{MN}(h; g)\, f(\bar{t}_i^N), \tag{2.1}$$

$M \in \mathcal{N}_Q$, $N \in \mathcal{N}_P$ ($\mathcal{N}_Q, \mathcal{N}_P \subset \mathbf{N}$ — Menge der natürlichen Zahlen), $a \leqq \bar{t}_1^N \leqq \bar{t}_2^N \leqq \cdots \leqq \bar{t}_N^N \leqq b$, mit den Fehlerfunktionalen

$$R_{MN}[h; g; f] = \int_a^b h(t)\, g(t)\, f(t)\, dt - Q_{MN}[h; g; f] \tag{2.2}$$

betrachtet. Die Folge (Q_{MN}) heißt konvergent, wenn $R_{MN}[h; g; f] \to 0$ mit $M, N \to \infty$ für alle $f \in C[a, b]$ ist. Sei ferner $C_p[a, b]$ der Raum der auf $[a, b]$ stückweise stetigen Funktionen. Es bezeichnen $\bar{P}_N$: $C[a, b] \to C[a, b]$, $N \in \mathcal{N}_P$, und P_M: $C[a, b] \to C_p[a, b]$, $M \in \mathcal{N}_Q$, Glieder konvergenter Folgen von Interpolationen mit den Ansatzfunktionen $\bar{a}_i^N \in C[a, b]$, $a_j^M \in C_p[a, b]$ und den Stützstellen $\bar{t}_i^N$, t_j^M, $a \leqq t_1^M \leqq t_2^M \leqq \cdots \leqq t_M^M \leqq b$, d. h., für $t \in [a, b]$ ist

$$\bar{P}_N[f](t) = \sum_{i=1}^{N} \bar{a}_i^N(t) f(\bar{t}_i^N) \quad \text{und} \quad P_M[f](t) = \sum_{j=1}^{M} a_j^M(t) f(t_j^M),$$

und für die Fehleroperatoren $\bar{S}_N = I - \bar{P}_N$ und $S_M = I - P_M$ gelten die Konvergenzbeziehungen

$$\lim_{N\to\infty} \|\bar{S}_N[f]\| = \lim_{M\to\infty} \|S_M[f]\| = 0 \qquad \text{für alle } f \in C[a, b].$$

Sei weiter Q_M die Produktintegration mit der Gewichtsfunktion h und der erzeugenden Interpolation P_M, d. h., für $f \in C[a, b]$ ist

$$Q_M[h; f] = \int_a^b h(t) P_M[f](t)\, dt = \sum_{j=1}^{M} w_j^M(h) f(t_j^M), \qquad w_j^M(h) = \int_a^b h(t) a_j^M(t)\, dt.$$

Die Quadratur

$$Q_{MN}[h; g; f] = Q_M[h; g\bar{P}_N[f]] = \int_a^b h(t) P_M[g\bar{P}_N[f]](t)\, dt, \tag{2.3}$$

$f \in C[a, b]$, heißt *Quadratur vom Zweifachinterpolationstyp*. Sie kann mit den Gewichten

$$W_i^{MN}(h; g) = \sum_{j=1}^{M} w_j^M(h) g(t_j^M) \bar{a}_i^N(t_j^M)$$

in der Gestalt (2.1) dargestellt werden.

Die folgenden Betrachtungen einiger Grenzfälle zeigen, daß die Quadratur (2.3) sowohl als Verallgemeinerung (vgl. (2.6)) als auch als Näherung (vgl. (2.4) und (2.5)) der aus der Literatur (z. B. Davis und Rabinowitz [3], Young [9]) bekannten Produktintegration angesehen werden kann:

Sei M fest. Durch den Grenzübergang $N \to \infty$ geht die Quadratur (2.3) in die Produktintegration mit der erzeugenden Interpolation P_M und der Gewichtsfunktion h für $g \cdot f$ über, d. h.

$$Q_{M*}[h; g; f] := \lim_{N\to\infty} Q_{MN}[h; g; f] = Q_M[h; g \cdot f]. \tag{2.4}$$

Der Grenzübergang $M \to \infty$ führt bei fixiertem N die Quadratur (2.3) in die Produktintegration mit der erzeugenden Interpolation $\bar{P}_N$ und der Gewichtsfunktion $h \cdot g$ über:

$$Q_{*N}[h; g; f] := \lim_{M\to\infty} Q_{MN}[h; g; f] = \int_a^b h(t) g(t) \bar{P}_N[f](t)\, dt. \tag{2.5}$$

Wenn $P_N = \bar{P}_N$ Lagrange-Interpolationen sind, d. h. $a_i^N(t_j^N) = \delta_{ij}$, $1 \leqq i, j \leqq N$, dann gilt

$$Q_{NN}[h; g; f] = \int_a^b h(t) P_N[g \cdot f](t)\, dt = Q_{N*}[h; g; f]. \tag{2.6}$$

Lemma 1: *Sei* $h \in L_1(a, b)$, $g \in C[a, b]$, *und seien* $\overline{P}_N\colon C[a, b] \to C[a, b]$, $N \in \mathcal{N}_P$, $P_M\colon C[a, b] \to C_p[a, b]$, $M \in \mathcal{N}_Q$, *Glieder konvergenter Interpolationsfolgen. Mit den Bezeichnungen*

$$Q_M[h; f] = \int_a^b h(t)\, P_M[f]\,(t)\, dt, \qquad R_M[h; f] = \int_a^b h(t)\, f(t)\, dt - Q_M[h; f]$$

und $\overline{S}_N = I - \overline{P}_N$ *gilt für das Fehlerfunktional* (2.2) *der Quadratur vom Zweifachinterpolationstyp* (2.3) *die Abschätzung*

$$|R_{MN}[h; g; f]| \leqq |R_M[h; g \cdot f]| + |Q_M[h; g]|\, \|\overline{S}_N[f]\| \quad \textit{für alle } f \in C[a, b],$$

d. h., Q_{MN} *ist konvergent.*

Beweis: Die Aussage des Lemmas folgt aus der Abschätzung

$$|R_{MN}[h; g; f]| \leqq \left| \int_a^b h(t)\, \{g(t)\, f(t) - P_M[g \cdot f]\,(t)\}\, dt \right| + \left| \int_a^b h(t)\, P_M[g\overline{S}_N[f])]\,(t)\, dt \right|$$
$$= |R_M[h; g \cdot f]| + \left|Q_M[h; g\overline{S}_N[f]]\right| \;\blacksquare$$

Lemma 1 zeigt neben der Konvergenz der Quadratur vom Zweifachinterpolationstyp die Möglichkeit der Separierung der durch P_M und durch $\overline{P}_N$ erzeugten Fehler.

