Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (2) 1989, S. 131–151

Об асимптотике функции Грина и ядер Пуассона смешанной параболической задачи в конусе I[1])

В. А. Козлов

Es werden allgemeine Randwertaufgaben für $2b$-parabolische Gleichungen im mehrdimensionalen Kegel betrachtet. Für diese werden Sätze über die Lösbarkeit und die Glattheit der Lösungen bewiesen. Ferner folgen vollständige asymptotische Darstellungen der Lösungen in der Nähe des Kegelscheitels und eine Darstellung der entsprechenden Koeffizienten. Schließlich werden formale asymptotische Darstellungen der Greenschen Funktion und der Poissonschen Kerne konstruiert.

Рассматриваются общие краевые задачи для $2b$-параболических уравнений в многомерном конусе. Для них доказаны теоремы о разрешимости и гладкости решений. Получены полные асимптотические разложения решений вблизи вершины конуса и найдены представления коэффициентов асимптотики. Наконец построены формальные асимптотики функции Грина и ядер Пуассона.

General boundary value problems for $2b$-parabolic equations in a multidimensional cone are considered. Theorems on solvability and smoothness of solutions are proved. Infinite asymptotic expansions of solutions are obtained in a neighbourhood of the conic vertex. The representations for the coefficients of these expansions are also obtained. At last formal asymptotics of the Green function and the Poisson kernels are obtained.

Введение

В работе рассматриваются общие краевые задачи для $2b$-параболических уравнений в многомерном конусе с вершиной в нуле. Для функции Грина и ядер Пуассона получены точечные оценки, а также построены полные асимптотические разложения в зоне $t^{1/2b} \gg \min(|x|, |y|)$.

Пусть K — конус в пространстве $\mathbb{R}^n$ вырезающий на единичной сфере область Ω с гладкой границей. Пусть еще $X = K \times \mathbb{R}$ и $Y = (\partial K \setminus 0) \times \mathbb{R}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{A}(x, D_x, \partial_t)\, u = \sum_{2bk+|\alpha| \leq 2bm} a_{\alpha k}(x)\, D_x^{\alpha}\, \partial_t^k u = f \quad \text{на} \quad X,$$

$$\mathcal{B}_j(x, D_x, \partial_t)\, u = \sum_{2bk+|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha k}(x')\, D_x^{\alpha} \partial_t^k u = g_j \quad \text{на} \quad Y \tag{0.1}$$

$$(j = 1, \ldots, bm), \; u = 0 \quad \text{при} \quad t < 0,$$

где $a_{\alpha k}$ $(b_{j\alpha k})$ — гладкие функции в конусе (на границе конуса) положительно однородные степени $-2m + |\alpha| + 2bk\big(-m_j + |\alpha| + 2bk;\, m_j \leqq 2bm - 1\ (j = 1, \ldots, bm)\big)$. Оператор $\mathcal{A}$ предполагается параболическим, а операторы $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{bm}, \mathcal{A}$ удовлетворяют условию дополнительности (см. [10]). Для того чтобы сформу-

[1]) Der abschließende Teil II dieses Beitrages wird in Kürze ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen.

лировать второе предположение, при котором будет изучаться задача (0.1), введем пучок краевых задач в области Ω:

$$\mathcal{P}(\lambda)\,\Phi = \{r^{2bm-1\lambda}\mathcal{A}(x, D_x, 0)\, r^{1\lambda}\Phi;\quad r^{m_j-1\lambda}\,\mathcal{B}_j(x', D_x, 0)\, r^{1\lambda}\Phi|_{\partial\Omega},\ j = 1, \ldots, bm\}$$

для $\Phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Тогда предполагается существование числа $\beta \in \mathbb{R}$ такого, что на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + n/2 - 2bm$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$ и оператор

$$\{\mathcal{A}(x, D_x, 1);\ \mathcal{B}_j(x', D_x, 1),\ j = 1, \ldots, bm\}:$$

$$E_\beta^{2bm}(K) \to E_\beta^0(K) \times \prod_{j=1}^{bm} E_\beta^{2bm-m_j-1/2}(\partial K)$$

является изоморфизмом (пространства E определены в пункте 1.1).

Функция Грина $G(x, y, t)$ определяется как решение задачи (0.1) с $f = \delta(t)\,\delta(x - y)$ и $g_j = 0$ ($j = 1, \ldots, bm$), а ядра Пуассона $G_k(x, y', t)$ как решения задачи (0.1) с $f = 0$ и $g_j = \delta_{jk}\delta(t)\,\delta(x' - y')$ ($j = 1, \ldots, bm$). В работе получены оценки (см. § 4)

$$|\partial_t^s D_x^\alpha D_y^\gamma G(x, y, t)|$$
$$\leqq c t^{m-1-(|\alpha|+|\gamma|+n)/2b-s} \times \left(\frac{|x|}{|x| + |y| + t^{1/2b}}\right)^{-k_- - \varepsilon - |\alpha|}$$
$$\times \left(\frac{|y|}{|x| + |y| + t^{1/2b}}\right)^{k_+ - \varepsilon - n + 2bm - |\gamma|} \exp\left(-\varkappa\, |x - y|^{2b/(2b-1)}\, t^{-1/(2b-1)}\right),$$

где ε — любое положительное число, k_- и k_+ — границы максимально широкой полосы ($k_- < \operatorname{Im}\lambda < k_+$), свободной от спектра пучка $\mathcal{P}(\lambda)$ и содержащей прямую $\operatorname{Im}\lambda = \beta + n/2 - 2bm$. Аналогичные оценки получены для ядер Пуассона.

Опишем структуру асимптотики функции Грина при $|x| \leqq 2\,|y|$. Пусть σ — вещественное число такое, что $\sigma < k_-$ и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \sigma$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$. Обозначим через M количество собственных чисел (с учетом кратности) пучка $\mathcal{P}(\lambda)$, лежащих в полосе $\sigma < \operatorname{Im}\lambda \leqq k_-$. Тогда (см. § 4)

$$\left|G(x, y, t) - \sum_{\mu=0}^{M-1} U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\,\overline{V_\mu^*(y, t)}\right|$$
$$\leqq c t^{m-1-n/2b}\left(\frac{|x|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma}\left(\frac{|y|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{k_+ - \varepsilon - n + 2bm}$$
$$\times \exp\left(-\varkappa\left(\frac{|x| - y|}{t^{1/2b}}\right)^{2b/(2b-1)}\right).$$

Здесь $U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)$ — дифференциальные по t операторы порядка $N_\mu - 1$, которые строятся в пункте 2.1, V_μ^* — специальные решения однородной сопряженной задачи (см. пункт 3.3). Аналогичные асимптотики получены для ядер Пуассона.

В настоящей первой части работы изучается разрешимость задачи (0.1), гладкость и асимптотика ее решений. Вводится сопряженная к (0.1) параболическая задача (см. пункты 3.2 и 1.3), проведено ее исследование. Строятся и изучаются дифференциальные операторы типа $U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)$ и специальные решения однородных задач (см. пункты 2.1, 2.2 и 3.2). Доказываются теоремы об асимптотике решений задачи (0.1) и ей сопряженной (теоремы 3.1 и 3.2), приведены формулы для вычислений коэффициентов в асимптотическом разложении решений. В § 1 собраны используемые в дальнейшем, как правило, известные результаты об эллиптической краевой задаче в конусе. Следующий параграф посвящен исследованию вспомогательной эллиптической задачи с параметром в конусе. Параболическая задача (0.1) и ей сопряженная изучается в § 3. Остановимся коротко на литературе, относящейся к рассматриваемой проблематике. Это прежде всего обзор В. А. Кондратьева и О. А. Олейник [5], в котором имеется большой список литературы, работа В. А. Солонникова [11], а также статьи [2, 3].

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе приведены необходимые для дальнейшего сведения об эллиптических задачах в конусе (см. [2, 4, 6—9]).

1.1 Функциональные пространства. Обозначим через K открытый конус в пространстве $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат и границей ∂K, вырезающий на единичной сфере область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$. Через (r, ω) будем обозначать сферические координаты точки $x \in K$. Пусть $V_\beta{}^l(K)$ и $E_\beta{}^l(K)$ — пространства функций в конусе K, для которых конечны нормы

$$\|u;\, V_\beta{}^l(K)\| = \Big(\sum_{|\alpha|\leq l} \int_K |x|^{2(\beta-l+|\alpha|)}\, |D_x{}^\alpha u(x)|^2\, dx\Big)^{1/2},$$

$$\|u;\, E_\beta{}^l(K)\| = (\|u;\, V_\beta{}^l(K)\|^2 + \|u;\, V_\beta{}^0(K)\|^2)^{1/2},$$

где $\beta \in \mathbb{R}$ и $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Соответствующие пространства граничных значений обозначим через $V_\beta{}^{l-1/2}(\partial K)$ и $E_\beta{}^{l-1/2}(\partial K)$, $l \geqq 1$.

Предложение 1.1 [9]: *Если $l - |\alpha| > n/2$, то для любой функции $u \in V_\beta{}^l(K)$ справедлива оценка $|D_x{}^\alpha u(x)| \leqq c_\alpha r^{-(\beta+n/2-l)-|\alpha|}\, \|u;\, V_\beta{}^l(K)\|$, где c_α не зависит от $x \in K$ и $u \in V_\beta{}^l(K)$.*

1.2 Эллиптическая задача с параметром. Зафиксируем число $b \in \mathbb{N}$, которое на протяжении всей работы остается неизменным. Обозначим через $\Lambda(m)$ множество дифференциальных операторов $\mathcal{M}(p)$ порядка m, зависящих от параметра $p \in \mathbb{C}$ и допускающих представление

$$\mathcal{M}(p) = \sum_{2bk+s+|\alpha|\leq m} M_{ks\alpha}(\omega)\, r^{-m}(pr^{2b})^k\, (rD_r)^s\, D_\omega{}^\alpha, \tag{1.1}$$

где ω — локальные координаты в $\bar{\Omega}$ и $M_{ks\alpha} \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Через $\Lambda'(m)$ обозначим множество дифференциальных операторов $\mathcal{B}(p)$, допускающих представление вида (1.1) с коэффициентами из $C^\infty(\partial\Omega)$. И, наконец, обозначим через $\Lambda''(m)$ множество дифференциальных операторов вида

$$\mathcal{T}(p) = \sum_{2bk+s+|\gamma|\leq m} T_{ks\gamma}(\omega')\, r^{-m}(pr^{2b})^k\, (rD_r)^s\, D_{\omega'}^{\gamma},$$

где ω' — локальные координаты на $\partial\Omega$ и $T_{ks\gamma} \in C^\infty(\partial\Omega)$. Положим

$$\mathring{\mathcal{M}}(\omega, p, \tau, \xi) = \sum_{2bk+s+|\alpha|=m} M_{ks\alpha}(\omega)\, p^k \tau^s \xi^\alpha,$$

где $p \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Аналогично определяются старшие символы для операторов $\mathcal{B}(p)$ и $\mathcal{T}(p)$. Отметим, что старший символ оператора $\mathcal{T}(p)$ зависит от переменных $\omega' \in \partial\Omega$, $\tau \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{C}$ и $\xi' \in \mathbb{R}^{n-2}$.

Пусть $\mathcal{A}(p) \in \Lambda(2bm)$ и $\mathcal{B}_j(p) \in \Lambda'(m_j)$ $(j = 1, \ldots, bm)$, где m, m_j — целые неотрицательные числа такие, что $m_j \leqq 2bm - 1$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(p)\, u = f \quad \text{на} \quad K, \\ &\mathcal{B}_j(p)\, u = g_j \quad \text{на} \quad \partial K \ (j = 1, \ldots, bm). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Будем предполагать следующее:

I. Для задачи (1.2) выполнено условие эллиптичности с параметром $p \in \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z \geqq 0\}$, т.е.:

а) $\mathring{\mathcal{A}}(\omega, p, \tau, \xi) \neq 0$ для любых $\omega \in \bar{\Omega}$, $p \in \mathbb{C}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что $|p|^{1/2b} + |\tau| + |\xi| \neq 0$.

