Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (2) 1989, S. 103–120

Ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene

T. MARTIN

Es wird ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene, auf der eine Fuchssche Gruppe erster Art wirkt, betrachtet. Dabei wird das asymptotische Verhalten der Funktion $A(t, z, z')$ für $t \to \infty$ untersucht, die die Anzahl der zu z' äquivalenten Punkte im Kreis um z mit dem Radius t bestimmt. Außer den Hauptgliedern wird eine Abschätzung des Restgliedes nach oben angegeben, wodurch frühere Resultate verschärft werden. Als wichtigstes Instrument dient die Mittelwertmethode, die auf einer Funktionalgleichung zwischen $A(t, z, z')$ und der iterierten Gitterpunktfunktion beruht.

Рассматривается проблема сеток в гиперболической плоскости на которой действует Фуксова группа первого рода. При этом исследуется асимптотическое поведение функции $A(t, z, z')$ при $t \to \infty$ задающей число эквивалентных к z' точек в круге с центром в z и радиусом t. Кроме главных членов дается оценка остаточного члена сверху улучшающая прежние результаты. Главным инструментом служит метод средних базирующийся на функциональном уравнении между $A(t, z, z')$ и итерированной функцией сеток.

A lattice point problem in hyperbolic plane on which acts a Fuchsian group of the first kind is considered. In this connection the asymptotic behaviour at $t \to \infty$ of the function $A(t, z, z')$ giving the number of z'-equivalent points in the circle around z with radius t is investigated. Besides the main terms there is given an estimation of the remaining part improving previous results. As a most important instrument there serves the mean value method based on a functional equation between $A(t, z, z')$ and the iterated lattice point function.

1. Einleitung

In der Poincaré-Halbebene $\mathbf{H}$ bewirkt jedes Element $g \in G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, aufgefaßt als Möbius-Transformation, eine isometrische Abbildung. Sei $\Gamma \subset G$ eine Fuchssche Gruppe erster Art, also eine diskontinuierliche Untergruppe von G mit $\mu(\mathfrak{F}) < \infty$, wobei $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich von Γ und μ das G-invariante Maß von $\mathbf{H}$ ist. $\mathfrak{F}$ besteht aus einem relativ kompakten Teil $\mathfrak{F}_0$ und einer endlichen Anzahl parabolischer Spitzen (cusps) $\mathfrak{F}_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots, n$), die (bez. G) konformäquivalent zum Halbstreifen $F_a = \{(x, y) \in \mathbf{H} \mid -1/2 \leqq x \leqq 1/2, y \geqq a\}$ sind, $a > 0$ geeignet gewählt. Ein Beispiel für Γ ist die Modulgruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ mit nur einer Spitze.

In dieser Arbeit soll nun die Funktion

$$A(t, z, z') = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \varrho(z, \gamma(z')) < t}} 1 \qquad (t \in \mathbf{R};\, z, z' \in \mathbf{H}) \tag{1.1}$$

untersucht werden, wobei ϱ die Abstandsfunktion in $\mathbf{H}$ bezeichnet. Dabei werden sowohl die Hauptglieder der asymptotischen Entwicklung bei $t \to \infty$ als auch Abschätzungen des Restgliedes nach oben angegeben. $A(t, z, z')$ bedeutet geometrisch die Anzahl der zu z' Γ-äquivalenten Punkte innerhalb des Kreises um z mit dem

Radius t, wobei jeder Punkt mit seiner Vielfachheit (als eventueller Fixpunkt von Γ) gezählt wird. Wir bezeichnen deshalb A als *Gitterpunktfunktion.*

Für den Fall einer Gruppe Γ mit relativ kompaktem Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ wurde dieses Problem von zahlreichen Autoren behandelt, z. B. von H. HUBER [3, 4]. Arbeiten über den allgemeineren Fall, daß $\mathfrak{F}$ auch parabolische Spitzen besitzt, sind u. a. bei A. SELBERG [9, 10] und W. ROELCKE [8] zu finden, jedoch wird das Restglied dort nicht so scharf abgeschätzt, wie es uns mit Hilfe einer Funktionalgleichung zwischen A und der iterierten Gitterpunktfunktion gelingt. Damit werden die Ergebnisse von P. GÜNTHER [1, 2] auf den Fall eines nichtkompakten Fundamentalbereichs übertragen.

Wir werden im folgenden das G-invariante Maß μ auch kurz mit dz bezeichnen. Für $z = (x, y) \in \mathbf{H}$ gilt dann $dz = y^{-2}\, dx\, dy$.

2. Sphärischer Mittelwert und iterierte Gitterpunktfunktion

Es sei $K(t, z) = \{z' \in \mathbf{H} \mid \varrho(z, z') < t\}$ das Innere des Kreises um z mit dem Radius t. Der Inhalt von $K(t, z)$ hängt dann nicht von z ab und ist bekanntermaßen gleich $k(t) = 2\pi(\cosh t - 1)$. Wir erklären nun den sphärischen Mittelwertoperator $\mathcal{K}_t$ auf dem Raum $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{H})$ der über $\mathbf{H}$ lokal integrierbaren Funktionen.

Definition 2.1: Sei $t > 0$ und $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{H})$. Dann wird der *sphärische Mittelwertoperator* $\mathcal{K}_t$ gegeben durch

$$(\mathcal{K}_t\varphi)(z) = k^{-1}(t) \int\limits_{K(t,z)} \varphi(z')\, dz' \qquad (z \in \mathbf{H}). \tag{2.1}$$

Unter Benutzung der Heaviside-Funktion $\vartheta = \vartheta(t)$ lassen sich die Definitionen (1.1) und (2.1) umschreiben. Es gelten nämlich offensichtlich die Darstellungen

$$A(t, z, z') = \sum_{\gamma\in\Gamma} \vartheta\big(t - \varrho(z, \gamma(z'))\big) \tag{2.2}$$

und

$$(\mathcal{K}_t\varphi)(z) = k^{-1}(t) \int\limits_{\mathbf{H}} \vartheta\big(t - \varrho(z, z')\big)\, \varphi(z')\, dz'. \tag{2.3}$$

Die Funktion $\mathcal{K}_t\varphi$ ist wiederum lokal integrierbar, so daß sich ein iterierter Mittelwert sinnvoll definieren läßt.

Definition 2.2: Seien $t, s \geqq 0$ und $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbf{H})$. Der *iterierte Mittelwertoperator* $\mathcal{K}_{t,s}^{(2)}$ wird gegeben durch

$$(\mathcal{K}_{t,s}^{(2)}\varphi)(z) = (\mathcal{K}_t\mathcal{K}_s\varphi)(z) \qquad (z \in \mathbf{H}). \tag{2.4}$$

Man erhält jetzt leicht mit (2.3) die Darstellung

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}_{t,s}^{(2)}\varphi)(z) &= k^{-1}(t)\, k^{-1}(s) \int\limits_{\mathbf{H}} \int\limits_{\mathbf{H}} \vartheta\big(t - \varrho(z, z')\big)\, \vartheta\big(s - \varrho(z', z'')\big)\, \varphi(z'')\, dz''\, dz' \\ &= k^{-1}(t)\, k^{-1}(s) \int\limits_{\mathbf{H}} V\big(t, s, \varrho(z, z'')\big)\, \varphi(z'')\, dz''.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Die letzte Zeile ergibt sich durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge, wobei

$$\begin{aligned}V\big(t, s, \varrho(z, z'')\big) &= \int\limits_{\mathbf{H}} \vartheta\big(t - \varrho(z, z')\big)\, \vartheta\big(s - \varrho(z', z'')\big)\, dz' \\ &= \mu\big(K(t, z) \cap K(s, z'')\big)\end{aligned} \tag{2.6}$$

ist. V hängt außer von t und s nur vom Abstand $\varrho(z, z'')$ zwischen z und z'' ab, weil zwei beliebige andere Punkte mit gleichem Abstand durch eine Möbius-Transformation mit reellen Koeffizienten, also ein Element von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ auf z und z'' abgebildet werden können und die Abstandsfunktion ϱ G-invariant ist. Für V ergeben sich aus (2.6) folgende einfache Eigenschaften: Für $t, s, \varrho \geqq 0$ gilt $V(t, s, \cdot) \in C(\mathbf{R}_0^+)$, $V(t, s, \varrho) = V(s, t, \varrho)$ und

$$V(t, s, \varrho) = \begin{cases} k(\max\{t, s\}) & \text{für } 0 \leqq \varrho \leqq |t - s|, \\ 0 & \text{für } \varrho \geqq t + s, \end{cases}$$

sowie $0 \leqq V(t, s, \varrho) \leqq k(\max\{t, s\})$.