Die Quadratur vom Zweifachinterpolationstyp ist zweiparametrig (M und N). Um ein spezielles, einparametriges Quadraturverfahren zu erhalten, ist M in Abhängigkeit von N (oder umgekehrt) vorzugeben, d. h., der Parameter M muß als Abbildung von $\mathcal{N}_p$ in $\mathcal{N}_Q$ gegeben sein. Eine solche Abbildung heißt *Strategie*, falls $M(N) \to \infty$ für $N \to \infty$ gilt. Lemma 1 eröffnet die Möglichkeit einer *adaptiven* Strategie, d. h., M wird bei gegebenem N so gewählt, daß der durch Q_M eingebrachte Fehler in den Gesamtfehler eine geringere Größenordnung besitzt als der Fehler, den $\overline{P}_N$ einbringt.

3. Angepaßte Quadraturen

Für $c, d \in [a, b]$ sei

$$\mathcal{C}(a, b, c) = \left\{ g \in C_p[a, b] \colon g(t) = \begin{cases} g_1(t), & t < c, \\ g_2(t), & t > c, \end{cases} \quad \text{für gewisse } g_1, g_2 \in C[a, b] \right\}$$

und

$$\mathcal{H}(a, b, d) = \{h \in L_1(a, b) \colon z \in C[a, b],\, z(t) = h(t)\, |d - t|^\alpha \text{ für ein } \alpha < 1\}.$$

Es sollen Quadraturen entwickelt werden, die für $g \in \mathcal{C}(a, b, c)$ konvergieren, d. h., die sich an die Unstetigkeit von g anpassen. Sei $h \in \mathcal{H}(a, b, d)$. Mit $\tilde{Q}_{M_1}$, $M_1 \in \mathcal{N}_1$, und $\hat{Q}_{M_2}$, $M_2 \in \mathcal{N}_2(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subset \mathbf{N})$ werden Produktintegrationen auf den Teilintervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ bezeichnet. Als angepaßte Quadratur für $g \in \mathcal{C}(a, b, c)$ wird

$$\overline{Q}_M{}^c[h; g] = \tilde{Q}_{M_1}[h; g_1] + \hat{Q}_{M_2}[h; g_2], \qquad M = M_1 + M_2, \tag{3.1}$$

gesetzt. Offensichtlich gilt

$$\overline{R}_M{}^c[h; g] = \tilde{R}_{M_1}[h; g_1] + \hat{R}_{M_2}[h; g_2], \tag{3.2}$$

wobei R den Fehler von Q mit derselben Indizierung bezeichnet. Das heißt, aus der Konvergenz von $\tilde{Q}_{M_1}$ und $\hat{Q}_{M_2}$ folgt $\overline{R}^c_{M_1+M_2}[h; g] \to 0$ für $M_1, M_2 \to \infty$.

Sei nun $c \in C[a, b]$, und H genüge (V 1) und (V 2). Es wird eine Familie s-abhängiger Quadraturen der Gestalt (3.1) betrachtet:

$$Q_M{}^s[g] = \bar{Q}_M{}^{c(s)}[H(s, \cdot); g], \qquad s \in [a, b]. \tag{3.3}$$

Wenn die Quadraturen auf den Teilintervallen $\tilde{Q}_{M_1}$ und $\hat{Q}_{M_2}$ konvergent sind, gilt wegen (3.2) für alle $s \in [a, b]$ und $g \in \mathscr{C}(a, b, c(s))$ die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{M_1, M_2 \to \infty} |R^s_{M_1+M_2}[g]| = 0, \qquad R_M{}^s[g] = \int_a^b H(s, t)\, g(t)\, dt - Q_M{}^s[g].$$

Unter welchen Bedingungen diese Konvergenz gleichmäßig in s ist, ergibt sich aus dem folgenden

Satz 1 (Micke und Wisotzki [6]): *Für jedes $M \in \mathcal{N}_Q$ sei $\{Q_M{}^s, s \in [a, b]\}$ eine Familie von Quadraturen mit den Gewichten $w_j{}^M(s)$, den Stützstellen $t_j{}^M(s)$ $(1 \leqq j \leqq M)$ und den Fehlerfunktionalen $R_M{}^s$. Aus den Bedingungen*

(i) $\displaystyle\lim_{M \to \infty} R_M{}^s[g] = 0 \qquad \forall\, s \in [a, b], g \in C[a, b],$

(ii) $$\lim_{\Delta \to 0} \sup_{M \in \mathcal{N}_Q} \sum_{j=1}^{M} |w_j{}^M(s + \Delta) - w_j{}^M(s)| = 0 \qquad \forall\, s \in [a, b], \tag{3.4}$$

(iii) $$\lim_{\Delta \to 0} \sup_{M \in \mathcal{N}_Q} \max_{1 \leqq j \leqq M} |t_j{}^M(s + \Delta) - t_j{}^M(s)| = 0 \qquad \forall\, s \in [a, b] \tag{3.5}$$

folgt die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{M \to \infty} \sup_{s \in [a,b]} |R_M{}^s[g]| = 0 \textit{ für alle } g \in C[a, b].$$

Daraus erhält man dank des Satzes von Gelfand (vgl. Kantorowitsch und Akilow [4: S. 243]), daß unter den Voraussetzungen von Satz 1

$$\lim_{M \to \infty} \sup_{s \in [a,b]} |R_M{}^s[K(s, \cdot)]| = 0 \qquad \text{für } K \in C[a, b]^2 \tag{3.6}$$

gilt.