б) Пусть $\nu = \nu(\omega')$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке ω'. Тогда для любых $\omega' \in \partial\Omega$, $p \in \mathbb{C}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$ и векторов ξ' ортогональных $\nu(\omega')$ таких, что $|p|^{1/2b} + |\tau| + |\xi'| \neq 0$, задача на полупрямой $y > 0$

$$\mathring{\mathcal{A}}\big(\omega', p, \tau, \xi' + \nu(\omega')\, D_y\big)\, u = 0,$$

$$\mathring{\mathcal{B}}_j\big(\omega', p, \tau, \xi' + \nu(\omega')\, D_y\big)\, u|_{y=0} = c_j \qquad (j = 1, \ldots, bm)$$

имеет единственное решение класса $S\big([0, \infty)\big)$ для любых $c_j \in \mathbb{C}$. Здесь S — пространство бесконечно гладких, быстроубывающих на бесконечности функций.

Замечание 1.1: Из соображений непрерывности вытекает существование угла $\mathbb{C}_a = \{p \in \mathbb{C}\colon |\arg p| \leqq \pi/2 + a\}$, $a > 0$, в котором также справедливо свойство I.

Положим

$$\mathcal{P}(\lambda)\, \Phi = \{r^{2bm - i\lambda} \mathcal{A}(0)\, r^{i\lambda}\Phi;\ r^{m_j - i\lambda} \mathcal{B}_j(0)\, r^{i\lambda}\Phi|_{\partial\Omega} \qquad (j = 1, \ldots, bm)\}$$

для $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$. При всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, счетного множества, оператор $\mathcal{P}(\lambda)$ осуществляет изоморфизм между $W^{l+2bm}(\Omega)$ и $W^l(\Omega) \times \prod_{j=1}^{bm} W^{l+2bm-m_j-1/2}(\partial\Omega)$. Упомянутое выше счетное множество состоит из собственных чисел конечной алгебраической кратности, имеет единственную предельную точку на бесконечности и, кроме, быть может, конечного множества, лежит в двойном угле раствора меньше π, содержащем мнимую ось. С каждым собственным числом λ_μ оператор-функции $\mathcal{P}(\lambda)$ связано конечномерное пространство решений однородной задачи (1.2) при $p = 0$, обозначаемое через X_μ. Оно состоит из функций вида $r^{i\lambda_\mu} Q(\omega, \log r)$, где Q — многочлен от $\log r$ с гладкими в $\bar{\Omega}$ коэффициентами. Пространство X_μ замкнуто относительно дифференцирования Q по $\log r$. Зафиксируем в X_μ базис $u_{\mu\sigma}(\omega, r) = r^{i\lambda_\mu} Q_{\mu\sigma}(\omega, \log r)$, $\sigma = 1, \ldots, \varkappa_\mu = \dim X_\mu$. Второе предположение, при котором будет изучаться задача (1.2) состоит в следующем:

II. Существует число $\beta_0 \in \mathbb{R}$ такое, что на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \beta_0 + n/2 - 2bm$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$ и при $p = 1$ оператор краевой задачи (1.2) осуществляет изоморфизм между $E_{\beta_0}^{2bm}(K)$ и $\mathcal{E}_{\beta_0}^0$, где $\mathcal{E}_\beta{}^l = E_\beta{}^l(K) \times \prod_{j=1}^{bm} E_\beta{}^{l+2bm-m_j-1/2}(\partial K)$.

Обозначим через k_- и k_+ границы максимально широкой полосы $(k_- < \operatorname{Im} \lambda < k_+)$, свободной от спектра пучка $\mathcal{P}(\lambda)$ и содержащей прямую $\operatorname{Im} \lambda = \beta_0 + n/2 - 2bm$.

Пусть еще

$$\|u;\, E_\beta{}^l(K), p\| = (\|u;\, V_\beta{}^l(K)\|^2 + |p|^{l/b}\, \|u;\, V_\beta{}^0(K)\|^2)^{1/2},$$
$$\|u;\, E_\beta^{l-1/2}(\partial K), p\| = \left(\|u;\, V_\beta^{l-1/2}(\partial K)\|^2 + |p|^{(2l-1)/2b}\|u;\, V_\beta{}^0(\partial K)\|^2\right)^{1/2}.$$

Предложение 1.2 [2]: *Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ и $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k_- < \beta + n/2 - 2bm - l < k_+$. Тогда для любого $p \in \mathbb{C}_a \setminus \{0\}$ оператор краевой задачи* (1.2) *осуществляет изоморфизм между $E_\beta{}^{l+2bm}(K)$ и $\mathscr{E}_\beta{}^l$ и справедливы оценки*

$$c_1\, \|\mathscr{L}(p)\, u;\, \mathscr{E}_\beta{}^l, p\| \leqq \|u;\, E_\beta{}^{l+2bm}(K), p\| \leqq c_2\, \|\mathscr{L}(p)\, u;\, \mathscr{E}_\beta{}^l, p\|, \tag{1.3}$$

где

$$\|\mathscr{L}(p)\, u; \mathscr{E}_\beta{}^l, p\| = \|\mathscr{A}(p)\, u;\, E_\beta{}^l(K), p\| + \sum_{j=1}^{bm} \|\mathscr{B}_j(p)\, u;\, E_\beta{}^{l+2bm-m_j-1/2}(\partial K), p\|.$$

1.3 Сопряженная задача. Пусть $\mathscr{A}^*(\overline{p})$ и $\mathscr{B}_j{}^*(\overline{p})$ $(j = 1, \ldots, bm)$ — операторы формально сопряженные к $\mathscr{A}(p)$ и $\mathscr{B}_j(p)$. (Предполагается, что коэффициенты оператора $\mathscr{B}_j$ гладко продолжены с границы в ее окрестность после чего берется сопряженный оператор. Дальнейшие конструкции не зависят от способа продолжения.) Пусть еще χ_K и $\delta_{\partial K}$ — характеристическая функция конуса K и дельта-функция границы ∂K соответсвенно. Определим операторы $\mathscr{A}_k{}^*(\overline{p}) \in \Lambda'(2bm - k - 1)$ и $\mathscr{B}^*_{jk}(\overline{p}) \in \Lambda''(m_j - k)$ из соотношений

$$\mathscr{A}^*(\overline{p})\ \chi_K u - \chi_K \mathscr{A}^*(\overline{p})\, u = \sum_{k=0}^{2bm-1} \mathscr{A}_k{}^*(\overline{p})\, u \otimes \delta_{\partial K}^{(k)},$$
$$\mathscr{B}_j{}^*(\overline{p})\, (u_j \otimes \delta_{\partial K}) = \sum_{k=1}^{m_j} \mathscr{B}^*_{jk}(\overline{p})\, u_j \otimes \delta_{\partial K}^{(k)},$$

где $\delta_{\partial K}^{(k)} = D_\nu{}^k \delta_{\partial K} = (-i)^k\, \partial^k \delta_{\partial K}/\partial \nu^k$ — k-ая производная по нормали и $u_j \in C^\infty(\partial K \setminus 0)$. Пусть $u, v \in C_0{}^\infty(\overline{K} \setminus 0)$ и $v_j \in C_0{}^\infty(\partial K \setminus 0)$. Тогда справедлива формула Грина

$$\int_K \mathscr{A}(p)\, u\, \overline{v}\, dx + \sum_{=1}^{bm} \int_{\partial K} \mathscr{B}_j(p)\, u\, \overline{v}_j\, dx'$$
$$= \int_K u\, \overline{\mathscr{A}^*(\overline{p})\, v}\, dx + \sum_{k=0}^{2bm-1} \int_{\partial K} D_\nu{}^k u\, \overline{\left(\mathscr{A}_k{}^*(\overline{p})\, v + \sum_{j=1}^{bm} \mathscr{B}^*_{jk}(\overline{p})\, v_j\right)}\, dx': \tag{1.4}$$

Здесь и далее считается, что $\mathscr{B}^*_{jk}(\overline{p}) = 0$ при $k > m_j$. Параллельно с задачей (1.2) будем рассматривать сопряженную задачу

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}^*(\overline{p})\, u = f && \text{на}\quad K, \\ &\mathscr{A}_k{}^*(\overline{p})\, u + \sum_{j=1}^{bm} \mathscr{B}^*_{jk}(\overline{p})\, u_j = g_k && \text{на}\quad \partial K \quad (k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1). \end{aligned} \tag{1.5}$$

В силу предположения I для этой задачи справедливо следующее свойство:

Символ $\mathring{\mathscr{A}}^*(\omega, \overline{p}, \tau, \xi) \neq 0$ для любых $\omega \in \overline{\Omega}$, $p \in \mathbb{C}_a$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что $|p|^{1/2b} + |\tau| + |\xi| \neq 0$.

Для любых $\omega' \in \partial\Omega$,, чисел $p \in \mathbb{C}_a$, $\tau \in \mathbb{R}$ и векторов ξ' ортогональных к $\nu(\omega')$ и таких, что $|p|^{1/2b} + |\tau| + |\xi'| \neq 0$ задача на полупрямой $y > 0$

$$\mathring{\mathscr{A}}^*\left(\omega', \overline{p}, \tau, \xi' + \nu(\omega')\, D_y\right) u = 0,$$
$$\mathring{\mathscr{A}}_k{}^*\left(\omega', \overline{p}, \tau, \xi' + \nu(\omega')\, D_y\right) u|_{y=0} + \sum_{j=1}^{bm} \mathring{\mathscr{B}}^*_{jk}(\omega', \overline{p}, \tau, \xi')\, u_j = c_k$$
$$(k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1)$$

имеет единственное решение $\{u; u_1, \ldots, u_{bm}\} \in S([0, \infty)) \times \mathbb{C}^{bm}$ для любых чисел $c_0, \ldots, c_{2bm-1} \in \mathbb{C}$.