Wir bezeichnen mit $F(z)$ die Anzahl der Elemente $\gamma \in \Gamma$, die z als Fixpunkt haben. Aufgrund der Voraussetzungen an Γ gibt es keinen Häufungspunkt von Fixpunkten in $\mathbf{H}$, und es ist $\mu(\{z \in \mathbf{H} \mid F(z) > 1\}) = 0$. Die Funktion $F = F(z)$ ist auf jeder kompakten Teilmenge $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ beschränkt. Im folgenden wollen wir uns nun auf Γ-automorphe Funktionen beschränken und die entsprechenden Funktionenräume über $\Gamma \setminus \mathbf{H}$ betrachten.

Lemma 2.1: *Für $\varphi \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Gamma \setminus \mathbf{H})$ und $t \geqq 0$, $z \in \mathbf{H}$ gilt die Beziehung*

$$\int_{K(t,z)} \varphi(z')\, dz' = \int_{\mathfrak{F}} A(t, z, z')\, \varphi(z')\, dz'. \tag{2.7}$$

Beweis: Nach Voraussetzung existiert das Integral von φ über $K(t, z)$, und es ist

$$\begin{aligned} \int_{K(t,z)} \varphi(z')\, dz' &= \int_{\mathbf{H}} \vartheta\big(t - \varrho(z, z')\big)\, \varphi(z')\, dz' \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathfrak{F}} \vartheta\big(t - \varrho(z, \gamma(z'))\big)\, \varphi(z')\, dz' \\ &= \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\Gamma \in \Gamma} \vartheta\big(t - \varrho(z, \gamma(z'))\big)\, \varphi(z')\, dz'. \end{aligned}$$

Bei dieser Umformung wurden die Automorphie von φ und die Γ-Invarianz des Maßes benutzt. Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist erlaubt, weil der Integrand einen kompakten Träger hat. Dies wiederum folgt aus der Diskontinuität von Γ, denn die Anzahl der Elemente $\gamma \in \Gamma$ mit $\varrho(z, \gamma(z')) < t$ ist endlich und gleichmäßig bez. $z' \in \mathfrak{F}$ beschränkt (vgl. [6: Satz 3.1]). Mit (2.2) ergibt sich die Behauptung ∎

Dieses Lemma zeigt, daß $\mathcal{K}_t$ ein Integraloperator auf $L_1^{\mathrm{loc}}(\Gamma \setminus \mathbf{H})$ mit dem Kern $k^{-1}(t)\, A(t, z, z')$ ist. Außerdem gilt (2.7) speziell für alle $\varphi \in H = L_2(\Gamma \setminus \mathbf{H})$, was unmittelbar aus der Schwarzschen Ungleichung folgt.

Lemma 2.2: *Die Funktion $A = A(t, z, z')$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) *Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt*

$$A(t, z, z') = A\big(t, z, \gamma(z')\big) = A\big(t, \gamma(z), z'\big) = A(t, z', z).$$

(ii) *Sei $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $A(t, \cdot, \cdot)$ beschränkt auf $\mathfrak{K} \times \mathbf{H}$. Weiterhin gilt $A(t, z, \cdot) \in H$, und $A(\cdot, z, z')$ ist monoton wachsend.*

(iii) $\int_{\mathfrak{F}} A(t, z, z')\, dz' = k(t)$.

Beweis: (i) läßt sich sofort aus (2.2) herleiten, z. B. ist

$$A(t, z, \gamma(z')) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} \vartheta\big(t - \varrho(z, \gamma'(\gamma(z')))\big)$$
$$= \sum_{\gamma''=\gamma'\circ\gamma} \vartheta\big(t - \varrho(z, \gamma''(z'))\big) = A(t, z, z').$$

Die Beschränktheit von $A(t, \cdot, \cdot)$ auf $\mathfrak{K} \times \mathbf{H}$ folgt aus der Diskontinuität der Gruppe Γ und aus der Beschränktheit der Funktion F auf $\mathfrak{K}$, ebenso wie die anderen Behauptungen unter (ii). Ist nämlich $t \geqq 0$ fest gewählt, dann ist $\mathfrak{K}' = \cup \{\overline{K(t, z)} \mid z \in \mathfrak{K}\}$ wiederum eine kompakte Teilmenge von $\mathbf{H}$. Wegen card $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{K}' \neq \emptyset\} = m < \infty$ gilt demnach $A(t, z, z') \leqq m \max \{F(w) \mid w \in \mathfrak{K}\}$. Damit ist auch $A(t, z, \cdot)$ beschränkt und deshalb quadratisch integrierbar über $\mathfrak{F}$. Die Monotonie von A bez. t ist sofort aus (1.1) oder (2.1) ersichtlich. (iii) schließlich folgt aus Lemma 2.1 mit $\varphi \equiv 1$ ∎

Definition 2.3: Für $t, s \geqq 0$ und $z, z' \in \mathbf{H}$ sei

$$A^{(2)}(t, s, z, z') = \int_{\mathfrak{F}} A(t, z, z'')\, A(s, z'', z')\, dz''. \tag{2.8}$$

$A^{(2)}$ heißt *iterierte Gitterpunktfunktion.*

Ebenso wie A besitzt auch $A^{(2)}$ eine einfache geometrische Interpretation.

Lemma 2.3: *Es ist für $t, s \geqq 0$ und $z, z' \in \mathbf{H}$*

$$A^{(2)}(t, s, z, z') = \sum_{\gamma \in \Gamma} V\big(t, s, \varrho(z, \gamma(z'))\big). \tag{2.9}$$

Beweis: Zum Beweis ist Lemma 2.1 mit $\varphi(z'') = A(s, z'', z')$ heranzuziehen. Die Behauptung ergibt sich dann mit Hilfe von (2.2) nach Vertauschung von Integration und Summation ∎

Bemerkung: Ebenso wie $k^{-1}(t)\, A(t, z, z')$ der Kern des sphärischen Mittelwertoperators ist, läßt sich der iterierte Mittelwertoperator $\mathcal{K}^{(2)}_{t,s}$ als Integraloperator schreiben, dessen Kern im wesentlichen aus der iterierten Gitterpunktfunktion besteht:

$$(\mathcal{K}^{(2)}_{t,s}\varphi)(z) = k^{-1}(t)\, k^{-1}(s) \int_{\mathfrak{F}} A^{(2)}(t, s, z, z')\, \varphi(z')\, dz'. \tag{2.10}$$

Dazu ist nur das Integral über $\mathbf{H}$ in (2.5) wie beim Beweis von Lemma 2.1 als Summe von Integralen über $\mathfrak{F}$ umzuschreiben. Nach Vertauschung von Summation und Integration folgt (2.10) aus (2.9).

Satz 2.1: *Für $0 \leqq s \leqq t$ und $z, z' \in \mathbf{H}$ gelten die Beziehungen*

$$A^{(2)}(t, s, z, z') = \int_0^{t+s} V(t, s, \varrho)\, dA(\cdot, z, z')(\varrho), \tag{2.11}$$

$$k(s)\, A(t - s, z, z') \leqq A^{(2)}(t, s, z, z') \leqq k(s)\, A(t + s, z, z'). \tag{2.12}$$

Beweis: Die rechte Seite von (2.11) ist als Riemann-Stieltjes-Integral aufzufassen und sinnvoll aufgrund der Monotonie von $A(\cdot, z, z')$ gemäß Lemma 2.2/(ii). In der Tat ist (2.11) nämlich nichts anderes als eine Umformulierung von (2.9). Die Behauptung (2.12) folgt leicht aus (2.11) und den Eigenschaften der Funktion $V(t, s, \cdot)$:

$$A^{(2)}(t, s, z, z') \leqq k(s) \int_0^{t+s} dA(\cdot, z, z')(\varrho) = k(s)\, A(t+s, z, z'),$$

$$A^{(2)}(t, s, z, z') \geqq \int_0^{t-s} V(t, s, \varrho)\, dA(\cdot, z, z')(\varrho) = k(s)\, A(t-s, z, z') \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Aufgrund der Symmetrie der Funktionen $V = V(t, s, \varrho)$ und $A^{(2)} = A^{(2)}(t, s, z, z')$ bez. t und s (vgl. folgendes Lemma) gilt die Darstellung (2.11) auch für $0 \leqq t \leqq s$, also alle $t, s \geqq 0$. Die Abschätzung (2.12) ist für beliebige $t, s \geqq 0$ folgendermaßen zu schreiben:

$$k(u)\, A(|t-s|, z, z') \leqq A^{(2)}(t, s, z, z') \leqq k(u)\, A(t+s, z, z'), \qquad u = \min\{t, s\}.$$

Die Bedeutung von Satz 2.1 liegt im unterschiedlichen Konvergenzverhalten der Fourierentwicklungen von $A(t, \cdot, \cdot)$ und $A^{(2)}(t, s, \cdot, \cdot)$ als Kerne von $\mathcal{K}_t$ und $\mathcal{K}^{(2)}_{t,s}$: Während die Entwicklung der unstetigen Funktion A nur im quadratischen Mittel konvergiert, ist die Konvergenz bei $A^{(2)}$ gleichmäßig bez. z und z' aus einer kompakten Teilmenge von $\mathbf{H}$.