Folgerung: *Sei $Q_M{}^s$ $(M = M_1 + M_2, M_1 \in \mathcal{N}_1, M_2 \in \mathcal{N}_2)$ gemäß (3.1) und (3.3) konstruiert, wobei $\tilde{Q}_{M_1}$ und $\hat{Q}_{M_2}$ konvergent sind. Wegen (3.2) gilt unter den Voraussetzungen von Satz 1 die Konvergenz (3.6) für jede Funktion K, die der Voraussetzung* (V 3) *genügt, wenn mit $M \to \infty$ auch $M_1 \to \infty$ und $M_2 \to \infty$ ist.*

Zur Konstruktion spezieller angepaßter Quadraturen werden zwei Prinzipien herangezogen.

3.1. Global angepaßte Quadraturen

Bezeichnen $(\tilde{P}_{M_1})_{M_1 \in \mathcal{N}_1}$ und $(\hat{P}_{M_2})_{M_2 \in \mathcal{N}_2}$ zwei konvergente Folgen von Interpolationen auf $[0, 1]$. Die global angepaßte Quadratur ist eine Produktintegration, deren erzeugende Interpolation aus Transformationen von $\tilde{P}_{M_1}$ auf $[a, c(s)]$ und von $\hat{P}_{M_2}$ auf $[c(s), b]$ zusammengesetzt ist. Seien $\tilde{a}_j{}^{M_1}$, $\hat{a}_k{}^{M_2} \in C_p[0, 1]$ die Ansatzfunktionen und $\tilde{t}_j{}^{M_1}, \hat{t}_k{}^{M_2} \in [0, 1]$ die Stützstellen von $\tilde{P}_{M_1}$ bzw. $\hat{P}_{M_2}$ $(1 \leqq j \leqq M_1$ und $1 \leqq k \leqq M_2)$. Mit $\tilde{P}^s_{M_1}$ und $\hat{P}^s_{M_2}$ werden die auf $[a, c(s)]$ bzw. $[c(s), b]$ transformierten

Interpolationen $\tilde{P}_{M_1}$ bzw. $\hat{P}_{M_2}$ bezeichnet, und es wird

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^s_{M_1}[g_1] &= \int_a^{c(s)} H(s,t)\,\tilde{P}^s_{M_1}[g_1](t)\,dt, \qquad g_1 \in C[a, c(s)],\\ \hat{Q}^s_{M_2}[g_2] &= \int_{c(s)}^b H(s,t)\,\hat{P}^s_{M_2}[g_2](t)\,dt, \qquad g_2 \in C[c(s), b],\end{aligned} \tag{3.7}$$

und

$$Q^s_{M_1+M_2}[g] = \tilde{Q}^s_{M_1}[g_1] + \hat{Q}^s_{M_2}[g_2], \qquad g \in \mathscr{C}\big(a, b, c(s)\big), \tag{3.8}$$

gesetzt. $Q_M{}^s$ ($M = M_1 + M_2$, $M_1 \in \mathscr{N}_1$, $M_2 \in \mathscr{N}_2$) heißt *global* angepaßte Quadratur und besitzt die Stützstellen

$$t_j{}^M(s) = \begin{cases} a + \tilde{t}_j{}^{M_1}[c(s) - a], & \text{falls } 1 \leqq j \leqq M_1, \\ c(s) + \hat{t}^{M_2}_{j-M_1}[b - c(s)], & \text{falls } M_1 < j \leqq M, \end{cases} \tag{3.9}$$

und die Gewichte

$$w_j{}^M(s) = \int_a^b H(s,t)\, a_j{}^M(s,t)\, dt,$$

wobei

$$a_j{}^M(s,t) = \begin{cases} \tilde{a}_j{}^{M_1}\left(\dfrac{t - a}{c(s) - a}\right), & c(s) > a,\ t \in [a, c(s)],\ 1 \leqq j \leqq M_1, \\ \hat{a}_j{}^{M_2}\left(\dfrac{t - c(s)}{b - c(s)}\right), & c(s) < b,\ t \in [c(s), b],\ M_1 < j \leqq M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Ansatzfunktionen der aus $\tilde{P}^s_{M_1}$ und $\hat{P}^s_{M_2}$ zusammengesetzten Interpolation

$$P_M{}^s[g](t) = \begin{cases} \tilde{P}^s_{M_1}[g_1](t), & \text{falls } t \in [a, c(s)], \\ \hat{P}^s_{M_2}[g_2](t), & \text{falls } t \in (c(s), b], \end{cases}$$

für $g \in \mathscr{C}\big(a, b, c(s)\big)$ sind:

Satz 2: *Seien für H und K die Voraussetzungen* (V1)—(V3) *erfüllt, und sei* $Q_M{}^s$ *eine global angepaßte Quadratur mit dem Fehlerfunktional* $R_M{}^s$ ($M = M_1 + M_2$, $M_1 \in \mathscr{N}_1$, $M_2 \in \mathscr{N}_2$). *Wenn die zur Erzeugung verwendeten Interpolationen* $\tilde{P}^s_{M_1}$ *und* $\hat{P}^s_{M_2}$ *(vgl.* (3.7) *und* (3.8)) *konvergent sind, dann gilt die Konvergenz* (3.6):

$$\lim_{M_1, M_2 \to \infty} \sup_{s \in [a,b]} |R_M{}^s[K(s,\cdot)]| = 0.$$

Zum Beweis des Satzes werden die folgenden zwei Hilfssätze benötigt:

Lemma 2: *Sei* $d \in [a, b]$, $h \in \mathscr{H}(a, b, d)$, $\Delta_0 > 0$, $\sigma, \tau \in C[-\Delta_0, \Delta_0]$ *und* $\delta(t, \Delta) = t\sigma(\Delta) + \tau(\Delta)$, *und seien die Bedingungen*

(i) $\sigma(\Delta), \tau(\Delta) \to 0$ *für* $\Delta \to 0$,

(ii) $t + \delta(t, \Delta) \in [a, b]$ *für* $t \in [a, b]$ *und* $\Delta \in [-\Delta_0, \Delta_0]$

erfüllt. Dann gilt die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{\Delta \to 0} \int_a^b \big|h\big(t + \delta(t, \Delta)\big) - h(t)\big|\, dt = 0.$$