Положим

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^*(\lambda)\,\{\Phi; \varphi_1, \ldots, \varphi_{bm}\} \\
&= \Big\{r^{2bm-i\lambda}\mathcal{A}^*(0)\, r^{i\lambda}\Phi;\ r^{2bm-k-1-i\lambda}\mathcal{A}_k^*(0)\, r^{i\lambda}\Phi + \sum_{j=1}^{bm} r^{m_j-k-i\lambda}\mathcal{B}_{jk}^*(0)\, r^{i\lambda}\varphi_j \\
&\qquad (k = 0, 1, \ldots, 2bm-1)\Big\},
\end{aligned}$$

где $\Phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{bm} \in C^\infty(\partial\Omega)$. Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, за исключением с четного множества $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda = \lambda_\mu^*, \lambda_\mu^* = \bar{\lambda}_\mu - i(2bm - n), \lambda_\mu$ — собственное число пучка $\mathcal{P}(\lambda)\}$, пучок $\mathcal{P}^*(\lambda)$ осуществляет изоморфизм между $W^{l+2bm}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{bm} W^{l+m_j+1/2}(\partial\Omega)$ и $W^l(\Omega) \times \prod_{k=0}^{2bm-1} W^{l+k+1/2}(\partial\Omega)$. Числа λ_μ^* являются собственными числами пучка $\mathcal{P}^*(\lambda)$. С каждым из них связано конечномерное пространство решений однородной задачи (1.5) при $p = 0$, обозначаемое X_μ^*, причем $\dim X_\mu^* = \dim X_\mu$. Пространство X_μ^* состоит из функций вида

$$\{r^{i\lambda_\mu^*}Q_\mu^*(\omega, \log r);\ r^{i\lambda_\mu^*-2bm+m_j+1}Q_{j\mu}^*(\omega', \log r), \qquad j = 1, \ldots, bm\},$$

где Q_μ^* и $Q_{j\mu}^*$ — многочлены от переменной $\log r$ с гладкими, соответственно, в $\bar{\Omega}$ и $\partial\Omega$ коэффициентами. Существует единственный базис в пространстве X_μ^*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U}_{\mu\sigma}^* = \{u_{\mu\sigma}^*(\omega, r);\ u_{j\mu\sigma}^*(\omega', r),\ j = 1, \ldots, bm\}, \qquad \sigma = 1, \ldots, \varkappa_\mu, \\
&u_{\mu\sigma}^*(\omega, r) = r^{i\lambda_\mu^*}Q_{\mu\sigma}^*(\omega, \log r), \\
&u_{j\mu\sigma}^*(\omega', r) = r^{i\lambda_\mu^*-2bm+m_j+1}Q_{j\mu\sigma}^*(\omega', \log r),
\end{aligned}$$

такой, что для базисов $\{u_{\mu\sigma}\}$ и $\{\mathcal{U}_{\mu\sigma}^*\}$ выполнены следующие условия ортогональности и нормировки (см. [6, 7])

$$(\mathcal{A}(0)\,\eta u_{\mu\sigma}, u_{\mu'\sigma'}^*)_K + \sum_{j=1}^{bm} (\mathcal{B}_j(0)\,\eta u_{\mu\sigma}, u_{j\mu'\sigma'}^*)_{\partial K} = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{1.6}$$

где $\eta = \eta(r)$ — функция класса $C_0^\infty([0, \infty))$, равная единице в окрестности нуля, $(\cdot, \cdot)_K$ и $(\cdot, \cdot)_{\partial K}$ — скалярные произведения в $L_2(K)$ и $L_2(\partial K)$ соответственно. Равенство (1.6) не зависит от функции η. Из формулы Грина (1.4) и из равенства (1.6) вытекает соотношение

$$\begin{aligned}
&(u_{\mu\sigma}, \mathcal{A}^*(0)\,\eta u_{\mu'\sigma'}^*)_K + \sum_{k=0}^{2bm-1} \Big(D_\nu^k u, \mathcal{A}_k^*(0)\,\eta u_{\mu'\sigma'}^* + \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}_{jk}^*(0)\,\eta u_{j\mu'\sigma'}^*\Big)_{\partial K} \\
&= -\delta_{\mu\mu'}\delta_{\sigma\sigma'}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Положим $k_-^* = -k_+ + n - 2bm$ и $k_+^* = -k_- + n - 2bm$. Из предложения 1.2 следует аналогичное утверждение для сопряженной задачи (1.5).

Предложение 1.3: *Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ и $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k_-^* < \beta + n/2 - 2bm - l < k_+^*$. Тогда для любого $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$ оператор краевой задачи (1.5) осуществляет изоморфизм между $E_\beta^{l+2bm}(K) \times \prod_{j=1}^{bm} E_\beta^{l+m_j+1/2}(\partial K)$ и $E_\beta^l(K) \times \prod_{k=0}^{2bm-1} E_\beta^{l+k+1/2}(\partial K)$ и спра-*

ведливы оценки

$$
\begin{aligned}
c_1 I_{\beta,l}(u; u_1, \ldots, u_{bm}, p) &\leqq \|u; E_\beta{}^{l+2bm}(K), p\| + \sum_{j=1}^{bm} \|u_j; E_\beta{}^{l+m_j+1/2}(\partial K), p\| \\
&\leqq c_2 I_{\beta,l}(u; u_1, \ldots, u_{bm}, p), \\
I_{\beta,l}(u; u_1, \ldots, u_{bm}, p) &= \|\mathcal{A}^*(\overline{p})\, u; E_\beta{}^l(K), p\| \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2bm-1} \|\mathcal{A}_k{}^*(\overline{p})\, u + \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\overline{p})\, u_j; E_\beta{}^{l+k+1/2}(\partial K), p\|.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

1.4 Теорема о разрешимости задачи (1.2) и (1.5). Доказательство следующей теоремы по существу содержится в [2].

Теорема 1.1: *Предположим, что на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *нет собственных чисел пучка* $\mathcal{P}(\lambda)$. *Обозначим через* $\varkappa$ *суммарную алгебраическую кратность собственных чисел пучка* $\mathcal{P}(\lambda)$, *лежащих в полосе* $\min(h, k_+) \leqq \operatorname{Im}\lambda \leqq \max(h, k_-)$. *Пусть* $\beta + n/2 - 2bm - l = h$ и $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}(p) = \{\mathcal{A}(p); \mathcal{B}_j(p), j = 1, \ldots, bm\}: E_\beta{}^{l+2b}(K) \to \mathcal{E}_\beta{}^l$ *краевой задачи* (1.2) *является нетеровым. Если* $h < k_-$, *то ядро оператора* $\mathcal{L}(p)$ *тривиально, а размерность коядра равна* $\varkappa$. *Кроме того для решения задачи* (1.2) *справедлива правая оценка* (1.3). *Если* $h > k_+$, *то размерность ядра* $\mathcal{L}(p)$ *равна* $\varkappa$, *а образ совпадает с* $\mathcal{E}_\beta{}^l$.

Теорема 1.2: *Предположим, что на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = h$ *нет собственных чисел пучка* $\mathcal{P}^*(\lambda)$. *Обозначим через* $\varkappa$ *суммарную алгебраическую кратность собственных чисел пучка* $\mathcal{P}^*(\lambda)$, *лежащих в полосе* $\min(h, k_+{}^*) \leqq \operatorname{Im}\lambda \leqq \max(h, k_-{}^*)$. *Пусть* $\beta + n/2 - 2bm - l = h$ и $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}^*(\overline{p})$ *краевой задачи* (1.5) *отображает пространство* $E_\beta{}^{l+2bm}(K) \times \prod_{j=1}^{bm} E_\beta{}^{l+m_j+1/2}(\partial K)$ *в* $E_\beta{}^l(K) \times \prod_{k=0}^{2bm-1} E_\beta{}^{l+k+1/2}(\partial K)$ *и является нетеровым. Если* $h < k_-{}^*$, *то ядро оператора* $\mathcal{L}^*(\overline{p})$ *тривиально, а размерность коядра равна* $\varkappa$. *Кроме того для решения задачи* (1.5) *справедлива правая оценка* (1.8). *Если* $h > k_+{}^*$, *то оператор* $\mathcal{L}^*(\overline{p})$ *является сюръективным, а размерность ядра равна* $\varkappa$.

Доказательство теоремы проводится так же как доказательство аналогичного утверждения в работе [8].

§ 2. Асимптотика решений задачи (1.2)

Основной результат параграфа — теорема об асимптотике решений задачи (1.2). В отличии от работы [9] здесь явно строятся ,,специальные,, решения однородных задач (1.2) и (1.5), для которых выполнены условия ортогональности и нормировки (см. (2.10). Это упрощает вид окончательных формул (см. теоремы 2.1 и 2.2).

2.1 Построение ,,асимптотических" нулей задач (1.2) и (1.5). Занумеруем собственные числа пучка $\mathcal{P}(\lambda)$ с учетом кратности следующим образом. Собственным числам расположенным выше прямой $\operatorname{Im}\lambda = k_-$ припишем отрицательные номера ($\mathbb{Z}_-$) так, что собственным числам с большей мнимой частью отвечают большие по абсолютной величине номера. Собственные числа с одинаковыми мнимыми частями нумеруются произвольно. Собственные числа лежащие ниже прямой $\operatorname{Im}\lambda = k_+$, получают неотрицательные номера ($\mathbb{Z}_+$), причем собственным числам с меньшими мнимыми частями отвечают большие номера. Фиксированные в § 1 решения однородных задач (1.2) и (1.5) при $p = 0$ нумеруются теперь одним индексом:

$$u_\mu(\omega, r) = r^{i\lambda_\mu} Q_\mu(\omega, \log r),$$

$$\mathcal{U}_\mu{}^* = \{u_\mu{}^*(\omega, r);\, u^*_{j\mu}(\omega', r),\, j = 1, \dots, bm\},$$

$$u_\mu{}^*(w, r) = r^{i\lambda_\mu{}^*} Q_\mu{}^*(\omega, \log r),$$

$$u^*_{j\mu}(w', r) = r^{i\lambda_\mu{}^* - 2bm + m_j + 1} Q^*_{j\mu}(\omega', \log r),$$

причем для них выполнены соотношения вида (1.6) с правой частью $\delta_{\mu\mu'}$.

Пусть $\mu \in \mathbb{Z}$. Будем искать „асимптотические" нули задачи (1.2) в виде формального ряда

$$U_\mu(\omega, r, p) = r^{i\lambda_\mu} \sum_{k=0}^{\infty} (pr^{2b})^k\, Q_\mu{}^{(k)}(\omega, \log r), \tag{2.1}$$

где $Q_\mu{}^{(0)} = Q_\mu$ и $Q_\mu{}^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ — многочлены от $\log r$ с гладкими в $\bar{\Omega}$ коэффициентами. Представим операторы $\mathcal{A}(p)$ и $\mathcal{B}_j(p)$ в виде

$$\mathcal{A}(p) = r^{-2bm} \sum_{k=0}^{m} (pr^{2b})^k\, A_k(\omega, rD_r, D_\omega),$$

$$\mathcal{B}_j(p) = r^{-m_j} \sum_{2bk \leq m_j} (pr^{2b})^k\, B_{jk}(\omega, rD_r, D_\omega).$$

Подставляя ряд (2.1) в (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, находим

$$\begin{aligned} &\sum_{s+k=d} r^{-2b(m-s)} A_s(r^{i\lambda_\mu + 2bk} Q_\mu{}^{(k)}) = 0 \quad \text{на} \quad K, \\ &\sum_{s+k=d} r^{-m_j + 2bs} B_{js}(r^{i\lambda_\mu + 2bk} Q_\mu{}^{(k)}) = 0 \quad \text{на} \quad \partial K \quad (j = 1, \dots, bm), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $d \in \mathbb{N}$. Рассматривая (2.2) как уравнения относительно $Q_\mu{}^{(d)}$ и применяя к (2.2) теорему 1.3 работы [4] последовательно находим все $Q_\mu{}^{(d)}$. Если $i\lambda_\mu + 2bd \neq i\lambda_{\mu'}$, то многочлен $Q^{(d)}_\mu$ определен однозначно. В противном случае выберем какое-нибудь из решений. Обозначим через I_μ множество индексов $\mu' \in \mathbb{Z}$ таких, что $i\lambda_\mu + 2bd = i\lambda_{\mu'}$ для некоторого числа $d \in \mathbb{N}$. Любые два решения, построенные таким образом отличаются на $\sum_{\mu' \in I_\mu} c_{\mu'} p^{\operatorname{Im}(\lambda_{\mu'} - \lambda_\mu)/2b} U_{\mu'}(\omega, r, p)$.