Lemma 2.4: *Die Funktion $A^{(2)}$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(i) *Für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt*

$$A^{(2)}(t, s, z, z') = A^{(2)}(t, s, z, \gamma(z')) = A^{(2)}(t, s, \gamma(z), z') = A^{(2)}(s, t, z', z).$$

(ii) *$A^{(2)}$ ist symmetrisch in den ersten beiden und letzten beiden Variablen, d. h., es ist*

$$A^{(2)}(s, t, z, z') = A^{(2)}(t, s, z, z') = A^{(2)}(t, s, z', z).$$

(iii) *$A^{(2)}(t, s, \cdot, \cdot)$ ist stetig in $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$, und es gilt $A^{(2)}(t, s, z, \cdot) \in H$.*

Beweis: (i) folgt sofort aus Lemma 2.2/(i) und Definition 2.3. Für den Beweis von (ii) benutzt man am besten die Darstellung (2.11) und die Symmetrie von V in den ersten beiden Variablen. Die Stetigkeit von $A^{(2)}(t, s, \cdot, \cdot)$ kann man aus (2.9) ablesen (endliche Summe), und $A^{(2)}(t, s, z, \cdot) \in H$ folgt schließlich aus (2.12) und (ii) $\blacksquare$

3. Fourierentwicklungen der Kerne

Wir werden uns nun mit der Spektraltheorie des Laplace-Beltrami-Operators $\mathcal{L}$ von $\mathbf{H}$ befassen. Bekanntermaßen ist für $z = (x, y) \in \mathbf{H}$

$$\mathcal{L} = -y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$$

symmetrisch und wesentlich selbstadjungiert. Den selbstadjungierten Abschluß von $\mathcal{L}$ wollen wir mit $\mathcal{A}$ bezeichnen. Das diskrete Spektrum von $\mathcal{A}$ besteht aus einer monoton wachsenden Folge $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ reeller nichtnegativer Eigenwerte λ_i, die sich im Endlichen nicht häufen. $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ sei ein Orthonormalsystem reeller Eigenfunktionen, so daß für alle $i \geqq 0$ gilt $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{J})\, \varphi_i = 0$. Nach einem Satz von Maas sind diese Eigenfunktionen glatt, also ist

$$\mathcal{L}\varphi_i = \lambda_i \varphi_i. \tag{3.1}$$

Besitzt Γ einen relativ kompakten Fundamentalbereich, so ist das Spektrum Λ von $\mathcal{A}$ rein diskret, wie aus der Theorie der kompakten Riemannschen Flächen folgt. Dann ist also $\Lambda = \Lambda_d = \{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, und $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in H (vgl. in diesem Fall [2]). Im allgemeineren Fall $\mu(\mathfrak{F}) < \infty$, $\mathfrak{F}$ nicht notwendig kompakt, besitzt der Laplace-Operator auf $\mathbf{H}$ jedoch zusätzlich ein stetiges Spektrum Λ_c, das mit dem halboffenen Intervall $[1/4, \infty)$ übereinstimmt und die Vielfachheit n (Anzahl der parabolischen Spitzen) besitzt. Die zugehörigen verallgemeinerten Eigenfunktionen werden durch die Eisenstein-Funktionen $\eta_\beta = \eta_\beta(z, s)$ ($z \in \mathbf{H}$; $s \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$; $\beta = 1, \ldots, n$) gegeben (vgl. dazu z. B. [5]).

Definition 3.1: Sei $B(\mathfrak{F})$ der Raum der beschränkten meßbaren Funktionen über $\mathfrak{F}$ und $H_0 = \times_{\beta=1}^{n} L_2(\mathbf{R}_0^+, dt/2\pi)$. Dann heißt die lineare Abbildung E_β: $B(\mathfrak{F}) \to H_0$ mit

$$(E_\beta f)(\varrho) = \int_{\mathfrak{F}} \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) f(z)\, dz \qquad (f \in B(F), \varrho \geqq 0) \tag{3.2}$$

Eisenstein-Transformation zur Spitze β.

Zusammen mit den (gewöhnlichen) Eigenfunktionen φ_i bilden die E_β ein vollständiges System von Eigenfunktionen.

Lemma 3.1 (Mittelwertsatz für Eigenfunktionen des Laplace-Operators): *Für alle $z \in \mathbf{H}$ und $t \geqq 0$ gelten die Beziehungen*

$$v_i(t)\, \varphi_i(z) = (\mathcal{K}_t \varphi_i)(z) \qquad (i = 0, 1, \ldots), \tag{3.3}$$

$$v(t, \varrho) \cdot \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) = \left(\mathcal{K}_t \eta_\beta\left(\cdot, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right)(z) \qquad (\beta = 1, \ldots, n; \varrho \geqq 0), \tag{3.4}$$

wobei die Funktionen v_i und $v(\cdot, \varrho)$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$v'' + \frac{\cosh t + 2}{\sinh t} v' + \lambda v = 0, \qquad v(0) = 1, \qquad v'(0) = 0 \tag{3.5}$$

sind. Dabei ist für v_i der Parameter $\lambda = \lambda_i$, und für $v(\cdot, \varrho)$ gilt $\lambda = 1/4 + \varrho^2$.

Beweis: Aufgrund der Tatsache, daß $\mathbf{H}$ eine vollständig harmonische Riemannsche Mannigfaltigkeit darstellt, erfüllt der sphärische Mittelwert einer glatten Funktion φ eine Darbouxsche Differentialgleichung. Es gilt nämlich für alle $z \in \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} &\{\partial^2/\partial t^2 + (\cosh t + 2) \sinh^{-1} t\, \partial/\partial t + \mathcal{L}\}\, (\mathcal{K}_t \varphi)(z) = 0, \\ &(\mathcal{K}_0 \varphi)(z) = \varphi(z), \quad \partial/\partial t\, (\mathcal{K}_t \varphi)(z)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Da das Anfangswertproblem (3.5) eindeutig lösbar ist, genügt es zu zeigen, daß $v_i(t)\, \varphi_i(z)$ bzw. $v(t, \varrho)\, \eta_\beta(z, 1/2 + i\varrho)$ ebenfalls Lösungen von (3.6) sind. Das folgt aber aus (3.5), (3.1) sowie der Eigenschaft $\mathcal{L}\eta_\beta(\cdot, s) = s(1 - s)\, \eta_\beta(\cdot, s)$ für die Eisensteinfunktionen ∎

Definition 3.1: Die Funktionen v_i ($i = 0, 1, \ldots$) und $v(\cdot, \varrho)$ ($\varrho \geqq 0$) heißen *Eigenwertfunktionen* zum Eigenwert λ_i bzw. zu $\lambda = 1/4 + \varrho^2$.

Da φ_i ebenso wie $\eta_\beta(\cdot, s)$ automorphe Funktionen auf $\mathbf{H}$ sind, kann man (3.3), (3.4) folgendermaßen umschreiben:

$$k(t)\, v_i(t)\, \varphi_i(z) = \int_{\mathfrak{F}} A(t, z, z')\, \varphi_i(z')\, dz', \tag{3.7}$$

$$k(t)\, v(t, \varrho)\, \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) = \int_{\mathfrak{F}} A(t, z, z')\, \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} + i\varrho\right) dz'. \tag{3.8}$$

Damit genügen sowohl φ_i als auch $\eta_\beta(\cdot, 1/2 + i\varrho)$ der Eigenwertgleichung für den durch den Kern $k^{-1}(t)\, A(t, z, z')$ gegebenen Mittelwertoperator $\mathcal{K}_t$ zum Eigenwert $v_i(t)$ bzw. $v(t, \varrho)$. Es sind φ_i gewöhnliche Eigenfunktionen von $\mathcal{K}_t$, während die Eisenstein-Transformationen E_β die verallgemeinerten Eigenfunktionen von $\mathcal{K}_t$ darstellen, denn für $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma \setminus \mathbf{H})$, $\varrho \geqq 0$ gilt

$$(E_\beta \mathcal{K}_t \varphi)(\varrho) = k^{-1}(t) \int\limits_{\mathfrak{F}} \int\limits_{\mathfrak{F}} \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) A(t, z, z')\, \varphi(z')\, dz'\, dz$$

$$= k^{-1}(t) \int\limits_{\mathfrak{F}} \varphi(z') \int\limits_{\mathfrak{F}} A(t, z, z')\, \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) dz\, dz'$$

$$= v(t, \varrho) \int\limits_{\mathfrak{F}} \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} + i\varrho\right) \varphi(z')\, dz' = v(t, \varrho)\, (E_\beta \varphi)(\varrho).$$