Beweis: Da die Funktion h der Klasse $\mathcal{H}(a, b, d)$ angehört, existiert eine reelle Zahl $\alpha < 1$, so daß die Funktion z, $z(t) = h(t)\,|d - t|^\alpha$, auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist. Damit ist z auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig. Es kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\int_a^b \left|h\big(t + \delta(t, \Delta)\big) - h(t)\right| dt = \int_a^b \left|\frac{z\big(t + \delta(t, \Delta)\big)}{|d - t - \delta(t, \Delta)|^\alpha} - \frac{z(t)}{|d - t|^\alpha}\right| dt$$

$$\leqq \sup_{t \in [a,b]} \left|z\big(t + \delta(t, \Delta)\big)\right| \int_a^b \{|d - \tau(\Delta) - [1 + \sigma(\Delta)]\, t\,|^{-\alpha} - |d - t|^{-\alpha}\}\, dt$$

$$+ \sup_{t \in [a,b]} \left|z\big(t + \delta(t, \Delta)\big) - z(t)\right| \int_a^b |d - t|^{-\alpha}\, dt.$$

Daraus folgt die Aussage des Lemmas. ∎

Lemma 3: *Sei P_0: $C[0, 1] \to C_p[0, 1]$ eine beschränkte Interpolation mit den Ansatzfunktionen a_l $(1 \leqq l \leqq L)$, und seien $\alpha, \beta \in C[a, b]$ mit $a \leqq \alpha(s) \leqq \beta(s) \leqq b$ für alle $s \in [a, b]$. Mit P^s wird die Transformation von P_0 auf $[\alpha(s), \beta(s)]$ bezeichnet, und sei $Q^s[g] = \int_a^b H(s, t)\, P^s[g]\,(t)\, dt$. Die Gewichtsfunktion H erfülle die Voraussetzungen* (V 1) *und* (V 2).

Dann existiert eine Funktion $\varkappa$: $[a, b] \times [-\Delta_0, \Delta_0] \to \mathbf{R}_1$ $(\Delta_0 > 0)$ mit $\lim_{\Delta \to 0} \varkappa(s, \Delta) = 0$ für alle $s \in [a, b]$, so daß für die Gewichte w_l $(1 \leqq l \leqq L)$ von Q^s

$$\sum_{l=1}^{L} |w_l(s + \Delta) - w_l(s)| \leqq \|P_0\|\, \varkappa(s, \Delta)$$

gilt.

Beweis: Für die Ansatzfunktionen a_l^s von P^s gilt

$$a_l^s(t) = \begin{cases} a_l\left(\dfrac{t - \alpha(s)}{\beta(s) - \alpha(s)}\right), & \text{falls } \beta(s) > \alpha(s), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $t \in [\alpha(s), \beta(s)]$ und $1 \leqq l \leqq L$. Folglich haben die Gewichte von Q^s die Gestalt

$$w_l(s) = \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} H(s, t)\, a_l^s(t)\, dt\,,$$

$$= \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{b - a} \int_a^b H\left(s, \alpha(s) + (t - a)\, \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{b - a}\right) a_l\left(\frac{t - a}{b - a}\right) dt.$$

Unter Verwendung der Bezeichnung $w(s, t) = \alpha(s) + (t - a)\, \dfrac{\beta(s) - \alpha(s)}{b - a}$ kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$\sum_{l=1}^{L} |w_l(s + \Delta) - w_l(s)|$$

$$\leqq \int_a^b \left|\frac{\beta(s + \Delta) - \alpha(s + \Delta)}{b - a}\, H\big(s + \Delta, w(s + \Delta, t)\big) - \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{b - a}\, H\big(s, w(s, t)\big)\right|$$

$$\times \left(\sum_{l=1}^{L} \left|a_l\left(\frac{t - a}{b - a}\right)\right|\right) dt \leqq \|P_0\|\, \varkappa(s, \Delta)$$

mit

$$\varkappa(s, \Delta) = \int_a^b \left| \frac{\beta(s+\Delta) - \alpha(s+\Delta)}{b-a} H\big(s+\Delta, w(s+\Delta, t)\big) - \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{b-a} H\big(s, w(s, t)\big) \right| dt.$$

Es bleibt $\lim_{\Delta \to 0} \varkappa(s, \Delta) = 0$ für alle $s \in [a, b]$ zu zeigen. Es gilt

$$\varkappa(s, \Delta) \leqq \left| \frac{\beta(s+\Delta) - \beta(s) - [\alpha(s+\Delta) - \alpha(s)]}{b-a} \right| \int_a^b \left|H\big(s+\Delta, w(s+\Delta, t)\big)\right| dt$$
$$+ \frac{\beta(s) - \alpha(s)}{b-a} \int_a^b \left|H\big(s+\Delta, w(s+\Delta, t)\big) - H\big(s, w(s, t)\big)\right| dt. \tag{3.10}$$

Sei $\alpha(s) = \beta(s)$. Dann verschwindet der zweite Summand von (3.10), und mit Hilfe der linearen Variablentransformation $\tau = w(s+\Delta, t)$ erhält man

$$\varkappa(s, \Delta) \leqq \int_{\alpha(s+\Delta)}^{\beta(s+\Delta)} |H(s+\Delta, \tau)| \, d\tau \leqq \int_a^b |H(s+\Delta, \tau) - H(s, \tau)| \, d\tau + \int_{\alpha(s+\Delta)}^{\beta(s+\Delta)} |H(s, \tau)| \, d\tau,$$

d. h., im Falle $\alpha(s) = \beta(s)$ gilt $\varkappa(s, \Delta) \to 0$ für $\Delta \to 0$.