Решение однородной задачи (1.5) будем искать также в виде формального ряда

$$\begin{aligned} &U_\mu{}^*(\bar{p}) = r^{i\lambda_\mu{}^*} \sum_{q=0}^{\infty} (\bar{p} r^{2b})^q\, U_\mu{}^{*(q)}, \\ &U_\mu{}^{*(q)} = \{Q_\mu{}^{*(q)}(\omega, \log r);\, r^{-2bm + m_j + 1} Q^{*(q)}_{j\mu}(\omega', \log r), \quad j = 1, \dots, bm\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $Q_\mu{}^{*(0)} = Q_\mu{}^*$ и $Q^{*(0)}_{j\mu} = Q^*_{j\mu}$; остальные функции Q^* являются многочленами от $\log r$ с гладкими коэффициентами соответственно в $\bar{\Omega}$ и $\partial\Omega$. Представим операторы краевой задачи (1.5) в виде

$$\mathcal{A}^*(\bar{p}) = r^{-2bm} \sum_{s=0}^{m} (\bar{p} r^{2b})^s\, A_s{}^*(\omega, rD_r, D_\omega),$$

$$\mathcal{A}_k{}^*(\bar{p}) = r^{-2bm + k + 1} \sum_{2bs \leq 2bm - k - 1} (\bar{p} r^{2b})^s\, A^*_{ks}(\omega', rD_r, D_\omega),$$

$$\mathcal{B}^*_{jk}(\bar{p}) = r^{-m_j + k} \sum_{2bs \leq m_j - k} (\bar{p} r^{2b})^s\, B^*_{jks}(\omega', rD_r, D_{\omega'}).$$

Подставляя ряд (2.3) в (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\overline{p}$, получим

$$
\begin{gathered}
\sum_{s+q=d} r^{-2b(m-s)} A_s{}^* r^{i\lambda_\mu{}^*+2bq} Q_\mu{}^{*(q)} = 0 \quad \text{на} \quad K\,, \\
\sum_{s+q=d} \Big(r^{-2bm+k+1+2bs} A^*_{ks} r^{i\lambda_\mu{}^*+2bq} Q_\mu{}^{*(q)} + \sum_{j=1}^{bm} r^{-m_j+k+2bs} \\
\times B^*_{jks} r^{i\lambda_\mu{}^*-2bm+m_j+1+2bq} Q^{*(q)}_{j\mu} \Big) = 0 \quad \text{на} \quad \partial K \quad (k = 0, 1, \ldots, 2bm-1)\,.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Будем рассматривать (2.4) как уравнение относительно $\{Q_\mu{}^{*(d)}; Q^{(*)}_{j\mu}, j = 1, \ldots, bm\}$. Доказательство следующей леммы по сути повторяет доказательство теоремы 1.3 работы [4].

Лемма 2.1: *Рассмотрим следующую задачу в конусе K:*

$$
\begin{gathered}
\mathcal{A}^*(0)\, u = f \quad \textit{на} \quad K \\
\mathcal{A}_k{}^*(0)\, u + \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}^*_{jk}(0)\, u_j = g_k \quad \textit{на} \quad \partial K\ (k = 0, 1, \ldots, 2bm-1)\,.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Пусть $z \in \mathbb{C}$ и

$$
\begin{gathered}
f(\omega, r) = r^{iz-2bm} \sum_{s=0}^{N} (\log r)^s f_s(\omega)\,, \\
g_k(\omega', r) = r^{iz-2bm+k+1} \sum_{s=0}^{N} (\log r)^s g_{ks}(\omega')\,,
\end{gathered}
$$

где $f_s \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $g_{ks} \in C^\infty(\partial\Omega)$. Тогда задача (2.5) имеет решение вида

$$
\begin{gathered}
u(\omega, r) = r^{iz} \sum_{s=0}^{N+\varkappa} (\log r)^s u_s(\omega)\,, \\
u_j(\omega', r) = r^{iz-2bm+1+m_j} \sum_{s=0}^{N+\varkappa} (\log r)^s u_{js}(\omega')\,.
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Здесь $u_s \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $u_{js} \in C^\infty(\partial\Omega)$. Число $\varkappa$ равно нулю, если z не равно собственному числу пучка $\mathcal{P}^*(\lambda)$, в этом случае решение вида (2.6) единственно. Если z — собственное число пучка $\mathcal{P}^*(\lambda)$, то величина $\varkappa - 1$ равна наибольшей из длин жордановых цепочек, порожденных числом z.

Применяя лемму 2.1 к задаче (2.4), последовательно находим многочлены $Q_\mu{}^{*(d)}$ и $Q^{*(d)}_{j\mu}$, $d \in \mathbb{N}$. Если $i\lambda_\mu{}^* + 2bd \neq i\lambda^*_{\mu'}$, то многочлены определяются однозначно.

Заменим в ряде (2.1) многочлены $Q_\mu{}^{(k)}(\omega, \log r)$ на многочлены $Q_\mu{}^{(k)}(\omega, \log zr)$, $z \in \mathbb{C}_+ \setminus 0$. Полученный ряд обозначим через $J_z U_\mu(\omega, r, p)$. В силу однородности операторов краевых задач (2.2) многочлены $Q_\mu{}^{(k)}(\omega, \log zr)$ также удовлетворяют уравнениям (2.2). Следовательно $J_z U_\mu$ — асимптотический нуль задачи (1.2). Также определяется ряд $J_z U_\mu{}^*(\overline{p})$, который является асимптотическим нулем задачи (1.5).

Пусть $N \in \mathbb{N}$ и обозначим через $U_\mu^{(N)}$ и $U_\mu^{*(N)} = \{u_\mu^{*(N)}; u_{j\mu}^{*(N)}, j = 1, \ldots, bm\}$ сумму первых N слагаемых рядов (2.1) и (2.3). Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} h(U_\mu, U_{\mu'}^*)(p) = &\big(\mathcal{A}(p)\,\eta U_\mu^{(N)}, u_{\mu'}^{*(N)}\big)_K \\ &- \big(\eta U_\mu^{(N)}, \mathcal{A}^*(\overline{p})\, u_{\mu'}^{*(N)}\big)_K + \sum_{j=1}^{bm} \big(\mathcal{B}_j(p)\,\eta U_\mu^{(N)}, u_{j\mu'}^{*(N)}\big)_{\partial K} \\ &- \sum_{k=0}^{2bm-1} (D_\nu^k \eta U_\mu^{(N)}, \mathcal{A}_k^*(\overline{p})\, u_{\mu'}^{*(N)} + \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\overline{p})\, u_{j\mu'}^{*(N)})_{\partial K}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $N > \big(\operatorname{Im}(\lambda_{\mu'} - \lambda_\mu)\big)/2b$, $\eta = \eta(r)$ гладкая функция, равная нулю при $r > 1$ и единице в окрестности нуля. В силу формулы Грина (1.4) определение функции $h(U_\mu, U_{\mu'}^*)(p)$ не зависит от выбора числа N и срезки η.

Предложение 2.1: *Пусть $\mu, \mu' \in \mathbb{Z}$ и $z \in \mathbb{C}_+ \setminus 0$. Тогда*

а) *если $\lambda_\mu - \lambda_{\mu'} \neq 2bd\mathrm{i}$, $d \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $h(J_z U_\mu, J_z U_{\mu'}^*)(p) = 0$;*

б) *если $\lambda_\mu - \lambda_{\mu'} = 2bd\mathrm{i}$ для некоторого $d \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, то $h(J_z U_\mu, J_z U_{\mu'})(p) = \sum_{2bs \le d} c_s p^s$, где сумма берется по всем $s \in \mathbb{Z}_+$, для которых справедливо равенство $2bs\mathrm{i} = \lambda_\mu - \lambda_{\mu''}$, $\mu'' \in \mathbb{Z}$ и константы c_s не зависят от z;*

в) *если $\lambda_\mu = \lambda_{\mu'}$, то $h(J_z U_\mu, J_z U_{\mu'}^*)(p) = \delta_{\mu\mu'}$.*

Доказательство: Пусть сначала $z > 1$. Подставим в (2.7) вместо функции $\eta(r)$ функцию $\eta(zr)$ и сделаем замену переменной $zr = \varrho$. Тогда получим

$$h(J_z U_\mu, J_z U_{\mu'}^*)(z^{2b} p) = \sum z^{\mathrm{i}(\lambda_{\mu'} - \lambda_\mu) - k} Q_k(p), \tag{2.8}$$

где Q_k — многочлен. С другой стороны из определения функции h видно, что она является многочленом от переменных p и $\log z$. Отсюда и из (2.8) вытекают утверждения а) и б). Докажем пункт в). В этом случае в (2.7) можно взять $N = 0$, $p = 0$ и $z = 1$. Требуемое равенство следует из (1.6) ∎

Следствие 2.1: *Зафиксируем ряды $U_\mu, \mu \in \mathbb{Z}$. Тогда ряды V_μ определяются однозначно если потребовать, чтобы*

$$h(U_\mu, U_{\mu'}^*)(p) = \delta_{\mu\mu'} \qquad (\mu, \mu' \in \mathbb{Z}). \tag{2.9}$$

В дальнейшем считаем, что ряды U_μ и U_μ^* удовлетворяют соотношениям (2.9).

2.2 Специальные решения задачи (1.2) и их свойства. Нам понадобится функция $\zeta \in C^\infty(\mathbb{C}_+)$, обладающая следующими свойствами (см. [4]): она аналитична при $\operatorname{Re} z > 0$, $\zeta(0) = 1$, $d^k/dz^k \zeta(0) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ и существует $\delta > 0$ такое, что $|d^k/dz^k \zeta(z)| \le c_k \exp(-\delta |z|^{1/2b})$. В работе [3] построена функция ζ, для которой последнее равенство выполняется с $b = 1$, а следовательно и с любым $b \ge 1$.

Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_-$. Будем искать решение однородной задачи (1.2) в виде

$$V_\mu(\omega, r, p) = \zeta(pr^{2b})\, U_\mu^{(N)}(\omega, r, p) + V_\mu^{(N)}(\omega, r, p), \tag{2.10}$$

где $N > (\operatorname{Im} \lambda_\mu - k_-)/2b$. Тогда функция $V_\mu^{(N)}$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(p)\, V_\mu^{(N)}(p) = -\mathcal{A}(p)\,\zeta(pr^{2b})\, U_\mu^{(N)}(p) \quad \text{на} \quad K, \\ &\mathcal{B}_j(p)\, V_\mu^{(N)}(p) = -\mathcal{B}_j(p)\,\zeta(pr^{2b})\, U_\mu^{(N)}(p) \quad \text{на} \quad \partial K \;\; (j = 1, \ldots, bm). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Выберем числа $\beta \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы

$$k_- < \beta + \frac{n}{2} - 2bm - l < k_+, \qquad \beta + \frac{n}{2} - 2bm - l + 2bN > \operatorname{Im} \lambda_\mu. \tag{2.12}$$

Тогда правые части в (2.11) принадлежат пространству $\mathscr{E}_\beta{}^l$ и в силу предложения 1.2 задача (2.11) имеет единственное решение из пространства $E_\beta{}^{l+2bm}(K)$. Построенное решение $V_\mu(p)$ не зависит от „срезающей" функции ζ и числа N.

Специальное решение однородной задачи (1.2), соответствующее ряду $J_z U_\mu$ будем обозначать $J_z V_\mu$, $\mu \in \mathbb{Z}_-$. Завершим этот пункт доказательством следующих двух лемм.

Лемма 2.2: *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_-$ и $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$. Тогда для $N > (\operatorname{Im} \lambda_\mu - k_-)/2b$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} J_{p^{1/2b}} V_\mu(\omega, r, p) &= \zeta(pr^{2b})\, J_{p^{1/2b}} U_\mu{}^{(N)}(\omega, r, p) \\ &\quad + p^{-i\lambda_\mu/2b} H_\mu{}^{(N)}(\omega, p^{1/2b} r), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $H_\mu{}^{(N)}(\omega, z)$ гладкая функция при $\omega \in \bar{\Omega}$ и $z \in \mathbb{C}_b$, где $\mathbb{C}_b = \{z \in \mathbb{C}: z \neq 0,\ |\arg z| \leqq (\pi/2 + a)/2b\}$ и число a то же, что и в замечании 1.1, и аналитическая при $z \in \mathbb{C}_b$. Существует положительное число $\varkappa$ такое, что верны оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_\omega{}^\alpha H_\mu{}^{(N)}(\omega, z) \right| \leqq c\, |z|^{-k_- - \varepsilon - k} \exp(-\varkappa\, |z|), \tag{2.14}$$

где ε — любое положительное число.