Aufgrund der Vollständigkeit stimmen also die (gewöhnlichen und verallgemeinerten) Eigenfunktionen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{K}_t$ überein, wobei sich die Spektren folgendermaßen transformieren:

$$\Lambda_d(\mathcal{A}) \ni \lambda_i \to v_i(t) \in \Lambda_d(\mathcal{K}_t), \qquad \Lambda_c(\mathcal{A}) \ni \lambda \to v(t, \varrho) \in \Lambda_c(\mathcal{K}_t).$$

Satz 3.1: *Sei $t, s \geqq 0$ und $z, z' \in \mathbf{H}$. Dann gelten die Fourierentwicklungen*

$$A(t, z, z') = k(t) \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t)\, \varphi_i(z)\, \varphi_i(z')$$

$$+ \frac{k(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int\limits_0^\infty v(t, \varrho)\, \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho, \tag{3.9}$$

$$A^{(2)}(t, s, z, z') = k(t)\, k(s) \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t)\, v_i(s)\, \varphi_i(z)\, \varphi_i(z')$$

$$+ \frac{k(t)\, k(s)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int\limits_0^\infty v(t, \varrho)\, v(s, \varrho)\, \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho. \tag{3.10}$$

Dabei ist die Konvergenz der Reihe und des Integrals in (3.9) *für festes $z \in \mathbf{H}$ im schwachen Sinn bez. z' zu verstehen, während die rechte Seite von* (3.10) *gleichmäßig bez. z und z' aus einer kompakten Teilmenge $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ konvergiert.*

Beweis: Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wollen wir das Skalarprodukt in H bezeichnen. Aufgrund der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen gilt dann für alle $f, g \in B(\mathfrak{F}) \subset H$ die Darstellung

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \langle \varphi_i, g \rangle + \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int\limits_0^\infty (E_\beta f)(\varrho)\, \overline{(E_\beta g)(\varrho)}\, d\varrho. \tag{3.11}$$

Sei $N \in \mathbf{N}$. Wir halten $t > 0$ und $z \in \mathbf{H}$ fest und setzen $f = A(t, z, \cdot)$. Diese Funktion liegt in $B(\mathfrak{F})$ wegen Lemma 2.2. Dann ist $k(t)\, (\mathcal{K}_t \bar{g})(z) = \langle A(t, z, \cdot), g \rangle$, und deshalb konvergiert

$$k(t)\,(\mathcal{K}_t\bar{g})\,(z) - \sum_{i=0}^{N} \langle A(t, z, \cdot), \varphi_i\rangle \langle \varphi_i, g\rangle$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^N \big(E_\beta A(t, z, \cdot)\big)\,(\varrho)\,\overline{(E_\beta g)\,(\varrho)}\,d\varrho$$

aufgrund von (3.11) für $N \to \infty$ gegen Null. Andererseits ist

$$\int_{\mathfrak{F}} A(t, z, z')\,\overline{g(z')}\,dz' - \sum_{i=0}^{N} \langle A(t, z, \cdot), \varphi_i\rangle \int_{\mathfrak{F}} \varphi_i(z')\,\overline{g(z')}\,dz'$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^N \big(E_\beta A(t, z, \cdot)\big)\,(\varrho) \int_{\mathfrak{F}} \overline{\eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} + i\varrho\right) g(z')}\,dz'\,d\varrho$$

$$= \int_{\mathfrak{F}} \Bigg\{ A(t, z, z') - \sum_{i=0}^{N} \langle A(t, z, \cdot), \varphi_i\rangle\,\varphi_i(z')$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^N \big(E_\beta A(t, z, \cdot)\big)\,(\varrho)\,\eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho \Bigg\}\,\overline{g(z')}\,dz'$$

$$= \int_{\mathfrak{F}} \Bigg\{ A(t, z, z') - k(t) \sum_{i=0}^{N} v_i(t)\,\varphi_i(z)\,\varphi_i(z')$$

$$- \frac{k(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^N v(t, \varrho)\,\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho \Bigg\}\,\overline{g(z')}\,dz'$$

wegen (3.7), (3.8). Benutzt wurde auch die Eigenschaft $\overline{\eta_\beta(z, s)} = \eta_\beta(z, \bar{s})$ für $z \in \mathbf{H}$, $s \in \mathbf{C}$, $\beta = 1, \ldots, n$. Damit ist (3.9) im schwachen Sinn bewiesen. Ersetzt man hingegen die Funktion f in (3.11) durch $A^{(2)}(t, s, z, \cdot)$ bei festen $t, s > 0$ und $z \in \mathbf{H}$, so erhält man ganz analog, daß

$$\int_{\mathfrak{F}} \Bigg\{ A^{(2)}(t, s, z, z') - \sum_{i=0}^{N} \langle A^{(2)}(t, s, z, \cdot), \varphi_i\rangle\,\varphi_i(z')$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^N \big(E_\beta A^{(2)}(t, s, z, \cdot)\big)\,(\varrho)\,\eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho \Bigg\}\,\overline{g(z')}\,dz'$$

für $N \to \infty$ gegen Null konvergiert. Mit Hilfe von (3.7), (3.8) erhält man leicht die Darstellungen

$$\langle A^{(2)}(t, s, z, \cdot), \varphi_i\rangle = k(t)\,k(s)\,v_i(t)\,v_i(s)\,\varphi_i(z),$$

$$\big(E_\beta A^{(2)}(t, s, z, \cdot)\big)\,(\varrho) = k(t)\,k(s)\,v(t, \varrho)\,v(s, \varrho)\,\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right),$$

woraus (3.10) zunächst ebenfalls im schwachen Sinn folgt. Beim Beweis der Gleichmäßigkeit der Konvergenz gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst ist der Operator $\mathcal{K}_{t,t}^{(2)}$ positiv, denn es gilt für $t, s > 0$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma \setminus \mathbf{H})$ die Gleichheit $\langle \mathcal{K}_{t,s}^{(2)}\varphi, \varphi\rangle = \langle \mathcal{K}_s\varphi, \mathcal{K}_t\varphi\rangle$, und dieser Ausdruck ist nichtnegativ reell für $t = s$. Nach dem Satz von Mercer konvergiert die Fourierentwicklung eines stetigen Kerns, der einen positiven Operator erzeugt, gleichmäßig, wenn beide Variable in einer kompakten Teilmenge variieren. Demnach konvergieren Reihe und Integral in (3.10) für $t = s$ gleichmäßig bez. $z, z' \in \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ kompakt. Speziell konvergiert

$$k^2(t) \sum_{i=0}^{\infty} v_i^2(t)\, \varphi_i^2(z) + \frac{k^2(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^\infty v^2(t, \varrho) \left| \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho$$

gleichmäßig bez. $z \in \mathfrak{K}$ gegen $A^{(2)}(t, t, z, z)$. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert dann die Behauptung ∎

4. Abschätzungen für die Eigenwertfunktionen

Wir werden nun die Funktionen v_i und $v(\cdot, \varrho)$ näher untersuchen, insbesondere ihr asymptotisches Verhalten bei $t \to \infty$. Zunächst wollen wir $\lambda = \lambda_i$ bzw. $\lambda = 1/4 + \varrho^2$ festhalten und zur Abkürzung $v = v(t)$ schreiben.