Sei $\alpha(s) < \beta(s)$. Es existieren Zahlen $\Delta_0, \varepsilon > 0$, so daß $\beta(s+\Delta) - \alpha(s+\Delta) \geqq \varepsilon$ im Falle $|\Delta| \leqq \Delta_0$ ist. Der erste Summand in (3.10) verschwindet für $\Delta \to 0$, da α und β stetig sind und

$$\int_a^b \left|H\big(s+\Delta, w(s+\Delta, t)\big)\right| dt \leqq \frac{b-a}{\beta(s+\Delta) - \alpha(s+\Delta)} \int_a^b |H(s+\Delta, t)| \, dt$$

ist. Den zweiten Summanden in (3.10) kann man durch

$$\int_a^b |H(s+\Delta, t) - H(s, t)| \, dt + \int_a^b \left|H\big(s, t + \delta(t, s, \Delta)\big) - H(s, t)\right| dt$$

abschätzen, wobei

$$\delta(t, s, \Delta) = \frac{\alpha(s+\Delta)\,\beta(s) - \alpha(s)\,\beta(s+\Delta)}{\beta(s) - \alpha(s)} + t\, \frac{[\beta(s+\Delta) - \beta(s)] - [\alpha(s+\Delta) - \alpha(s)]}{\beta(s) - \alpha(s)}$$

für $s \in [a, b]$ ist. Dank Lemma 2 und (V2) verschwindet auch der zweite Summand von (3.10), so daß die Konvergenz $\varkappa(s, \Delta) \to 0$ für $\Delta \to 0$ vollständig bewiesen ist ∎

Beweis von Satz 2: Wegen der Folgerung aus Satz 1 ist es hinreichend, die Beziehungen (3.4) und (3.5) zu zeigen. (Die Konvergenz der Quadratur Q_M^s für jedes $s \in [a, b]$ ist offensichtlich.) (3.5) folgt unmittelbar aus (3.9). Zum Beweis von (3.4) wird auf die Teilsummen aus den ersten M_1 und den letzten M_2 Summanden jeweils Lemma 3 angewendet. Danach existieren Funktionen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, so daß

$$\sum_{j=1}^{M_1} |w_j^M(s+\Delta) - w_j^M(s)| \leqq \|\tilde{P}_{M_1}\| \, \varkappa_1(s, \Delta),$$

$$\sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} |w_j^M(s+\Delta) - w_j^M(s)| \leqq \|\hat{P}_{M_2}\| \, \varkappa_2(s, \Delta)$$

und

$$\lim_{\Delta\to 0} \varkappa_1(s, \Delta) = \lim_{\Delta\to 0} \varkappa_2(s, \Delta) = 0 \qquad \text{für alle } s \in [a, b]$$

gilt. Da $(\tilde{P}_{M_1})$ und $(\hat{P}_{M_2})$ konvergente Folgen sind, sind sie der Norm nach beschränkt. Daraus folgt (3.4) ∎

3.2. Lokal angepaßte Quadraturen

Sei P_0 eine Interpolation auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ mit den Ansatzfunktionen a_l und den Stützstellen t_l ($1 \leqq l \leqq L$; $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots \leqq t_L \leqq 1$), und seien $a \leqq u_0{}^m \leqq u_1{}^m \leqq \cdots \leqq u_m{}^m \leqq b$ Elementarintervallzerlegungen von $[a, b]$, $m \in \mathcal{M} \subset \mathbf{N}$. Die Interpolation P_M, $M = mL$, mit den Ansatzfunktionen

$$a_{iL+l}^M(t) = \begin{cases} a_l\left(\dfrac{t - u_i{}^m}{u_{i+1}^m - u_i{}^m}\right), & \text{falls } t \in [u_i{}^m, u_{i+1}^m], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Stützstellen

$$t_{iL+l}^M = u_i{}^m + t_l(u_{i+1}^m - u_i{}^m) \tag{3.11}$$

für $0 \leqq i \leqq m - 1$ und $1 \leqq l \leqq L$ heißt *iterierte Interpolation von P_0 bezüglich $\{u_i{}^m\}_{i=0}^m$*. Von MICKE [5] wurde bewiesen, daß die beiden Bedingungen

$$P_0[\bar{g}] = \bar{g}, \qquad \bar{g} \equiv 1, \tag{3.12}$$

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqq i\leqq m} (u_i{}^m - u_{i-1}^m) = 0 \tag{3.13}$$

hinreichend und notwendig für die Konvergenz von P_M sind.

Sei $h \in L_1(a, b)$. Die Quadratur $\bar{Q}_M[h; \cdot]: C_p[a, b] \to \mathbf{R}_1$,

$$\bar{Q}_M[h; g] = \int_a^b h(t)\, P_M[g]\,(t)\, dt, \qquad M = mL,$$

heißt *iterierte Quadratur der Interpolation P_0 bezüglich $\{u_i{}^m\}_{i=0}^M$* mit der Gewichtsfunktion h. $\bar{Q}_M$ besitzt die Stützstellen (3.11) und die Gewichte w_{iL+l}^M ($0 \leqq i \leqq m - 1$, $1 \leqq l \leqq L$),

$$w_{iL+l}^M = \int_{u_i{}^m}^{u_{i+1}^m} h(t)\, a_{iL+l}^M(t)\, dt$$

$$= \frac{u_{i+1}^m - u_i{}^m}{b - a} \int_a^b h\left(u_i{}^m + (t - a)\,\frac{u_{i+1}^m - u_i{}^m}{b - a}\right) a_l\left(\frac{t - a}{b - a}\right) dt. \tag{3.14}$$

Lemma 4: *Seien die iterierte Interpolation P_M konvergent und $0 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq m - 1$. Dann gelten für die Gewichte der iterierten Quadratur mit der Gewichtsfunktion $h \in L_1(a, b)$ die Beziehungen*

a) $$\sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^M| \leqq \|P_0\| \int_{u_{i_1}^m}^{u_{i_2+1}^m} |h(t)|\, dt,$$

b) $$\lim_{m\to\infty} \max_{0\leqq i\leqq m-1} \sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^m| = 0.$$

Beweis: Aus (3.14) ergibt sich für die Gewichte eines Elementarintervalls die Abschätzung

$$\sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^M| \leqq \|P_0\| \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{b-a} \int_a^b \left| h\left(u_i^m + (t-a)\frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{b-a}\right)\right| dt$$

$$= \|P_0\| \int_{u_i^m}^{u_{i+1}^m} |h(t)|\, dt.$$

Aus ihr folgt die Behauptung a) und mit (3.13) auch die Behauptung b) ∎

Mögen die Kernanteile K und H die Voraussetzungen (V 1)—(V 3) erfüllen. Jeder Zerlegung der Folge $(\{u_i^m\}_{i=0}^m)$ wird der Unstetigkeitspunkt $c(s)$ hinzugefügt, so daß eine Folge s-abhängiger Elementarintervallzerlegungen entsteht. Sei $\hat{\imath}_m(s)$ derjenige Index, für den $u_{\hat{\imath}_m(s)-1} \leqq c(s) \leqq u_{\hat{\imath}_m(s)}$ gilt, und sei

$$v_i^m(s) = \begin{cases} u_i^m, & \text{falls } i < \hat{\imath}_m(s), \\ c(s), & \text{falls } i = \hat{\imath}_m(s), \\ u_{i-1}^m, & \text{falls } i > \hat{\imath}_m(s). \end{cases} \tag{3.15}$$