Лемма 2.3: *Пусть $\mu, \mu' \in \mathbb{Z}_-$ и $z \in \mathbb{C}_+ \setminus 0$. Тогда*

$$\begin{aligned} &(J_z V_\mu, \mathscr{A}^*(\bar{p})\, J_{\bar{z}} u_{\mu'}^{*(N)})_K + \sum_{k=0}^{2bm-1} (D_\nu{}^k J_z V_\mu, \mathscr{A}_k{}^*(\bar{p})\, J_{\bar{z}} u_{\mu'}^{*(N)} \\ &+ \sum_{j=1}^{bm} \mathscr{B}_{jk}^*(\bar{p})\, J_{\bar{z}} u_{j\mu'}^{*(N)})_{\partial K} = -\delta_{\mu\mu'}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $N > \operatorname{Im}(\lambda_\mu - \lambda_{\mu'})/2b$.

Доказательство леммы 2.3: Преобразуем левую часть в (2.15) следующим образом: подставим вместо функции $V_\mu(p)$ ее разложение (2.9), применим формулу Грина (1.4) к слагаемым содержащим функцию $V_\mu{}^{(N)}$ и воспользуемся равенствами (2.11). Тогда левая часть в (2.15) совпадет с функцией $-h(J_z U_\mu, J_{\bar{z}} U_{\mu'}^*)(p)$ и соотношение (2.15) вытекает из (2.9) ∎

Доказательство леммы 2.2: Формула (2.13) вытекает из однородности операторов краевой задачи (2.11). Гладкость и аналитичность по z функции $H_\mu{}^{(N)}$ также очевидны. Таким образом в доказательстве нуждается лишь оценка (2.14). Пусть числа β и l удовлетворяют неравенствам (2.12). Тогда

$$\begin{aligned} &\|\mathscr{A}(p)\, V_\mu{}^{(N)}(p);\, E_\beta{}^l(K), p\| + \sum_{j=1}^{bm} \|\mathscr{B}_j(p)\, V_\mu{}^{(N)}(p);\, E_\beta{}^{l+2bm-m_j-1/2}(\partial K), p\| \\ &\leqq c\, |p|^{-(\beta+n/2-2bm-l-\operatorname{Im}\lambda_\mu)/2b}. \end{aligned}$$

Взяв число N достаточно большим и считая, что $\beta + n/2 - 2bm - l = k_- + \varepsilon$ получаем (см. предложение 1.2)

$$\|V_\mu{}^{(N)}(p);\, E_\beta{}^{l+2bm}(K), p\| \leqq c\, |p|^{(\operatorname{Im}\lambda_\mu - k_- - \varepsilon)/2b}.$$

Отсюда и из предложения 1.1 приходим к оценке (2.14), с $\varkappa = 0$. Чтобы получить (2.14) с $\varkappa > 0$ воспользуемся следующим утверждением.

Предложение 2.2: *Пусть* $p \in \mathbb{C}_a$, $|p| = 1$ *и правые части в* (1.2) *таковы, что* $\exp(\delta r) f \in E_\beta{}^l(K)$ *и* $\exp(\delta r) g_j \in E_\beta{}^{l+2bm-m_j-1/2}(K)$ *для некоторого* $\delta > 0$, $k_- < \beta + n/2 - 2bm - l < k_+$. *Пусть* $u \in E_\beta{}^{l+2bm}(K)$ — *решение задачи* (1.2). *Существует число* $\delta_0 > 0$, *не зависящее от* p, u, δ *такое, что для любых* $\delta_1 \leqq \min(\delta_0, \delta)$ *будет* $\exp(\delta_1 r) u \in E_\beta{}^{l+2bm}(K)$.

Доказательство: Положим $\mathcal{L}_\delta(p) = \exp(\delta r) \mathcal{L}(p) \exp(-\delta r) = \mathcal{L}(p) + \mathcal{L}_\delta'(p)$. Норму оператора $\mathcal{L}_\delta' : E_\beta{}^{l+2bm}(K) \to \mathcal{E}_\beta{}^l$ можно сделать сколь угодно малой за счет выбора числа δ. Следовательно, при некотором δ_0 оператор $\mathcal{L}_{\delta_1}$, $\delta_1 \leqq \delta_0$, является изоморфизмом одновременно с $\mathcal{L}(p)$. Запишем уравнения (1.2) в виде $\mathcal{L}_{\delta_1}(p)\big(\exp(\delta_1 r) u\big) = \exp(\delta_1 r)\{f; g_j, 1 \leqq j \leqq bm\}$. Так как правые части последнего соотношения принадлежат $\mathcal{E}_\beta{}^l$, то $\exp(\delta_1 r) u \in E_\beta{}^{l+2bm}(K)$ ∎

Доказательство леммы 2.2 (окончание): Используя предложение 2.2 и однородность операторов, приходим к оценке

$$\|\exp(\varkappa |p|^{1/2b} r)\, V_\mu{}^{(N)}(p); E_\beta{}^{l+2bm}(K), p\| \leqq c\, |p|^{(\operatorname{Im}\lambda_\mu - k_- - \varepsilon)/2b}.$$

Доказательство завершается применением предложения 1.1 ∎

Замечание 2.1: *Пусть* $\mu \in \mathbb{Z}_-$ *и* $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$. *Тогда для* $N > (\operatorname{Im}\lambda_\mu - k_-)/2b$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned} V_\mu(\omega, r, p) &= \zeta(pr^{2b})\, U_\mu{}^{(N)}(\omega, r, p) \\ &+ p^{-i\lambda_\mu/2b} \sum_{s=0}^{M} (\log p)^s\, \mathcal{H}_{\mu s}^{(N)}(\omega, rp^{1/2b}), \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $\mathcal{H}_{\mu s}^{(N)}(\omega, z)$ гладкая функция при $\omega \in \bar{\Omega}$, $z \in \mathbb{C}_b$ и аналитическая по z при $z \in \mathbb{C}_b$. Кроме того для некоторого числа $\varkappa > 0$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_\omega{}^\alpha \mathcal{H}_{\mu s}^{(N)}(\omega, z) \right| \leqq c\, |z|^{-k_- - \varepsilon - k} \exp(-\varkappa |z|), \tag{2.17}$$

где ε — любое положительное число. Нетрудно видеть, что функции $\mathcal{H}_{\mu s}^{(N)}$ линейным образом выражаются через функции $H_{\mu'}^{(N)}$, $i(\lambda_\mu - \lambda_{\mu'})/2b \in Z_+$, поэтому замечание вытекает из леммы 2.2.

2.3 Специальные решения задачи 1.5 и их свойства. Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Будем искать решение однородной задачи (1.5) в виде

$$V_\mu{}^*(\bar{p}) = \zeta(\bar{p}r^{2b})\, U_\mu{}^{*(N)}(\bar{p}) + V_\mu{}^{*(N)}(\bar{p}),$$

$$V_\mu{}^*(\bar{p}) = \{v_\mu{}^*(\omega, r, \bar{p}); v_{j\mu}^*(\omega', r, \bar{p}), 1 \leqq j \leqq bm\},$$

$$V_\mu{}^{*(N)}(\bar{p}) = \{v_\mu{}^{*(N)}(\omega, r, \bar{p}); v_{j\mu}^{*(N)}(\omega', r, \bar{p}), 1 \leqq j \leqq bm\},$$

где $N > (\operatorname{Im}\lambda_\mu{}^* - k_-{}^*)/2b$. Тогда функция $V_\mu{}^{*(N)}$ является решением задачи

$$\mathcal{A}^*(\bar{p})\, v_\mu{}^{*(N)}(\bar{p}) = -\mathcal{A}^*(\bar{p})\, \zeta(\bar{p}r^{2b})\, u_\mu{}^{*(N)}(\bar{p}) \quad \text{на} \quad K,$$

$$\mathcal{A}_k{}^*(\bar{p})\, v_\mu{}^{*(N)}(\bar{p}) + \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\bar{p})\, v_{j\mu}^{*(N)}(\bar{p}) = -\mathcal{A}_k{}^*(\bar{p})\, \zeta(\bar{p}r^{2b})\, u_\mu{}^{*(N)}(\bar{p})$$

$$- \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\bar{p})\, \zeta(\bar{p}r^{2b})\, u_{j\mu}^{*(N)}(\bar{p}) \quad \text{на} \quad \partial K \qquad (k = 0, \dots, 2bm - 1).$$

Если $k_-^* < \beta + n/2 - 2bm - l < k_+^*$, $\beta + n/2 - 2bm - l + 2bN > \operatorname{Im} \lambda_\mu^*$, то правые части принадлежат пространству $E_\beta^l(K) \times \prod_{k=0}^{2bm-1} E_\beta^{l+k+1/2}(\partial K)$ и в силу предложения 1.3 $V_\mu^{*(N)}(\overline{p}) \in E_\beta^{l+2bm}(K) \times \prod_{j=1}^{bm} E_\beta^{l+m_j+1/2}(\partial K)$. Построение решений $V_\mu^*(\overline{p})$ не зависит от срезающей функции ζ и числа N.

Специальное решение однородной задачи (1.5), соответствующее ряду $J_z U_\mu^*$ будем обозначать $J_z V_\mu^*$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Доказательство следующих двух лемм в существенном повторяет доказательство аналогичных утверждений предыдущего пункта и здесь не приводится.

Лемма 2.4: *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$. Тогда для $N > (\operatorname{Im} \lambda_\mu^* - k_-^*)/2b$ справедливо представление*

$$J_{\overline{p}^{1/2b}} V_\mu^*(\overline{p}) = \zeta(\overline{p} r^{2b})\, J_{\overline{p}^{1/2b}} U_\mu^{*(N)}(\overline{p}) + H_\mu^{*(N)}(\overline{p}),$$

$$H_\mu^{*(N)}(\overline{p}) = (\overline{p})^{-i\lambda_\mu^*/2b} \{h_\mu^{*(N)}(\omega, r\overline{p}^{1/2b});\ (\overline{p})^{(2bm-m_j-1)/2b} \times h_{j\mu}^{*(N)}(\omega', \overline{p}^{1/2b} r),\ j = 1, \ldots, bm\},$$

где $h_\mu^{*(N)}(\omega, z)$ $\left(h_{j\mu}^{*(N)}(\omega', z)\right)$ гладкие в $\overline{\Omega} \times \mathbb{C}_b$ $(\partial\Omega \times \mathbb{C}_b)$ функции, аналитические при $z \in \mathbb{C}_b$. Существует положительное $\varkappa$ такое, что справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_\omega^\alpha h_\mu^{*(N)}(\omega, z) \right| \leqq c\, |z|^{-k_-^* - \varepsilon - k} \exp(-\varkappa |z|); \tag{2.18}$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D_{\omega'}^{\alpha'} h_{j\mu}^{*(N)}(\omega', z) \right| \leqq c\, |z|^{-k_-^* - \varepsilon - 2bm + 1 + m_j - k} \exp(-\varkappa |z|), \tag{2.19}$$

где ε — любое положительное число.

Лемма 2.5: *Пусть $\mu, \mu' \in \mathbb{Z}_+$ и $z \in \mathbb{C}_+ \setminus 0$. Тогда*

$$\left(\mathcal{A}(p)\, J_z U_\mu^{(N)}, J_{\overline{z}} v_{\mu'}^*\right)_K + \sum_{j=1}^{bm} \left(\mathcal{B}_j(p)\, J_z U_\mu^{(N)}, J_{\overline{z}} v_{j\mu'}^*\right)_{\partial K} = \delta_{\mu\mu'}, \tag{2.20}$$

где $N > \operatorname{Im}(\lambda_{\mu'} - \lambda_\mu)/2b$.