Lemma 4.1: *$u = u(t)$ sei Lösung des Anfangswertproblems*

$$u'' + \coth t \cdot u' + \lambda u = 0, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0. \tag{4.1}$$

Dann gilt die Beziehung

$$k(t)\, v(t) = \int_0^t k'(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \tag{4.2}$$

wobei v durch das Anfangswertproblem (3.5) *festgelegt ist.*

Beweis: Falls $\lambda = 0$ ist, sind $u \equiv 1$ und $v \equiv 1$ die (eindeutig bestimmten) Lösungen von (4.1) und (3.5), und (4.2) gilt trivialerweise. Sei also $\lambda > 0$. Es ist zu zeigen, daß die durch (4.2) für $t > 0$ erklärte Funktion v (3.5) erfüllt. Die Behauptung folgt dann aus der Eindeutigkeit der Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $t > 0$. Aus (4.1) folgt wegen $k(t) = 2\pi(\cosh t - 1)$ die Gleichung $k'u'' + k''u' + \lambda k'u = (k'u')' + \lambda k'u = 0$, also $\lambda k'u = -(k'u')'$. Unter Benutzung von (4.2) folgt daraus $\lambda k v = -k'u'$, d. h. $v = (-k'/\lambda k)\, u'$. Nun ist leicht nachzurechnen, daß v die Differentialgleichung in (3.5) erfüllt. Die Anfangsbedingungen ergeben sich durch Anwendung der L'Hospitalschen Regel ∎

Bemerkung: Die Lösung des einfacheren Anfangswertproblems (4.1) ist bekannt (vgl. z. B. [6: Lemma 4.2]), es gilt nämlich

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\cos \varrho\tau}{\sqrt{2\cosh t - 2\cosh \tau}}\, d\tau \qquad (t > 0).$$

Mit Hilfe von (4.2) läßt sich deshalb nun v in expliziter Form angeben, es gilt

$$k(t)\, v(t) = 4 \int_0^t \cos \varrho\tau \sqrt{2\cosh t - 2\cosh \tau}\, d\tau \qquad (t \geqq 0). \tag{4.3}$$

Aus (4.3) erkennt man schon, daß $v = v(t)$ ein unterschiedliches Verhalten aufweist, je nachdem, ob $0 < \lambda < 1/4$, d. h. ϱ rein imaginär, oder $\lambda = 1/4$, d. h. $\varrho = 0$, oder $\lambda > 1/4$, d. h. $\varrho > 0$ ist. Im ersten Fall ist auch die Substitution $\lambda = s(1-s)$, $1/2 < s < 1$, zweckmäßig.

Satz 4.1: *Sei $v = v(t)$ die Lösung des Anfangswertproblems* (3.5). *Dann gelten für $t \to \infty$ die folgenden Aussagen:*

(i) *Im Falle $0 < \lambda < 1/4$, d. h. $1/2 < s < 1$, ist*

$$k(t)\, v(t) = \sqrt{\pi}\, \frac{2^s \Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s+1)} \cosh^s t + O(\cosh^{1-s} t). \tag{4.4}$$

(ii) *Im Falle $\lambda = 1/4$, d. h. $\varrho = 0$, ist*

$$k(t)\, v(t) = 4\sqrt{2} \cosh^{1/2} t \cdot \big(t + O(1)\big). \tag{4.5}$$

(iii) *Im Falle $\lambda > 1/4$, d. h. $\varrho > 0$, ist*

$$\begin{aligned} k^{1/2}(t)\, v(t) = {} & \frac{2^{i\varrho}\Gamma(i\varrho)}{\Gamma(1/2 + i\varrho)} \cosh^{i\varrho} t \\ & + \frac{2^{-i\varrho}\Gamma(-i\varrho)}{\Gamma(1/2 - i\varrho)} \cosh^{-i\varrho} t + O(\cosh^{-2} t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Beweis: Zuerst behandeln wir das Verhalten der Hilfsfunktion u und schließen danach mit Hilfe von (4.2) auf v. In der Differentialgleichung (4.1) substituieren wir dazu $\xi = \cosh^2 t$ und setzen $\tilde u(\xi) = u(t)$. Dann erfüllt $\tilde u$ die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\xi(\xi - 1)\, \tilde u'' + \left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\right) \tilde u' + \frac{\lambda}{4} \tilde u = 0.$$

Die Bedingung $u(0) = 1$ transformiert sich zu $\tilde u(1) = 1$, also muß für $\tilde u$ die für $1 \leqq \xi < \infty$ definierte und bei $\xi = 1$ reguläre Lösung

$$\tilde u(\xi) = \xi^{-a} F\left(a, b, c, \frac{\xi - 1}{\xi}\right)$$

$$\text{mit } a = \frac{1}{4}\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right) = \frac{1-s}{2}, \quad b = a + \frac{1}{2} = 1 - \frac{s}{2}, \quad c = 1$$

genommen werden. Unter Benutzung der bekannten Umformungen für hypergeometrische Funktionen folgt daraus

$$\begin{aligned} \tilde u(\xi) = {} & \xi^{\frac{s-1}{2}} \frac{\Gamma(s - 1/2)}{\Gamma(s/2 + 1/2)\, \Gamma(s/2)} F\left(\frac{1-s}{2}, 1 - \frac{s}{2}, \frac{3}{2} - s, \frac{1}{\xi}\right) \\ & + \xi^{-s/2} \frac{\Gamma(1/2 - s)}{\Gamma(1/2 - s/2)\, \Gamma(1 - s/2)} F\left(\frac{1+s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{1}{\xi}\right) \\ = {} & \xi^{\frac{s-1}{2}} \frac{2^{s-1}\Gamma(s - 1/2)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(s)} F\left(\frac{1-s}{2}, 1 - \frac{s}{2}, \frac{3}{2} - s, \frac{1}{\xi}\right) \\ & + \xi^{-s/2} \frac{2^{-s}\Gamma(1/2 - s)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(1 - s)} F\left(\frac{1+s}{2}, \frac{s}{2}, \frac{1}{2} + s, \frac{1}{\xi}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Für festes λ, also festes s verhalten sich die beiden auftretenden hypergeometrischen Funktionen bei $\xi \to \infty$ wie $1 + O(\xi^{-1})$.

(i) Sei nun $0 < \lambda < 1/4$, d. h. $s \in \mathbf{R}$, $1/2 < s < 1$. Kehren wir zur Variablen t zurück, so ergibt sich

$$u(t) = \frac{2^{s-1}\,\Gamma(s-1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)} \cosh^{s-1} t + O(\cosh^{-s} t),$$

und mit (4.2) folgt die Abschätzung (4.4).

(ii) Für $\lambda = 1/4$, also $s = 1/2$ ist (4.7) folgendermaßen zu modifizieren. Sei zunächst $s \neq 1/2$. Die Funktionalgleichung der Gammafunktion liefert dann

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{s-1/2}\left\{\frac{2^{s-1}\,\Gamma(s+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}\,\xi^{\frac{s-1}{2}} - \frac{2^{-s}\Gamma(3/2-s)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-s)}\,\xi^{-\frac{s}{2}}\right\} + O\left(\xi^{\frac{|s-3|}{2}}\right).$$

Der erste Summand strebt bei $s \to 1/2$ gegen $\sqrt{2}\,\pi^{-1}\xi^{1/4}\left(\ln \xi^{1/2} + O(1)\right)$, also gilt $u(t) = \sqrt{2}\,\pi^{-1} \cosh^{1/2} t\left(\ln \cosh t + O(1)\right)$, und die Behauptung folgt auch in diesem Fall wieder aus (4.2).

(iii) Für $\lambda > 1/4$ ist s nicht mehr reell, sondern es gilt $s = 1/2 + i\varrho$; ϱ kann positiv gewählt werden. Benutzen wir diese Substitution in (4.7) und gehen wieder zur Variablen t über, so folgt

$$\begin{aligned} u(t) = {} & \frac{2^{-1/2+i\varrho}\Gamma(i\varrho)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2+i\varrho)} \cosh^{-1/2+i\varrho} t \\ & + \frac{2^{-1/2-i\varrho}\Gamma(-i\varrho)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-i\varrho)} \cosh^{-1/2-i\varrho} t + O(\cosh^{-5/2} t). \end{aligned}$$

Wegen $k^{1/2}(t) = \sqrt{2\pi}\,(\cosh t - 1)^{1/2} = \sqrt{2\pi} \cosh^{1/2} t + O(\cosh^{-1/2} t)$ ist

$$k^{-1/2}(t)\,(\cosh^{1/2\pm i\varrho} t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cosh^{\pm i\varrho} t + O(\cosh^{-1/2} t),$$

$$k^{-1/2}(t)\,(\cosh^{-3/2} t - 1) = O(\cosh^{-2} t).$$

Mit diesen Abschätzungen ergibt sich schließlich auch (4.6) aus (4.2) ∎

Die Aussagen des Satzes 4.1 beziehen sich auf feste Werte $\lambda > 0$. Für $\lambda > 1/4$ werden außerdem bez. λ gleichmäßige Abschätzungen benötigt. Wir wollen bei v wieder die Abhängigkeit von λ kennzeichnen und schreiben $v = v(t, \varrho)$. Zunächst erhält man aus (4.3) sofort mittels partieller Integration

$$k(t)\,v(t,\varrho) = \frac{4}{\varrho}\int_0^t \frac{\sinh \tau}{\sqrt{2\cosh t - 2\cosh \tau}} \sin \varrho\tau \, d\tau$$

und daraus die Abschätzung $k(t)\,|v(t,\varrho)| \leqq (4/\varrho)\sqrt{2\cosh t - 2}$, also

$$|v(t,\varrho)| \leqq C_1(\cosh t - 1)^{-1/2}\,\varrho^{-1} \qquad (t \geqq 0,\ \varrho > 0), \tag{4.8}$$

wobei C_1 unabhängig von t und ϱ ist. Eine weitere triviale Abschätzung erhält man, wenn der Integrand in (4.3) durch $\sqrt{2\cosh t}$ ersetzt wird:

$$k(t)\,|v(t,\varrho)| \leqq C_2 t \cosh^{1/2} t \qquad (t \geqq 0,\ \varrho \geqq 0). \tag{4.9}$$