$P_M{}^s$, $M = (m+1)L$ mit $m \in \mathcal{M}$, bezeichne die iterierte Interpolation von P_0 bezüglich $\{v_i^m(s)\}_{i=0}^{m+1}$, $s \in [a, b]$. Die entsprechende iterierte Quadratur mit der Gewichtsfunktion $H(s, \cdot)$,

$$Q_M{}^s[g] = \int_a^b H(s,t)\, P_M{}^s[g]\,(t)\, dt, \qquad g \in \mathscr{C}\big(a, b, c(s)\big), \tag{3.16}$$

heißt *lokal angepaßte Quadratur*. Die Anpassung der Stützstellen an die Unstetigkeitstrajektorie

$$t_{iL+l}^M(s) = v_i^m(s) + [t - v_i^m(s)]\,[v_{i+1}^m(s) - v_i^m(s)] \tag{3.17}$$

erfolgt lokal, d. h. nur auf dem Elementarintervall $[u_{\hat{\imath}_m(s)-1}^m, u_{\hat{\imath}_m(s)}^m]$ der Ausgangszerlegung, das die Unstetigkeitsstelle enthält. Demgegenüber werden bei der global angepaßten Quadratur alle Stützstellentrajektorien der Unstetigkeitstrajektorie angepaßt, mit eventueller Ausnahme von $t_1{}^M$ und $t_M{}^M$ (vgl. (3.9)).

Satz 3: *Die Interpolation P_0 mit den Ansatzfunktionen a_l und den Stützstellen t_l, $1 \leqq l \leqq L$, erfülle (3.12), und die Folge $\{u_i^m\}_{i=0}^m$ erfülle (3.13). Die Kernanteile K und H mögen den Voraussetzungen (V 1)—(V 3) genügen, und die Folge $(\{v_i^m(s)\}_{i=0}^{m+1})$ sei gemäß (3.15) konstruiert.*

Dann gilt für den Fehler $R_M{}^s$ der lokal angepaßten Quadratur $Q_M{}^s$ die Beziehung (3.6):

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{s\in[a,b]} |R_M{}^s[K(s,\cdot)]| = 0.$$

Beweis (indirekt): Es wird angenommen, daß

$$\overline{\lim_{M\to\infty}} \sup_{s\in[a,b]} |R_M{}^s[K(s,\cdot)]| = \gamma > 0$$

ist. D. h., es existieren eine unendliche Indexmenge $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_Q$, eine Folge $(s_M)_{M\in\mathcal{N}_1} \subset [a, b]$ und ein Punkt $s^* \in [a, b]$, so daß $s_M \to s^*$ und

$$|R_M^{s_M}[K(s_M, \cdot)]| \geqq \frac{\gamma}{2} \qquad \text{für alle } M \in \mathcal{N}_1 \tag{3.18}$$

ist. Andererseits gilt die Abschätzung

$$|R_M^{s_M}[K(s_M, \cdot)]| \leqq |R_M^{s^*}[K(s^*, \cdot)]| + |R_M^{s_M}[K(s_M, \cdot)] - R_M^{s^*}[K(s^*, \cdot)]|. \quad (3.19)$$

Da Q_M^s auch in der Form (3.1) dargestellt werden kann, folgt wegen (3.2) aus (3.12) und (3.13) die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{M\to\infty} R_M^{s^*}[K(s^*, \cdot)] = 0. \quad (3.20)$$

Sei

$$\underline{i}_m = \min[\hat{\imath}_m(s^*), \hat{\imath}_m(s_M)] \quad \text{und} \quad \bar{\imath}_m = \max[\hat{\imath}_m(s^*), \hat{\imath}_m(s_M)].$$

Wegen der Beziehungen

$$w_{iL+l}^M(s_M) = w_{iL+l}^M(s^*) \quad \text{und} \quad t_{iL+l}^M(s_M) = t_{iL+l}^M(s^*), \qquad 1 \leqq l \leqq L,$$

falls $i < \underline{i}_m - 1$ oder $i > \bar{\imath}_m$ ist, und wegen der Voraussetzung (V3) läßt sich der zweite Summand von (3.19) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
&|R_M^{s_M}[K(s_M, \cdot)] - R_M^{s^*}[K(s^*, \cdot)]| \\
&\leqq \int_a^b |H(s_M, t)\, K(s_M, t) - H(s^*, t)\, K(s^*, t)|\, dt \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\underline{i}_m-2} \sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^M(s^*)| \left|K_1\big(s_M, t_{iL+l}^M(s^*)\big) - K_1\big(s^*, t_{iL+l}^M(s^*)\big)\right| \\
&\quad + \sum_{i=\underline{i}_m-1}^{\bar{\imath}_m} \sum_{l=1}^{L} \left|w_{iL+l}^M(s_M)\, K\big(s_M, t_{iL+l}^M(s_M)\big) - w_{iL+l}^M(s^*)\, K\big(s^*, t_{iL+l}^M(s^*)\big)\right| \\
&\quad + \sum_{i=\bar{\imath}_m+1}^{m} \sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^M(s^*)| \left|K_2\big(s_M, t_{iL+l}^M(s^*)\big) - K_2\big(s^*, t_{iL+l}^M(s^*)\big)\right| \\
&\leqq \int_a^b |H(s_M, t)\, K(s_M, t) - H(s^*, t)\, K(s^*, t)|\, dt \\
&\quad + \sup_{t\in[a,b]} \left[|K_1(s_M, t) - K_1(s^*, t)| + |K_2(s_M, t) - K_2(s^*, t)|\right] \left(\sum_{j=1}^{M} |w_j^M(s^*)|\right) \\
&\quad + \sup_{s,t\in[a,b]} |K(s, t)|\, U_M,
\end{aligned}$$

wobei

$$U_M = \sum_{i=\underline{i}_m-1}^{\bar{\imath}_m} \sum_{l=1}^{L} \left[|w_{iL+l}^M(s_M)| + |w_{iL+l}^M(s^*)|\right]$$

ist. Wegen (1.3), der Stetigkeit von K_1 und K_2 (vgl. (V3)) und der Beschränktheit der Folge der $\sum_{j=1}^{M} |w_j^M(s^*)| = \|Q_M^s\|$ gilt

$$\overline{\lim_{M\to\infty}}\, |R_M^{s_M}[K(s_M, \cdot)] - R_M^{s^*}[K(s^*, \cdot)]| = \overline{\lim_{M\to\infty}}\, U_M.$$