Замечание 2.2: Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$ и $p \in \mathbb{C}_a \setminus 0$. Тогда для $N > (\operatorname{Im} \lambda_\mu^* - k_-^*)/2b$ справедливо представление

$$V_\mu^*(\overline{p}) = \zeta(\overline{p} r^{2b})\, U_\mu^*(\overline{p}) + \sum_{s=0}^{M} (\log \overline{p})^s\, \mathcal{H}_{\mu s}^{*(N)}(\overline{p}),$$

$$\mathcal{H}_{\mu s}^{*(N)}(\overline{p}) = (\overline{p})^{-i\lambda_\mu^*/2b} \{h_{\mu s}^{*(N)}(\omega, \overline{p}^{1/2b} r);\ (\overline{p})^{(2bm-m_j-1)/2b} \times h_{j\mu s}^{*(N)}(\omega', \overline{p}^{1/2b} r),\ j = 1, \ldots, bm\}.$$

Для функций $h_{\mu s}^{*(N)}$ и $h_{j\mu s}^{*(N)}$ справедливы оценки (2.18) и (2.19) и они являются аналитическими функциями при $z \in \mathbb{C}_b$.

2.4 Асимптотика решения задачи (1.2). В этом пункте доказывается один из основных результатов настоящего параграфа.

Теорема 2.1: *Пусть $\sigma = \beta + n/2 - 2bm - l < k_-$, $f \in E_\beta^l(K)$, $g_j \in E_\beta^{l+2bm-m_j-1/2}(\partial K)$ $(j = 1, \ldots, bm)$, и на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \sigma$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$. Обозначим через $M + 1$ число собственных чисел (с учетом кратности) пучка $\mathcal{P}(\lambda)$, лежащих в полосе $\sigma < \operatorname{Im} \lambda \leqq k_-$.*

Для любого $p \in \mathbb{C}_+ \setminus 0$ существует решение задачи (1.2) вида

$$u(x,p) = \zeta(pr^{2b}) \sum_{\mu=0}^{M} c_\mu U_\mu^{(N_\mu)}(x,p) + u_1(x,p), \tag{2.21}$$

где $u_1 \in E_\beta^{l+2bm}(K)$, $N_\mu = [(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma)/2b]$ (наименьшее целое число большее $(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma)/2b$) и

$$c_\mu = \big(f, v_\mu^*(\overline{p})\big)_K + \sum_{j=1}^{bm} \big(g_j, v_{j\mu}^*(\overline{p})\big)_{\partial K}. \tag{2.22}$$

Существует число $d_\mu > 0$ такое, что

$$\|u_1;\, E_\beta^{l+2bm}(K), p\| \leqq c\, \|\mathcal{L}(p)\, u;\, \mathcal{E}_\beta^l, p\|, \tag{2.23}$$

$$|c_\mu| \leqq c\, |p|^{(\sigma - \operatorname{Im}\lambda_\mu)/2b}(1 + |\log p|)^{d_\mu}\, \|\mathcal{L}(p)\, u;\, \mathcal{E}_\beta^l, p\| \qquad (\mu = 0, \ldots, M). \tag{2.24}$$

Кроме того

$$\|\mathcal{L}(p)\, u;\, \mathcal{E}_\beta^l, p\| \leqq c(\|u_1;\, E_\beta^{l+2bm}(K), p\| + \sum_{\mu=0}^{M} |p|^{(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma)/2b}(1 + |\log p|)^{d_\mu}\, |c_\mu|). \tag{2.25}$$

Доказательство: Обозначим через $X(p)$ множество функций u, представимых в виде (2.21). Тогда пространство $E_\beta^{l+2bm}(K)$ содержится в $X(p)$ и его коразмерность равна $M + 1$. Оператор $\mathcal{L}(p)$ отображает $X(p)$ в $\mathcal{E}_\beta^l$ и имеет тривиальное ядро, а сужение $\mathcal{L}(p)$ на $E_\beta^{l+2bm}(K)$ по теореме 1.1 имеет коядро размерности $M + 1$, следовательно $\mathcal{L}(p)$ — изоморфизм. Отсюда вытекает (2.21); равенство (2.22) следует из (2.20). Докажем оценку (2.23). Заменяя в формулах (2.21) и (2.22) функции $U_\mu^{(N_\mu)}$ и V_μ^* на $J_z U_\mu^{(N_\mu)}$ и $J_{\bar z} V_\mu^*$ мы получим другое представление

$$u(x,p) = \zeta(pr^{2b}) \sum_{\mu=0}^{M} c_\mu(p,z)\, J_z U_\mu^{(N_\mu)}(x,p) + u_1(x,p). \tag{2.26}$$

Полагая $z = p^{1/2b}$ и используя лемму (2.4), находим

$$|c_\mu(p, p^{1/2b})| \leqq c\, |p|^{(\sigma - \operatorname{Im}\lambda_\mu)/2b}\, \|\mathcal{L}(p)\, u;\, \mathcal{E}_\beta^l, p\|.$$

Обозначим через $H(x,p)$ первое слагаемое в (2.26). Тогда

$$\begin{aligned} \|u_1;\, E_\beta^{l+2bm}(K), p\| &\leqq c\, \|\mathcal{L}(p)\,(u - H);\, \mathcal{E}_\beta^l, p\| \\ &\leqq c\,(\|\mathcal{L}(p)\, u;\, \mathcal{E}_\beta^l, p\| + \sum_{\mu=0}^{M} |p|^{(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma)/2b}\, |c_\mu(p, p^{1/2b})| \\ &\leqq c\, \|\mathcal{L}(p)\, u;\, \mathcal{E}_\beta^l, p\|. \end{aligned}$$

Неравенства (2.24) и (2.25) проверяются непосредственно (с использованием леммы 2.3) ▮

2.5 Асимптотика решения задачи (1.5). Здесь приводится аналог теоремы 2.1 для сопряжённой задачи (1.5).

Теорема 2.2: *Пусть $\sigma = \beta + n/2 - 2bm - l < k_-^*$, $f \in E_\beta^l(K)$, $g_k \in E_\beta^{l+k+1/2}(\partial K)$ $(k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1)$ и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \sigma$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}^*(\lambda)$. Обозначим через M число собственных чисел (с учетом кратности) пучка $\mathcal{P}^*(\lambda)$, лежащих в полосе $\sigma < \operatorname{Im}\lambda \leqq k_-^*$.*

Для любого $p \in \mathbb{C}_+ \setminus 0$ *существует решение задачи* (1.5) *вида*

$$u(\overline{p}) = \zeta(\overline{p}r^{2b}) \sum_{-M \leq \mu \leq -1} c_\mu{}^* V_\mu{}^{*(N_\mu)}(\overline{p}) + u_1(\overline{p}),$$

где

$$u_1(\overline{p}) = \{v(\omega, r, \overline{p});\ v_j(\omega', r, \overline{p}),\ j = 1, \dots, bm\}$$

$$\in E_\beta{}^{l+2bm}(K) \times \prod_{j=1}^{bm} E_\beta{}^{l+m_j+1/2}(\partial K),$$

$$N_\mu = [(\mathrm{Im}\ \lambda_\mu{}^* - \sigma)/2b] \ \text{\textit{и}}\ \overline{c_\mu{}^*} = -\big(V_\mu(p), f\big)_K - \sum_{k=0}^{2bm-1} \big(D_\nu{}^k V_\mu(p), g_k\big)_{\partial K}.$$

Существует число $d_\mu > 0$ *такое, что*

$$\|v;\ E_\beta{}^{l+2bm}(K), p\| + \sum_{j=1}^{bm} \|v_j;\ E_\beta{}^{l+m_j+1/2}(\partial K), p\|$$

$$\leq c(\|f;\ E_\beta{}^l(K), p\| + \sum_{k=0}^{2bm-1} \|g_k;\ E_\beta{}^{l+k+1/2}(\partial K), p\|) =: cI(p),$$

$$|c_\mu| \leq c\ |p|^{(\sigma - \mathrm{Im}\lambda_\mu{}^*)/2b}(1 + |\log p|)^{d_\mu}\ I(p),$$

$$I(p) \leq c(\|v;\ E_\beta{}^{l+2bm}(K), p\| + \sum_{j=1}^{bm} \|v_j;\ E_\beta{}^{l+m_j+1/2}(\partial K), p\|$$

$$+ \sum_{-M \leq \mu \leq -1} |p|^{(\mathrm{Im}\lambda_\mu{}^* - \sigma)/2b}(1 + |\log p|)^{d_\mu}\ |c_\mu|).$$

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1.

§ 3. Параболическая задача в конусе

3.1 Функциональные пространства. *Пусть* $Q = K \times (0, \infty)$, $\Gamma = (\partial K \setminus 0) \times (0, \infty)$, $K_0 = K \times \{0\}$ и $\partial K_0 = (\partial K \setminus 0) \times \{0\}$. Введем пространство $W_\beta{}^{2bl,l}(Q)$ ($\beta \in \mathbb{R}$; $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) функций в области Q, снабженное нормой

$$\|u;\ W_\beta{}^{2bl,l}(Q)\| = \Big(\int_Q r^{2(\beta - 2bl)} \sum_{|\overline{\alpha}| \leq 2bl} r^{2|\overline{\alpha}|}\ |\partial_t{}^{\alpha_0} D_x{}^\alpha u|^2\ dt\ dx\Big)^{1/2},$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $|\overline{\alpha}| = 2b\alpha_0 + |\alpha|$ и $\{\partial_t{}^{\alpha_0} = \partial^{\alpha_0}/\partial t^{\alpha_0}$. Соответствующие пространства граничных значений обозначим через $W_\beta{}^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma)$ ($\lambda = l - k/2b - 1/4b$, $k = 0, 1, \dots, 2b - 1$). Норма в нем определяется равенством

$$\|u;\ W_\beta{}^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma)\|^2 = \int_0^\infty \|u(\cdot, t);\ V_\beta{}^{2b\lambda}(\partial K)\|^2\ dt$$

$$+ \int_K r^{2\beta} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\partial_t{}^{l-1}u(x,t) - \partial_\tau{}^{l-1}u(x,\tau)|^2}{|t - \tau|^{2-(k+1/2)/b}}\ dt\ d\tau\ dx,\ l \geq 1.$$

Приведем без доказательства некоторые свойства функций из введенных пространств, которые проверяются с помощью более или менее стандартных рассуждений.

Предложение 3.1: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Тогда*

а) *для любого мультииндекса* $\bar{\alpha}$ ($|\bar{\alpha}| < 2bl$) *и любой функции* $u \in W_\beta^{2bl,l}(Q)$ *имеем* $\partial_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u|_\Gamma \in W_\beta^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda = l - (|\bar{\alpha}| + 1/2)/2b$;

б) *если* $u \in W_\beta^{2bl,l}(Q)$, *то* $\partial_t^j u|_{t=0} \in V_\beta^{2bl-|\alpha|-b-1/2}(\partial K)$;

в) *если* $|\bar{\alpha}| \leqq 2bl - b - 1$, *то* $\partial_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u|_{\partial K_0} \in V_\beta^{2bl-2bj-b}(K)$, $j = 0, 1, \ldots, l-1$;

г) *если* $\varphi_j \in V_\beta^{2bl-2bj-b}(K)$ ($j = 0, 1, \ldots, l-1$), *то существует функция* $u \in W_\beta^{2bl,l}(Q)$ *такая, что* $\partial_t^j u|_{t=0} = \varphi_j$.

Обозначим через $\mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ и $\mathring{W}_\beta^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma)$ замыкание в $W_\beta^{2bl,l}(Q)$ и $W^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma)$ функций класса $C_0^\infty\big((\bar{K} \setminus 0) \times (0, \infty)\big)$ и $C_0^\infty(\Gamma)$.