Die Abschätzungen (4.8) und (4.9) sind jedoch für große ϱ nicht scharf genug, so daß noch ein allgemeinerer Satz Anwendung findet (vgl. etwa [2: Satz 2.2]). Danach ergibt sich für die Lösung $v(t, \varrho)$ von (3.5) folgendes ($C > 0$ konstant):

$$\text{(i) } |v(t, \varrho)| \leqq 1 \qquad (t \geqq 0, \lambda > 0). \tag{4.10}$$

$$\text{(ii) } |v(t, \varrho)| \leqq C \sinh^{1/2} t (\cosh t - 1)\, \varrho^{-3/2} \qquad (t > 0, \varrho > 0) \tag{4.11}$$

$$\text{(iii) } v(t, \varrho) \geqq 1/2 \qquad (0 \leqq t \leqq t_1 \varrho^{-1}, \varrho > 0) \text{ für ein } t_1 \in (0, 1]. \tag{4.12}$$

Die Abschätzungen (ii) und (iii) seien hier ohne Beweis angegeben, (i) ist leicht einzusehen, wenn die Differentialgleichung in (3.5) mit v' multipliziert und integriert wird. Dabei ist lediglich von Bedeutung, daß der Koeffizient vor der ersten Ableitung für $t > 0$ positiv ist. Dies trifft aber auch für die Funktion $u = u(t)$ und die Differentialgleichung in (4.1) zu, so daß ebenfalls (bei $\lambda > 0$) gilt

$$|u(t)| \leqq 1 \qquad (t \geqq 0). \tag{4.13}$$

5. Das asymptotische Verhalten der Reihe bzw. des Integrals der Eigenfunktionen

Nach den Betrachtungen über die Eigenwertfunktionen wenden wir uns nun dem Verhalten der Reihe der gewöhnlichen bzw. des Integrals über die Kerne der verallgemeinerten Eigenfunktionen zu.

Satz 5.1: *Sei $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ eine kompakte Teilmenge. Für $\xi \to \infty$ gilt gleichmäßig bez. $z \in \mathfrak{K}$ die Abschätzung*

$$\sum_{0 \leqq \lambda_i \leqq \xi} \varphi_i^2(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^{\sqrt{\xi - 1/4}} \left| \eta_\beta \left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho = O(\xi). \tag{5.1}$$

Beweis: Sei $t_1 \in (0, 1]$ jene Zahl, für die (4.12) richtig ist. Wegen (2.12) und Lemma 2.2/(ii) gelten für $0 \leqq t \leqq t_1 \varrho^{-1}$ und $z \in \mathfrak{K}$ die Ungleichungen

$$A^{(2)}(t, t, z, z) \leqq k(t)\, A(2t, z, z) \leqq k(t)\, A(2t_1, z, z) \leqq C_1 k(t)$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(\mathfrak{K})$, die nicht von z abhängt. Nach Satz 3.1 erhalten wir andererseits

$$A^{(2)}(t, t, z, z) = k^2(t) \sum_{i=0}^{\infty} v_i^2(t)\, \varphi_i^2(z)$$
$$+ \frac{k^2(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^{\infty} v^2(t, \varrho) \left|\eta_\beta \left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho.$$

Sei $\varkappa \in (0, 1]$ gegeben und $\xi > 1/4 + \varkappa^2$. Wir setzen $t(\xi) = \varkappa t_1 (\xi - 1/4)^{-1/2}$. Dann ist auf jeden Fall $t(\xi) \leqq t_1$, also

$$\sum_{1/4 < \lambda_i \leqq \xi} v_i^2\big(t(\xi)\big)\, \varphi_i^2(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^{\sqrt{\xi - 1/4}} v^2\big(t(\xi), \varrho\big) \left|\eta_\beta \left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho$$
$$\leqq C_1 k^{-1}\big(t(\xi)\big). \tag{5.2}$$

Für $1/4 \leqq \lambda \leqq \xi$ ist aber $(\xi - 1/4)^{1/2}\, t(\xi) \leqq t_1$, d. h., aufgrund von (4.12) gilt

$$v_i\big(t(\xi)\big) \geqq 1/2 \qquad \text{für} \quad 1/4 < \lambda_i \leqq \xi,$$
$$v\big(t(\xi), \varrho\big) \geqq 1/2 \qquad \text{für} \quad 0 < \varrho \leqq (\xi - 1/4)^{1/2}.$$

Deshalb folgt nun aus (5.2) die Abschätzung

$$\sum_{1/4<\lambda_i\leqq\xi}\varphi_i^2(z)+\frac{1}{2\pi}\sum_{\beta=1}^{n}\int\limits_0^{\sqrt{\xi-1/4}}\left|\eta_\beta\left(z,\frac{1}{2}+i\varrho\right)\right|^2 d\varrho\leqq 4C_1k^{-1}\big(t(\xi)\big).$$

Offensichtlich ist $k(t)\geqq\pi t^2$ und deshalb

$$k^{-1}\big(t(\xi)\big)\leqq\pi^{-1}t^{-2}(\xi)=(\xi-1/4)\,\pi^{-1}t_1^{-2}\varkappa^{-2}\leqq\xi\pi^{-1}t_1^{-2}\varkappa^{-2},$$

so daß die linke Seite von (5.1) nicht größer ist als

$$\Big(4C_1\pi^{-1}t_1^{-2}\varkappa^{-2}+(\varkappa^2+1/4)^{-1}\sum_{0\leqq\lambda_i\leqq1/4}\varphi_i^2(z)\Big)\,\xi.$$

Die φ_i sind als analytische Funktionen auf $\mathfrak{K}$ beschränkt, und die auftretende Summe ist endlich, also der Koeffizient vor ξ beschränkt. Damit ist der Satz gezeigt ∎

Folgerung: *Sei $\mathfrak{K}\subset\mathbf{H}$ eine kompakte Teilmenge. Dann gelten für $\xi\to\infty$ gleichmäßig bez. $z\in\mathfrak{K}$ die folgenden Abschätzungen:*

(i) *für* $\alpha<1$

$$\sum_{0<\lambda_i<\xi}\frac{\varphi_i^2(z)}{\lambda_i^\alpha}+\frac{1}{2\pi}\sum_{\beta=1}^{n}\int\limits_0^{\sqrt{\xi-1/4}}\left|\eta_\beta\left(z,\frac{1}{2}+i\varrho\right)\right|^2\frac{d\varrho}{(1/4+\varrho^2)^\alpha}=O(\xi^{1-\alpha}),\qquad(5.3)$$

(ii)

$$\sum_{0<\lambda_i<\xi}\frac{\varphi_i^2(z)}{\lambda_i}+\frac{1}{2\pi}\sum_{\beta=1}^{n}\int\limits_0^{\sqrt{\xi-1/4}}\left|\eta_\beta\left(z,\frac{1}{2}+i\varrho\right)\right|^2\frac{d\varrho}{1/4+\varrho^2}=O(\ln\xi),\qquad(5.4)$$

(iii) für $\alpha>1$

$$\sum_{\xi\leqq\lambda_i}\frac{\varphi_i^2(z)}{\lambda_i^\alpha}+\frac{1}{2\pi}\sum_{\beta=1}^{n}\int\limits_{\sqrt{\xi-1/4}}^{\infty}\left|\eta_\beta\left(z,\frac{1}{2}+i\varrho\right)\right|^2\frac{d\varrho}{(1/4+\varrho^2)^\alpha}=O(\xi^{1-\alpha}).\qquad(5.5)$$

Der Beweis ist in bekannter Art und Weise mittels partieller Integration zu führen ∎