Dank Lemma 4 und (3.15) erhält man die Ungleichungen

$$\sum_{i=\underline{i}_m-1}^{\bar{\imath}_m} \sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^M(s_M)| \leqq \|P_0\| \int_{v_{\underline{i}_m-1}^m(s^*)}^{v_{\bar{\imath}_m+1}^m(s^*)} |H(s_M, t)|\, dt$$

und

$$\sum_{i=\underline{i}_m-1}^{\bar{i}_m} \sum_{l=1}^{L} |w_{iL+l}^M(s^*)| \leqq \|P_0\| \int\limits_{v^m_{\underline{i}_m-1}(s^*)}^{v^m_{\bar{i}_m+1}(s^*)} |H(s^*,t)|\,dt,$$

woraus die Abschätzung

$$U_M \leqq \|P_0\| \left\{ \int\limits_a^b |H(s_M,t) - H(s^*,t)|\,dt + 4 \max_{1\leqq i\leqq m} \int\limits_{u^m_{i-1}}^{u_i^m} |H(s^*,t)|\,dt + 2 \int\limits_{v^m_{\underline{i}_m}(s^*)}^{v^m_{\bar{i}_m}(s^*)} |H(s^*,t)|\,dt \right\}$$

folgt. Mit Hilfe von (3.15) kann man leicht zeigen, daß

$$\min\,[c(s^*), c(s_M)] \leqq v^m_{\underline{i}_m}(s^*) \leqq v^m_{\bar{i}_m}(s^*) \leqq \max\,[c(s^*), c(s_M^*)]$$

gilt, so daß die betrachtete Summe die Ungleichung

$$U_M \leqq \|P_0\| \left\{ \int\limits_a^b |H(s_M,t) - H(s^*,t)|\,dt + 4 \max_{1\leqq i\leqq m} \int\limits_{u^m_{i-1}}^{u_i^m} |H(s^*,t)|\,dt + 2 \left| \int\limits_{c(s^*)}^{c(s_M)} |H(s^*,t)|\,dt \right| \right\}$$

erfüllt, woraus $U_M \to 0$ für $M \to \infty$ und damit auch

$$\lim_{M\to\infty} |R_M^{s_M}[K(s_M,\cdot)] - R_M^{s^*}[K(s^*,\cdot)]| = 0$$

folgt. Die letzte Beziehung widerspricht gemeinsam mit (3.19) und (3.20) der Annahme (3.18), womit Satz 3 bewiesen ist ∎

4. Approximation des Integraloperators

Es wird nun Gleichung (1.1) betrachtet. Mit Hilfe von Näherungsoperatoren $\mathcal{K}_N$: $C[a,b] \to C[a,b]$ der Form

$$\mathcal{K}_N[y]\,(s) = \sum_{i=1}^{N} W_i^N(s)\, y(\bar{t}_i^N) \tag{4.1}$$

($N \in \mathcal{N}_P$, $s \in [a,b]$, $W_i^N \in C[a,b]$, $\bar{t}_i^N \in [a,b]$, $1 \leqq i \leqq N$) erhält man für (1.1) die Näherungsgleichungen

$$(I - \mathcal{K}_N)\,[y] = G, \quad N \in \mathcal{N}_P, \tag{4.2}$$

die mit Hilfe des Kollokationsprinzips mit $\bar{t}_i^N$ ($1 \leqq i \leqq N$) als Kollokationspunkte in die N-dimensionalen linearen algebraischen Gleichungssysteme

$$y_N(\bar{t}_k^N) - \sum_{i=1}^{N} W_i^N(\bar{t}_k^N)\, y(\bar{t}_i^N) = G(\bar{t}_k^N), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{4.3}$$

für die Funktionswerte $y_N^*(\bar{t}_i^N)$ ($1 \leqq i \leqq N$) der Lösungen y_N^* von (4.2) übergeführt werden. Die Näherungslösung y_N^* wird mit der Nyström-Interpolierten

$$y_N^*(s) = \sum_{i=1}^{N} W_i^N(s)\, y_N^*(\bar{t}_i^N) + G(s)$$

identifiziert. Aus der Literatur ist die folgende Aussage bekannt.

Satz 4: *Die Gleichung* (1.1) *besitze eine eindeutige Lösung* y^*.

1. *Sei*

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty} \|(\mathcal{K}_N - \mathcal{K})[y]\| = 0 \qquad \text{für alle } y \in C[a, b],\\ &(\mathcal{K}_N)_{N\in\mathcal{N}_P} \text{ kollektiv kompakt}\end{aligned} \tag{4.4}$$

(d. h., die Abschließung der Menge $\{\mathcal{K}_N[y] \mid N \in \mathcal{N}_P,\ y \in C[a, b],\ \|y\| \leqq 1\}$ *ist kompakt). Dann existiert eine Zahl* N_0, *so daß für alle* $N \geqq N_0$, $N \in \mathcal{N}_P$, *die Gleichungen* (4.2) *eindeutige Lösungen* y_N^* *besitzen, die gegen* y^* *konvergieren (vgl.* Atkinson [2], Anselone [1], Vainikko [8]).

2. *Wenn die Näherungsoperatoren* $\mathcal{K}_N$ *die Gestalt* (4.1) *besitzen, sind für alle* $s \in [a, b]$ *die Beziehungen*

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} W_i^N(s)\, y(t_i^N) = \mathcal{K}[y](s) \qquad \forall y \in C[a, b],\\ &\lim_{\Delta\to 0} \sup_{N\in\mathcal{N}_P} \sum_{i=1}^{N} |W_i^N(s + \Delta) - W_i^N(s)| = 0\end{aligned} \tag{4.5}$$

hinreichend und notwendig für die Bedingungen (4.4) *(vgl.* Sloan [7]).