Предложение 3.2: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 2b-1$ *и* $\lambda = l - k/2b - 1/4b$. *Тогда*

$$\mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q) = \{u \in W_\beta^{2bl,l}(Q) \colon \partial_t^j u|_{t=0} = 0, 0 \leqq j \leqq l-1\},$$

$$\mathring{W}_\beta^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma) = \{u \in W_\beta^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma) \colon \partial_t^j u|_{t=0} = 0, 0 \leqq j < \lambda - 1/2\}.$$

Предложение 3.3: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$, $2bl > n/2$ *и пусть функции* $u, \partial_t u, \ldots, \partial_t^k u \in W_\beta^{2bl,l}(Q)$. *Тогда для любых мультииндексов* α, $|\alpha| < 2bl - n/2$, *справедливы оценки*

$$|\partial_t^m D_x^\alpha u(x, t)| \leqq c r^{-(\beta + n/2 - 2bl) - |\alpha|}, \qquad m < k. \tag{3.1}$$

Доказательство: Из включений $\partial_t^m u \in L_2\big((0, \infty); V_{\beta j}^{2bl}(K)\big)$, $m \leqq k$, вытекает, что $\partial_t^m u \in C\big([0, \infty); V_\beta^{2bl}(K)\big)$, $m \leqq k-1$. Отсюда и из предложения 1.1 следует неравенство (3.1) ∎

Введем пространства функций $H_\beta^{2bl}(K)$ и $H_\beta^{2b\lambda}(\partial K)$ голоморфных при $\operatorname{Re} p > 0$ и со значениями в $E_\beta^{2bl}(K)$ и $E_\beta^{2b\lambda}(\partial K)$, для которых конечны величины

$$\|u; H_\beta^{2bl}(K)\| = \sup_{\gamma > 0} \Big(\int_{\operatorname{Re} p = \gamma} \|u; E_\beta^{2bl}(K), p\|^2 \, dp\Big)^{1/2},$$

$$\|u; H_\beta^{2b\lambda}(\partial K)\| = \sup_{\gamma > 0} \Big(\int_{\operatorname{Re} p = \gamma} \|u; E_\beta^{2b\lambda}(\partial K), p\|^2 \, dp\Big)^{1/2}.$$

Следующее утверждение доказывается так же, как аналогичное утверждение в [1].

Предложение 3.4: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 2b-1$ *и* $\lambda = l + 1 - k/2b - 1/4b$. *Тогда преобразование Лапласа осуществляет изоморфизм между* $\mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ *и* $H_\beta^{2bl}(K)$ *и между* $\mathring{W}_\beta^{2b\lambda,\lambda}(\Gamma)$ *и* $H_\beta^{2b\lambda}(\partial K)$.

3.2 Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую параболическую задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(x, D_x, \partial_t)\, u = f && \text{на } Q, \\ &\mathcal{B}_j(x', D_x, \partial_t)\, u = g_j && \text{на } \Gamma\ (j = 1, \ldots, bm), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где операторы $\mathcal{A}(x, D_x, p)$ и $\mathcal{B}_j(x', D_x, p)$ удовлетворяют условиям I, II первого параграфа (x' — точка границы ∂K). Будем рассматривать также сопряженную задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^*(x, D_x, \partial_t)\, u = f && \text{на } Q, \\ &\mathcal{A}_k^*(x', D_x, \partial_t)\, u + \sum_{j=1}^{bm} \mathcal{B}_{jk}^*(x', D_{x'}, \partial_t)\, u_j = g_k && \text{на } \Gamma \\ &(k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из предложений 1.2 и 1.3, в силу предложения 3.4, вытекают следующие два утверждения.

Предложение 3.5: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k_- < \beta + n/2 - 2b(m+l) < k_+$. *Пусть еще* $f \in \mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ *и* $g_j \in \mathring{W}_\beta^{2b\lambda_j,\lambda_j}(\Gamma)$, $\lambda_j = l + m - m_j/2b - 1/4b$ $(j = 1, \ldots, bm)$. *Тогда задача* (3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{W}_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q)$.

Предложение 3.6: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k_-^* < \beta + n/2 - 2b(m+l) < k_+^*$. *Пусть еще* $f \in \mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ *и* $g_k \in \mathring{W}_\beta^{2b\lambda_k,\lambda_k}(\Gamma)$, $\lambda_k = l + k/2b + 1/4b$ $(k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1)$. *Тогда задача* (3.3) *имеет единственное решение* $\mathcal{U} = \{u; u_j, j = 1, \ldots, bm\}$, *где* $u \in \mathring{W}_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q)$ *и* $u_j \in \mathring{W}_\beta^{2bs_j,s_j}(\Gamma)$, $s_j = l + m_j/2b + 1/4b$ $(j = 1, \ldots, bm)$.

3.3 Специальные решения задач (3.2) и (3.3). Рассмотрим функцию

$$V_\mu(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} V_\mu(x, p)\, dp, \qquad \mu \in \mathbb{Z}_-. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1: *Пусть* $\mu \in \mathbb{Z}_-$. *Тогда для функций* $V_\mu(x, t)$ *справедливо представление*

$$V_\mu(x, t) = t^{i\lambda_\mu/2b - 1} \sum_{k=0}^{d} (\log t)^k\, h_{\mu k}(\omega, rt^{-1/2b}), \tag{3.5}$$

где $h_{\mu k}(\omega, \varrho)$ — *бесконечно дифференцируемые функции при* $(\omega, \varrho) \in \bar{\Omega} \times (0, \infty)$. *Существует число* $\varkappa > 0$ *такое, что*

$$|\partial_\varrho^s D_\omega^\alpha h_{\mu k}(\omega, \varrho)| \leqq c\varrho^{-k_- - \varepsilon - s} \exp\left(-\varkappa \varrho^{2b/(2b-1)}\right), \tag{3.6}$$

где ε — *любое положительное число.*

Доказательство: Равенство (3.5) следует из определения функции $V_\mu(x, t)$ и из формулы (2.16). Докажем оценку (3.6). Обозначим через $V_\mu^{(1)}$ и $V_\mu^{(2)}$ обратные преобразования Лапласа от первого и от второго слагаемых в правой части (2.16). Тогда, как нетрудно видеть, для функции $V_\mu^{(1)}$ справедливо представление (3.5), коэффициенты в котором удовлетворяют оценкам (3.6), где вместо k_- можно поставить любое отрицательное число. Функция $V_\mu^{(2)}$ имеет вид

$$\frac{t^{i\lambda_\mu/2b-1}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^p \sum_{s=0}^{M} (\log p - \log t)^s\, \mathcal{H}_{\mu s}^{(N)}(\omega, \varrho p^{1/2b})\, dp,$$

где $\varrho = rt^{-1/2b}$. Рассмотрим функцию

$$h(\omega, \varrho) = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^p (\log p)^s\, \mathcal{H}(\omega, \varrho p^{1/2b})\, dp, \tag{3.7}$$

где функция $\mathcal{H}(\omega, z)$ — аналитична по z и удовлетворяет оценкам (2.17) при $\omega \in \bar{\Omega}$ и $z \in \mathbb{C}_b^\circ$. Продеформируем контур интегрирования в (3.7) в контур $(-i\infty, -iR) \cup S_R \cup (iR, i\infty)$, $R = \varepsilon\varrho^{2b/(2b-1)}$, где S_R — полуокружность в правой полуплоскости радиуса R. Используя оценки (3.17) приходим к (3.6) при $\varrho \geqq 1$. Если $\varrho \leqq 1$, то продеформируем контур в $\{p \in \mathbb{C}: |p| \geqq 1$ и $\arg p = \pi/2 + a$, или $|p| = 1$ и $|\arg p| \leqq \pi/2 + a$, или $|p| \geqq 1$ и $\arg p = -\pi/2 - a\}$. Снова используя (2.17), приходим к (3.6) ∎

Рассмотрим теперь функцию $V_\mu{}^* = \{v_\mu{}^*(x, t); v^*_{j\mu}(x', t), j = 1, \ldots, bm\}$, $\mu \in Z_+$, где

$$v_\mu{}^*(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\overline{p}t} v_\mu{}^*(x, \overline{p})\, d\overline{p}, \qquad v^*_{j\mu}(x', t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\overline{p}t} v^*_{j\mu}(x', \overline{p})\, d\overline{p}. \tag{3.8}$$

Здесь $v_\mu{}^*(x, \overline{p})$ и $v^*_{j\mu}(x', \overline{p})$ — функции, построенные в пункте 2.3. Аналогично лемме 3.1 доказывается следующая лемма.

Лемма 3.2: *Пусть $\mu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для функций* (3.8) *справедливо представление*

$$v_\mu{}^*(x, t) = t^{i\lambda_\mu{}^*/2b-1}\sum_{k=0}^{d}(\log t)^k h^*_{\mu k}(\omega, rt^{-1/2b}),$$

$$v^*_{j\mu}(x', t) = t^{(i\lambda_\mu{}^*-2bm+m_j+1)/2b-1}\sum_{k=0}^{d}(\log t)^k h^*_{j\mu k}(\omega', rt^{-1/2b}),$$

$j = 1, \ldots, bm$. *Существует число $\varkappa > 0$ такое, что*

$$|\partial_\varrho{}^s D_\omega{}^\alpha h^*_{\mu k}(\omega, \varrho)| \leqq c\varrho^{-k_-{}^*-\varepsilon-s}\exp\left(-\varkappa\varrho^{2b/(2b-1)}\right), \tag{3.9}$$

$$|\partial_\varrho{}^s D^{\alpha'}_{\omega'} h^*_{j\mu k}(\omega', \varrho)| \leqq c\varrho^{-k_-{}^*-2bm+m_j+1-\varepsilon-s}\exp\left(-\varkappa\varrho^{2b/(2b-1)}\right), \tag{3.10}$$

где ε — любое положительное число.

Замечание 3.1: Функции $V_\mu(x, t)$, $\mu \in \mathbb{Z}_-$, являются решениями однородной задачи (3.2), а вектор-функции $V_\mu{}^*$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$, — решениями однородной задачи (3.3).

В пункте 2.1 были введены функции $U_\mu{}^{(N)}(x, p)$ и $U_\mu{}^{*(N)}(\overline{p}) = \{u_\mu{}^{*(N)}(x, \overline{p}); u^{*(N)}_{j\mu}(x', \overline{p}), j = 1, \ldots, bm\}$, которые являются многочленами по переменной p и $\overline{p}$ степени $N - 1$. Будем обозначать в дальнейшем через $U_\mu{}^{(N)}(x, \partial_t)$, $U_\mu{}^{*(N)}(\partial_t) = \{u_\mu{}^{*(N)}(x, \partial_t); u^{*(N)}_{j\mu}(x', \partial_t), j = 1, \ldots, bm\}$ дифференциальные операторы, полученные в результате подстановок $p \to \partial_t$, $\overline{p} \to \partial_t$. Тогда из соотношений (2.15) и (2.19) вытекают равенства

$$\int\limits_K \left(\overline{\mathcal{A}^*(x, D_x, \partial_t)\, u^{*(N)}_{\mu'}(x, \partial_t)}\right) V_\mu(x, t)\, dx + \sum_{k=0}^{2bm-1}\int\limits_{\partial K}\left(\overline{\mathcal{A}_k{}^*(x', D_x, \partial_t)\, u^{*(N)}_{\mu'}(x, \partial_t)}\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{bm}\overline{\mathcal{B}^*_{jk}(x', D_{x'}, \partial_t)\, u^*_{j\mu}(x', \partial_t)}\right) D_\nu{}^k V_\mu(x, t)\, dx' = -\delta_{\mu\mu'}\delta(t),$$

$$(\mu, \mu' \in \mathbb{Z}_-, N > \operatorname{Im}(\lambda_\mu - \lambda_{\mu'})/2b),$$

$$\int\limits_K \left(\mathcal{A}(x, D_x, \partial_t)\, U_\mu{}^{(N)}(x, \partial_t)\right) \overline{v^*_{\mu'}(x, t)}\, dx$$

$$+ \sum_{j=1}^{bm}\int\limits_{\partial K}\left(\mathcal{B}_j(x', D_x, \partial_t)\, U_\mu{}^{(N)}(x, \partial_t)\right)\overline{v^*_{j\mu'}(x', t)\, dx'} = \delta_{\mu\mu'}\delta(t)$$

$$(\mu, \mu' \in \mathbb{Z}_+, N > \operatorname{Im}(\lambda_{\mu'} - \lambda_\mu)/2b).$$

3.4 Асимптотика решений параболических уравнений. Пусть функция $\varrho \to T(\varrho)$ равна обратному преобразованию Лапласа функции ζ. Тогда $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, supp $T \subset [0, \infty)$ и при $k \in \mathbb{Z}_+$ имеем $|d^kT(\varrho)/d\varrho^k| \leqq c_k \exp\left(-\delta\varrho^{-1/(2b-1)}\right)$, $\delta > 0$. Кроме того $\int\limits_0^\infty T(\varrho)\, d\varrho = 1$ и $\int\limits_0^\infty T(\varrho)\, \varrho^k\, d\varrho = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Обозначим через $\mathcal{K}$ ператор

$$(\mathcal{K}\varphi)(r, t) = \int\limits_0^t T\left(\frac{t-\tau}{r^{2b}}\right)\varphi(\tau)\frac{d\tau}{r^{2b}}.$$

Легко видеть, что он продолжает функции, заданные на ребре $(x = 0, \tau \in (0, \infty))$ в функции, определенные в Q, причем $(\mathcal{K}\varphi)|_{r=0} = \varphi$ и $D_x^\alpha(\mathcal{K}\varphi)|_{r=0} = 0$ $(|\alpha| \geqq 1)$.