6. O-Abschätzungen für den Gitterrest

Es sei für $t,s\geqq0$ und $z,z'\in\mathbf{H}$

$$T(t,z,z')=k(t)\sum_{0<\lambda_i\leqq1/4}v_i(t)\,\varphi_i(z)\,\varphi_i(z'),\qquad(6.1)$$

$$T^{(2)}(t,s,z,z')=k(t)\,k(s)\sum_{0<\lambda_i\leqq1/4}v_i(t)\,v_i(s)\,\varphi_i(z)\,\varphi_i(z').\qquad(6.2)$$

Wir bemerken, daß die auftretenden Summen endlich sind. Die zum Eigenwert $\lambda_0=0$ gehörige Eigenfunktion φ_0 ist konstant, wegen $\|\varphi_0\|=1$ ist $\varphi_0(z)=\big(\mu(\mathfrak{F})\big)^{-1/2}$. Die Eigenwertfunktion v_0 ist identisch gleich 1. Wir definieren nun die Funktionen $P=P(t,z,z')$ und $P^{(2)}=P^{(2)}(t,s,z,z')$ durch

$$A(t,z,z')=k(t)\,\big(\mu(\mathfrak{F})\big)^{-1}+T(t,z,z')+P(t,z,z'),\qquad(6.3)$$

$$A^{(2)}(t,s,z,z')=k(t)\,k(s)\,\big(\mu(\mathfrak{F})\big)^{-1}+T^{(2)}(t,s,z,z')+P^{(2)}(t,s,z,z').\qquad(6.4)$$

Daß diese Aufspaltung sinnvoll ist, ergibt sich aus dem unterschiedlichen asymptotischen Verhalten der Eigenwertfunktionen v_i bzw. $v(\cdot, \varrho)$ in den Fällen $0 < \lambda < 1/4$, $\lambda = 1/4$ und $\lambda > 1/4$ (vgl. Satz 4.1).

Definition 6.1: P heißt *Gitterrest* und $P^{(2)}$ *iterierter Gitterrest.*

Satz 6.1: *Sei $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ eine kompakte Teilmenge. Für $t \to \infty$ gilt gleichmäßig bez. $z, z' \in \mathfrak{K}$ die Abschätzung*

$$P^{(2)}(t, t, z, z') = O(\cosh^{1+\delta} t), \tag{6.5}$$

wobei $\delta > 0$ beliebig gewählt werden kann.

Beweis: Aus der Fourierentwicklung (3.10) der iterierten Gitterpunktfunktion und (6.2), (6.4) ergibt sich sofort die Abschätzung

$$\begin{aligned}|P^{(2)}(t, t, z, z')| &\leqq k^2(t) \sum_{\lambda_i > 1/4} v_i^2(t)\, |\varphi_i(z)\, \varphi_i(z')| \\ &\quad + \frac{k^2(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^\infty v^2(t, \varrho) \left| \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right)\right| d\varrho \\ &\leqq k^2(t) \sum_{\lambda_i > 1/4} v_i^2(t)\, \{\varphi_i^2(z) + \varphi_i^2(z')\} \\ &\quad + \frac{k^2(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^\infty v^2(t, \varrho) \left\{\left|\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 + \left|\eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2\right\} d\varrho\,.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Sei nun $\varkappa > 0$ so klein gewählt, daß das Intervall $(1/4, 1/4 + \varkappa^2]$ keinen Eigenwert enthält. Wegen (4.9) ist

$$\begin{aligned}&k^2(t) \int_0^\varkappa v^2(t, \varrho) \left|\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho \\ &\leqq C_2^2 t^2 \cosh t \int_0^\varkappa \left|\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho \leqq C_3 t^2 \cosh t\,.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Dies gilt gleichmäßig bez. $z \in \mathfrak{K}$, und wir können C_3 so wählen, daß (6.7) für alle $\beta = 1, \ldots, n$ richtig ist. Für die restlichen Eigenwertfunktionen auf der rechten Seite von (6.6) wenden wir (4.11) an sowie die Tatsache, daß für $\varrho \geqq \varkappa > 0$ gilt $\varrho^{-1} \leqq C_4 \lambda^{-1}$. Demnach folgt

$$\begin{aligned}&k^2(t) \sum_{\lambda_i > 1/4} v_i^2(t)\, \varphi_i^2(z) + \frac{k^2(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_\varkappa^\infty v^2(t, \varrho) \left|\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 d\varrho \\ &\leqq C_5 \sinh t \left\{\sum_{\lambda_i > 1/4} \frac{\varphi_i^2(z)}{\lambda_i^{3/2}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_\varkappa^\infty \left|\eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right)\right|^2 \frac{d\varrho}{(1/4 + \varrho^2)^{3/2}}\right\} \\ &\leqq C_6 \cosh t\end{aligned} \tag{6.8}$$

wegen der Folgerung aus Satz 5.1. Die gleichen Abschätzungen gelten natürlich auch für z' anstelle von z. Wegen $t^2 \cosh t = O(\cosh^{1+\delta} t)$ für beliebiges $\delta > 0$ folgt die Behauptung aus (6.6)—(6.8) ∎

Satz 6.2: *Sei $l > 0$ und $s = \exp(-lt)$, $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ sei wieder eine kompakte Teilmenge. Dann gilt für $t \to \infty$ gleichmäßig bez. $z, z' \in \mathfrak{K}$ die Abschätzung*

$$k^{-1}(s)\, P^{(2)}(t, s, z, z') = O(\cosh^{(1+l)/2} t). \tag{6.9}$$

Beweis: Sei $\nu > 0$ eine feste, noch zu bestimmende Zahl. Wir setzen $\psi(t) = \cosh^\nu t$. Dann gilt die Darstellung

$$\begin{aligned}
&k^{-1}(s)\, P^{(2)}(t, s, z, z') \\
&= k(t) \sum_{1/4<\lambda_i<\psi(t)} v_i(t)\, v_i(s)\, \varphi_i(z)\, \varphi_i(z') \\
&+ \frac{k(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_0^{\sqrt{\psi(t)-1/4}} v(t, \varrho)\, v(s, \varrho)\, \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho \\
&+ k(t) \sum_{\psi(t)\leqq\lambda_i} v_i(t)\, v_i(s)\, \varphi_i(z)\, \varphi_i(z') \\
&+ \frac{k(t)}{2\pi} \sum_{\beta=1}^{n} \int_{\sqrt{\psi(t)-1/4}}^{\infty} v(t, \varrho)\, v(s, \varrho)\, \eta_\beta\left(z, \frac{1}{2} + i\varrho\right) \eta_\beta\left(z', \frac{1}{2} - i\varrho\right) d\varrho.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Bei der Abschätzung des Betrages von $k^{-1}(s)\, P^{(2)}(t, s, z, z')$ wird in den ersten beiden Summanden (4.11) für $v_i(t)$ bzw. $v(t, \varrho)$ und (4.10) für $v_i(s)$ bzw. $v(s, \varrho)$ angewendet. Das Integral von 0 bis $\varkappa$, $0 < \varkappa < (\psi(t) - 1/4)^{1/2}$, ist wie beim Beweis von Satz 6.1 wieder gesondert zu behandeln, dort wird $v(t, \varrho)$ mit Hilfe von (4.9) abgeschätzt. Bei den letzten beiden Summanden von (6.10) werden alle Eigenwertfunktionen durch (4.11) abgeschätzt. Insgesamt folgt also mit Satz 5.1 und seiner Folgerung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|k^{-1}(s)\, P^{(2)}(t, s, z, z')| \\
&\leqq C_1 \left\{\sinh^{1/2} t\psi^{1/4}(t) + t \cosh^{1/2} t + \sinh^{1/2} t\, \frac{\sinh^{1/2} s}{\cosh s - 1}\, \psi^{-1/2}(t)\right\} \\
&\leqq C_2\{\cosh^{1/2+\nu/4} t + \cosh^{1/2+\delta} t + \cosh^{1/2-\nu/2} t \sinh^{1/2} s(\cosh s - 1)^{-1}\}
\end{aligned}$$

für beliebiges $\delta > 0$. Wegen $\sinh s \leqq C_3 s$ für $0 \leqq s \leqq 1$ und $\cosh s - 1 \geqq s^2/2$ ist $\sinh^{1/2} s(\cosh s - 1)^{-1} \leqq 2C_4 s^{-3/2} \leqq C_4 \cosh^{3l/2} t$. Setzen wir nun $\nu = 2l$, $\delta = l/2$, so ist $1/2 + \nu/4 = 1/2 + \delta = 1/2 - \nu/2 + 3l/2 = (1 + l)/2$, und es folgt die Behauptung ∎

Nach diesen Aussagen über den iterierten Gitterrest liefert der folgende Satz die angestrebte O-Abschätzung für $P = P(t, z, z')$.