Der folgende Satz, der von Micke und Wisotzki [6] bewiesen wurde, zeigt, inwieweit Näherungsoperatoren auf der Basis von Quadraturen vom Zweifachinterpolationstyp mit global oder lokal angepaßter Quadratur die Bedingungen von Satz 4 erfüllen.

Satz 5: *Mögen die Kernanteile* K *und* H *die Voraussetzungen* (V 1)—(V 3) *erfüllen. Seien ferner* $\{Q_M^s,\ s \in [a, b]\}$, $M \in \mathcal{N}_Q$, *Quadraturfamilien, für deren Fehlerglieder*

$$R_M^s[g] = \int_a^b H(s, t)\, g(t)\, dt - Q_M^s[g], \qquad g \in \mathscr{C}(a, b, c(s)),$$

die Beziehung

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{s\in[a,b]} |R_M^s[\bar{K}(s, \cdot)]| = 0 .$$

gilt, falls $\bar{K}$ *die Voraussetzung* (V 3) *erfüllt, und sei* $(\bar{P}_N)_{N\in\mathcal{N}_P}$ *eine Folge von Interpolationen mit stetigen Ansatzfunktionen.*

Dann existiert eine Strategie $M_0\colon \mathcal{N}_P \to \mathcal{N}_Q$, *so daß für jede Strategie* $\bar{M}$ *mit* $\bar{M}(N) \geqq M_0(N)$ *für alle* $N \in \mathcal{N}_P$ *die Folge der Näherungsoperatoren*

$$\mathcal{K}_N[y](s) = Q^s_{\bar{M}(N)}\left[K(s, \cdot)\, \bar{P}_N[y]\right], \qquad y \in C[a, b], \tag{4.6}$$

kollektiv kompakt ist.

Die Aussage dieses Satzes gilt dank Satz 2 und Satz 3, wenn Q_M^s eine lokal oder global angepaßte Quadratur ist.

Für lokal angepaßte Quadraturen läßt sich Satz 5 verschärfen (vgl. Micke und Wisotzki [6]).

Satz 6: *Seien die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, und sei* Q_M^s *eine lokal angepaßte Quadratur. Dann gelten für die Näherungsoperatoren* $\mathcal{K}_N$, $N \in \mathcal{N}_P$, *mit* (4.6) *für eine beliebige Strategie* $\bar{M}$, *die Konvergenzbeziehungen* (4.5).

Eine zu Satz 6 analoge Aussage für global angepaßte Quadraturen gilt nicht, wie ein Gegenbeispiel von MICKE und WISOTZKI [6] zeigt.

Satz 5 garantiert nur die Existenz einer Minimalstrategie. Da diese im allgemeinen nicht bekannt ist, wird bei Anwendungen der beschriebenen Technik lokal angepaßten Quadraturen der Vorzug gegeben.

Ein weiterer Vorteil lokal angepaßter Quadraturen besteht im geringen Aufwand. Der wesentliche Aufwand bei der Erstellung der Systemmatrix von (4.3) besteht in der Berechnung der Gewichte

$$W_i^{MN}(\bar{t}_k^N) = \sum_{j=1}^{M} w_j^M(\bar{t}_k^N)\, K\big(\bar{t}_k^N, t_i^M(\bar{t}_k^N)\big)\, \bar{a}_i^N\big(t_j^M(\bar{t}_k^N)\big), \qquad 1 \leqq i, k \leqq N,$$

wobei $w_j^M(s)$ und $t_j^M(s)$, $1 \leqq j \leqq M$, Gewichte bzw. Stützstellen der angepaßten Quadratur Q_M^s sind. Während bei global angepaßten Quadraturen für jedes k im allgemeinen alle Gewichte $w_j^M(\bar{t}_k^N)$ und Stützstellen $t_j^M(\bar{t}_k^N)$ (mit eventueller Ausnahme der Fälle $j = 1$ und $j = M$) neu berechnet werden müssen, gilt für lokal angepaßte Quadraturen $(1 \leqq l \leqq L)$

$$t_{iL+l}^M(\bar{t}_k^N) = t_{iL+l}^M(\bar{t}_{k+1}^N) \qquad \text{und} \qquad w_{iL+l}^M(\bar{t}_k^N) = w_{iL+l}^M(\bar{t}_{k+1}^N),$$

wenn

$$i < \min\,[\hat{\imath}_m(t_k^N), \hat{\imath}_m(t_{k+1}^N)] - 1 \qquad \text{oder} \qquad i \geqq \max\,[\hat{\imath}_m(t_k^N), \hat{\imath}_m(t_{k+1}^N)]$$

ist (vgl. Abschnitt 3.2).

Theoretisch ist es mit beiden Anpassungsprinzipien möglich, Quadraturen beliebig hoher Konvergenzordnung zu konstruieren, wenn der Kernanteil K und die Lösung von (1.1) entsprechenden Glattheitsanforderungen genügen.

LITERATUR

[1] ANSELONE, P. M.: Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1971.

[2] ATKINSON, K. E.: A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. Philadelphia: Soc. Ind. Appl. Math. 1976.

[3] DAVIS, P. J., and P. RABINOWITZ: Methods of Numerical Integration. New York—London: Academic Press 1984.

[4] KANTOROWITSCH, L. W., und G. P. AKILOW: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964.

[5] MICKE, A.: Die Behandlung von Integralgleichungen mit unstetigen Kernen unter Nutzung von Quadraturen vom Produkttyp. Computing (eingereicht).

[6] MICKE, A., und C. WISOTZKI: Lösung von Fredholmschen Integralgleichungen mit unstetigen Kernen. ZAMM 68 (1988) (erscheint).

[7] SLOAN, I. H.: Analysis of General Quadrature Methods for Integral Equations of the Second Kind. Num. Math. 38 (1981), 263—278.

[8] VAINIKKO, G.: Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 5). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1976.

[9] YOUNG, A.: Approximate Product-Integration. Proc. Roy. Soc., Ser. A 224 (1954), 552—561.

Manuskripteingang: 13. 08. 1987

VERFASSER:

CHRISTEL WISOTZKI
Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik der AdW
Mohrenstraße 39/Postfach 1304
DDR-1086 Berlin