Теорема 3.1: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *на прямой* $\operatorname{Im} \lambda = \sigma = \beta + n/2 - 2b(m + l)$ *нет собственных чисел пучка* $\mathcal{P}(\lambda)$ *и* $\sigma < k_-$. *Пусть еще* $f \in \mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ *и* $g_j \in \mathring{W}_\beta^{2b\lambda_j,\lambda_j}(\Gamma)$ *с* $\lambda_j = l + m - m_j/2b - 1/4b$ $(j = 1, \ldots, bm)$. *Обозначим через* $M + 1$ $(M \in \{0\} \cup \mathbb{N})$ *число собственных чисел (с учетом кратности) пучка* $\mathcal{P}(\lambda)$, *лежащих в полосе* $\sigma < \operatorname{Im} \lambda \leqq k_-$. *Утверждается, что задача* (3.2) *имеет решение вида*

$$u(x, t) = \sum_{\mu=0}^{M} U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\,(\mathcal{K}h_\mu)\,(r, t) + u_1(x, t), \tag{3.11}$$

где $N_\mu = [(\operatorname{Im} \lambda_\mu - \sigma)/2b]$, $u_1 \in \mathring{W}_\beta^{2b(l+m),l+m}(Q)$, *а для функций* h_μ *справедливо представление*

$$h_\mu(t) = \int_0^t \big(f(\cdot, \tau), v_\mu^*(\cdot, t - \tau)\big)_K\, d\tau + \sum_{j=1}^{bm} \int_0^t \big(g_j(\cdot, \tau), v_{j\mu}^*(\cdot, t - \tau)\big)_{\partial K}\, d\tau. \tag{3.12}$$

Все утверждения теоремы, в силу предложения 3.4, получаются с помощью обратного преобразования Лапласа из теоремы 2.1. Аналогично, из теоремы 2.2 вытекает

Теорема 3.2: *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, *на прямой* $\operatorname{Im} \lambda = \sigma = \beta + n/2 - 2b(m + l)$ *нет собственных чисел пучка* $\mathcal{P}^*(\lambda)$ *и* $\sigma < k_-^*$. *Пусть еще* $f \in \mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ *и* $g_k \in \mathring{W}_\beta^{2b\lambda_k,\lambda_k}(\Gamma)$ *с* $\lambda_k = l + k/2b + 1/4b$ $(k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1)$. *Обозначим через* M $(M \in \mathbb{N})$ *число собственных чисел (с учетом кратности) пучка* $\mathcal{P}^*(\lambda)$, *лежащих в полосе* $\sigma < \operatorname{Im} \lambda \leqq k_-^*$. *Утверждается, что задача* (3.3) *имеет решение вида*

$$\mathcal{U}^*(t) = \sum_{\mu=-M}^{-1} U_\mu^{*(N_\mu)}(\partial_t)\,(\mathcal{K}h_\mu^*)\,(r, t) + \mathcal{U}_1^*(t),$$

где $N_\mu = [(\operatorname{Im} \lambda_\mu^* - \sigma)/2b]$, $\mathcal{U}^*(t) = \{u^*(x, t);\, u_j^*(x', t), j = 1, \ldots, bm\}$ и $\mathcal{U}_1^*(t) = \{u_1^*(x, t);\, u_{1j}^*(x', t), j = 1, \ldots, bm\}$. *Вектор-функция* $\mathcal{U}_1^*$ *принадлежит пространству* $\mathring{W}_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q) \times \prod_{j=1}^{bm} \mathring{W}_\beta^{2bs_j,s_j}(\Gamma)$ *с* $s_j = l + m_j/2b + 1/4b$. *Для функции* h_μ^* *справедливо представление*

$$h_\mu^*(t) = -\int_0^t \big(f(\cdot, \tau), V_\mu(\cdot, t - \tau)\big)_K\, d\tau - \sum_{k=0}^{2bm-1} \int_0^t \big(g_k(\cdot, \tau), D_\nu^k V_\mu(\cdot, t - \tau)\big)_{\partial K}\, d\tau.$$

Пусть $\sigma < k_+$ и на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \sigma$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$. Обозначим через $M + 1$ $(M = -1, 0, \ldots)$ число собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$, лежащих в полосе $\sigma < \operatorname{Im} \lambda < k_+$. Положим

$$G_\sigma(x, y, t) = \sum_{\mu=0}^{M} U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, \overline{v_\mu^*(y, t)},$$

$$G_{j\sigma}(x, y', t) = \sum_{\mu=0}^{M} U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, \overline{v_{\mu j}^*(y', t)},$$

где $N_\mu = [(\operatorname{Im} \lambda_\mu - \sigma)/2b]$.

Лемма 3.3: *Для любого $a > 0$ справедливы формулы*

$$G_\sigma(ax, ay, a^{2b}t) = a^{2b(m-1)-n}\, G_\sigma(x, y, t),$$

$$G_{j\sigma}(ax, ay', a^{2b}t) = a^{m_j-n-2b+1} G_{j\sigma}(x, y', t).$$

Доказательство: Применяя обратное преобразование Лапласа к соотношению (2.26) при $z = a$, получаем (ср. (3.11))

$$u(x, t) = \sum_{\mu=0}^{M} J_a U_\mu{}^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, (\mathcal{K} h_\mu{}^{(a)})\,(r, t) + u_1(x, t),$$

где

$$h_\mu{}^{(a)}(t) = \int_0^t \big(f(\cdot, \tau), J_a v_\mu{}^*(\cdot, t-\tau)\big)_K\, d\tau + \sum_{j=1}^{bm} \int_0^t \big(g_j(\cdot, \tau), J_a v_{j\mu}^*(\cdot, t-\tau)\big)_{\partial K}\, d\tau.$$

Следовательно,

$$G_\sigma(x, y, t) = \sum_{\mu=0}^{M} J_a U_\mu{}^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, \overline{J_a v_\mu{}^*(y, t)},$$

$$G_{j\sigma}(x, y', t) = \sum_{\mu=0}^{M} J_a U_\mu{}^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, \overline{J_a v_{j\mu}^*(y', t)}.$$

Отсюда вытекают указанные соотношения ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Агранович, М. С., и М. И. Вишик: Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи мат. наук **19** (1964) 3, 53—161.

[2] Козлов, В. А.: Параболические задачи в конусе с сингулярными правыми частями. Ленинград: Лен. гос. унив-т 1986 (рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 6806-В от 23. 09. 1986).

[3] Козлов, В. А., и В. Г. Мазья: Об особенностях решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в областях с коническими точками II. Изв. вузов. Математика (1987) 3, 37—44.

[4] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Тр. Моск-ого мат. об-а **16** (1967), 209—292.

[5] Кондратьев, В. А., и О. А. Олейник: Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях. Успехи мат. наук **38** (1983) 2, 3—77

[6] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций: т. 8). Зап. научн. семинаров ЛОМИ **52** (1975); 110—127.

[7] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками. Math. Nachr. **76** (1977), 29—60.

[8] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. Тр. Моск-ого мат. об-а **37** (1978), 49—93.

[9] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. В кн.: Проблемы мат. анализа, вып. 7 (ред-р: Н. Н. Уральцева). Ленинград: Изд-во Лен. гос. ун-та 1979, стр. 100—145.

[10] Солонников, В. А.: О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова Акад. Наук СССР 83 (1965), 3—162.

[11] Солонников, В. А.: О разрешимости классических начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в двугранном угле (Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций: т. 16). Зап. науч. семинаров ЛОМИ 138 (1984), 146—180.

Manuskripteingang: 19. 01. 1988

VERFASSER:

Д-р Владимир Аркадьевич Козлов
Ленинградский филиал института машиноведения
им. А. А. Благонравова АН СССР
Лаборатория математических моделей механики
Большой проспект 61
СССР-199178 Ленинград, В. О.

Buchbesprechung

W. Hasse: **Optische Beobachtungen in gekrümmten Räumen.** Diplomarbeit. Berlin-West: Inst. Theor. Phys. Techn. Univ. 1987, 131 S., 15 Abb.

Die Diplomarbeit von W. Hasse ist dem Vorhaben gewidmet, auf gekrümmten Lorentz-Mannigfaltigkeiten invariante Ausdrücke für optische Beobachtungsgrößen herzuleiten. Leider erwähnt der Autor zu Beginn der Arbeit nicht ausdrücklich die physikalische Theorie, die Hintergrund und Motivation seiner Betrachtungen bildet — aber doch erst auf Grund physikalischer Annahmen oder einer Theorie zur Lichtausbreitung in gekrümmten Räumen kann man darangehen, optische Beobachtungsgrößen für solche Räume zu untersuchen! Es ist zu vermuten, daß der Autor an die Verbindung von Maxwellscher Theorie des elektromagnetischen Feldes — in der Näherung der geometrischen Optik — und Einsteinscher allgemeiner Relativitätstheorie (im weiteren Sinne, d. h. ohne Festlegung von Ausbreitungsgleichungen für die Metrik der Raum-Zeit) denkt. Das Ziel der Arbeit ist dann wichtig z. B. für die Theorie und Interpretation astronomischer bzw. astrophysikalischer Beobachtungen, faßt man doch die physikalische Raum-Zeit in der allgemeinen Relativitätstheorie, der Einsteinschen Gravitationstheorie von 1915, als vierdimensionale Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit auf, deren Metrik, von Lorentz-Minkowskischer Signatur, mit dem Gravitationspotential identifiziert wird. Gerade in der allgemein-relativistischen Physik, bei gekrümmter Raum-Zeit, tritt die enge wechselseitige Verbindung von physikalischer Theorie und physikalischer Interpretation von Experimenten oder Beobachtungen — mit den daraus erwachsenden begrifflichen Schwierigkeiten — besonders hervor. Definitionen für zu messende physikalische Größen sind so einzuführen, daß sie einerseits eine im Prinzip realisierbare Meßvorschrift implizieren, andererseits dem allgemein-kovarianten Charakter der Theorie Rechnung tragen. Es werden nur gravische Einwirkungen auf das Licht berücksichtigt und die Lichtausbreitung im äußeren