Satz 6.3: *Sei $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ eine kompakte Teilmenge. Für $\xi \to \infty$ gilt gleichmäßig bez. $z, z' \in \mathfrak{K}$ die Abschätzung*

$$P(\xi, z, z') = O(\cosh^{2/3} \xi). \tag{6.11}$$

Damit wird das in [2] für Gruppen Γ mit kompaktem Fundamentalbereich bewiesene Ergebnis auf Fuchssche Gruppen erster Art verallgemeinert. Andererseits stellt (6.11) eine Verschärfung früherer Abschätzungen für diesen Fall von S. J. Patterson [7] dar; dort betrug der Exponent 3/4.

Beweis: Seien $z, z' \in \mathfrak{K}$ fest gewählt. Wir wenden nun Satz 2.1 an, um aus (6.9) Abschätzungen für P zu erhalten. Sei $t \geqq 1$ und $s = \exp(-lt)$, $l \in \mathbf{R}$, also $0 < s < 1$.

Aus (2.12) und (6.1)—(6.4) erhalten wir die Ungleichung

$$P(t-s,z,z') \leqq k^{-1}(s)\,P^{(2)}(t,s,z,z') + \sum_{0\leqq\lambda_i\leqq 1/4} [k(t)\,v_i(t)\,v_i(s) - k(t-s)\,v_i(t-s)]\,\varphi_i(z)\,\varphi_i(z').$$

Für $0 \leqq \lambda_i \leqq 1/4$ gilt nun wegen (4.2) die Abschätzung

$$\begin{aligned}&|k(t)\,v_i(t)\,v_i(s) - k(t-s)\,v_i(t-s)|\\ &\leqq |k(t)\,v_i(t) - k(t-s)\,v_i(t-s)| + k(t)\,|v_i(t)|\,|v_i(s)-1|\\ &\leqq \int_{t-s}^{t} k'(\tau)\,|u_i(\tau)|\,d\tau + k(t)\,|v_i(t)|\,(|v_i(s)|+1).\end{aligned}$$

Die Beträge von u_i und v_i werden gemäß (4.13) und (4.10) durch 1 abgeschätzt, dann folgt weiter

$$\begin{aligned}&|k(t)\,v_i(t)\,v_i(s) - k(t-s)\,v_i(t-s)|\\ &\leqq 2\pi \int_{t-s}^{t} \sinh\tau\,d\tau + 4\pi(\cosh t - 1)\,s\\ &\leqq \pi \int_{t-s}^{t} e^{\tau}\,d\tau + 2\pi s\,e^{t} = \pi\,e^{t}(1-e^{-s}) + 2\pi s\,e^{t}\\ &\leqq Cs\,e^{t} = C\exp\big((1-l)\,t\big).\end{aligned}$$

Demnach gilt wegen Satz 6.2 für $t \to \infty$ und alle $l \geqq 0$ die Abschätzung

$$P(t-s,z,z') \leqq O(\cosh^{(1+l)/2} t) + O(\cosh^{1-l} t).$$

Nun ist $\min\limits_{l\geqq 0}\max\,\{(1+l)/2,\,1-l\} = 2/3$, also $P(t-s,z,z') \leqq O(\cosh^{2/3} t)$. Setzen wir noch $t-s=\xi$, d. h. $t=\xi+s\leqq\xi+1$, so folgt für $\xi\to\infty$

$$P(\xi,z,z') \leqq O(\cosh^{2/3}\xi). \tag{6.12}$$

Andererseits gilt ebenso nach der anderen Ungleichung von (2.12) die Ungleichung

$$P(t+s,z,z') \geqq k^{-1}(s)\,P^{(2)}(t,s,z,z') - \sum_{0\leqq\lambda_i\leqq 1/4} [k(t+s)\,v_i(t+s) - k(t)\,v_i(t)\,v_i(s)]\,\varphi_i(z)\,\varphi_i(z').$$

Die eckige Klammer ist wie oben dem Betrage nach durch $C\exp\big((1-l)\,t\big)$ zu majorisieren, und wir erhalten analog für $t\to\infty$ und alle $l\geqq 0$ die Abschätzung

$$P(t+s,z,z') \geqq O(\cosh^{(1+l)/2} t) + O(\cosh^{1-l} t).$$

Wieder ist $\max\limits_{l\geqq 0}\min\,\{(1+l)/2,\,1-l\} = 2/3$, demnach $P(t+s,z,z') \geqq O(\cosh^{2/3} t)$, und mit $t+s=\xi$, d. h. $t=\xi-s\leqq\xi$ liefert dies (6.12) mit umgekehrtem Relationszeichen. Damit ist (6.11) bewiesen, denn für $z, z' \in \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}$ kompakt, sind die Funktionen φ_i, $0\leqq\lambda_i\leqq 1/4$, beschränkt ∎

Satz 6.4: *Sei* $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ *eine kompakte Teilmenge. Dann gilt für* $t \to \infty$ *gleichmäßig bez.* $z, z' \in \mathfrak{K}$ *die Darstellung*

$$T(t, z, z') = \sum_{2/3 < s_i < 1} \sqrt{\pi} \frac{2^{s_i} \Gamma(s_i - 1/2)}{\Gamma(s_i + 1)} \cosh^{s_i} t \varphi_i(z) \varphi_i(z') + O(\cosh^{2/3} t). \tag{6.13}$$

Beweis: Wir haben lediglich die in (6.1) auftretenden Eigenwertfunktionen näher zu betrachten und nutzen dazu Satz 4.1 aus. Für $0 \leqq \lambda \leqq 1/4$ verwenden wir wieder die Substitution $\lambda = s(1 - s)$, $1/2 \leqq s \leqq 1$. Sei zunächst $2/9 \leqq \lambda_i \leqq 1/4$, also $1/2 \leqq s_i \leqq 2/3$. Dann gilt

$$k(t) v_i(t) = O(\cosh^{2/3} t).$$

Ist dagegen $0 < \lambda_i < 2/9$, d. h. $2/3 < s_i < 1$, so ergibt sich nach (4.4)

$$k(t) v_i(t) = \sqrt{\pi} \frac{2^{s_i} \Gamma(s_i - 1/2)}{\Gamma(s_i + 1)} \cosh^{s_i} t + O(\cosh^{1/3} t).$$

Damit folgt die Behauptung ∎

Die letzten beiden Sätze lieferten uns die gewünschte asymptotische Entwicklung der Gitterpunktfunktion $A = A(t, z, z')$, es gilt nämlich für $t \to \infty$ gleichmäßig bez. $z, z' \in \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K} \subset \mathbf{H}$ kompakt, die Darstellung

$$A(t, z, z') = \frac{2\pi}{\mu(\mathfrak{F})} \cosh t + \sum_{2/3 < s_i < 1} \sqrt{\pi} \frac{2^{s_i} \Gamma(s_i - 1/2)}{\Gamma(s_i + 1)} \cosh^{s_i} t \varphi_i(z) \varphi_i(z') + O(\cosh^{2/3} t). \tag{6.14}$$

LITERATUR

[1] Günther, P.: Eine Funktionalgleichung für den Gitterrest. Math. Nachr. **76** (1977), 5–27.

[2] Günther, P.: Gitterpunktprobleme in symmetrischen Riemannschen Räumen vom Rang 1. Math. Nachr. **94** (1980), 5–27.

[3] Huber, H.: Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. Comm. Math. Helvet. **30** (1956), 20–62.

[4] Huber, H.: Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, I und II. Math. Ann. **138** (1959), 1–26, und **142** (1961), 385–398. Nachtrag zu II: Math. Ann. **143** (1961), 463–464.

[5] Ленг С. (Lang, S.) : SL(2, ℝ). Москва: Изд-во Мир 1977

[6] Martin, T.: Ein Gitterpunktproblem im hyperbolischen Raum. Diplomarbeit. Leipzig: Karl-Marx-Univ. 1983.

[7] Patterson, S. J.: A lattice point problem in hyperbolic space. Mathematika **22** (1975), 81–88. Corrigendum: Mathematika **23** (1976), 227.

[8] Roelcke, W.: Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I und II. Math. Ann. **167** (1966), 292–337, und **168** (1967), 261–324.

[9] SELBERG, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weekly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47—87.
[10] SELBERG, A.: Discontinuous groups and harmonic analysis. In: Proc. Int. Congr. Math., Stockholm 1962. Djursholm: Inst. Mittag-Leffler 1963, p. 177—189.

Manuskripteingang: 12. 10. 1987

VERFASSER:

Dr. TOBIAS MARTIN
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
Karl-Marx-Platz 10
DDR-7010 Leipzig