Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (2) 1989, S. 153–161

Elliptische Randwertprobleme zweiter Ordnung in Gebieten mit einer Fehlstelle

A. Herwig

Die Lösungen von Randwertproblemen, bei denen das Gebiet durch eine kleine Fehlstelle Ω_ε gestört ist, werden nach Potenzen von ε entwickelt. Dabei soll entweder die Lösung oder ihre Normalableitung auf dem Rand der Fehlstelle verschwinden.

Решения краевых задач в области с маленкой дырой Ω_ε разлагаются в степенной ряд по ε. Для этого решение или её производная по нормали на границе дыры должно обращаться в нуль.

Solutions of boundary value problems in domains with a small hole Ω_ε are represented by a power series of ε. For this the solution or its normal derivative should vanish at the boundary of the hole.

0. Seit einiger Zeit werden von verschiedenen Autoren Differentialgleichungsprobleme untersucht, bei denen das betrachtete Gebiet G durch ein Loch in seinem Inneren mit zusätzlichen Forderungen an das Verhalten der Lösung auf dem Lochrand gestört ist. Es wird angenommen, daß der Durchmesser der mit Ω_ε bezeichneten Fehlstelle linear von dem Parameter ε abhängt und sich beim Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ auf einen einzigen Punkt zusammenzieht. Hierbei handelt es sich um eine singuläre Störung. Während nämlich die Probleme für Werte aus einem gewissen Parameterbereich korrekt gestellt sind, artet das durch Nullsetzen von ε entstehende Problem aus. Die zusätzliche Randbedingung kann in einem isolierten Punkt im allgemeinen nicht erfüllt werden.

Zu den ersten Veröffentlichungen zu dieser Thematik zählen die Arbeiten von A. M. Il'in. Er behandelt insbesondere ebene Randwertprobleme für elliptische Differentialoperatoren mit variablen Koeffizienten [2, 3]. Aber auch andere Autoren beschäftigen sich mit ähnlichen Aufgabenstellungen. So geben S. Ozawa [7] sowie V. G. Maz'ja, S. A. Nazarov und B. A. Plamenevskij [5] asymptotische Entwicklungen für die Eigenwerte des Laplace-Operators im gelochten Gebiet an. In anderen Arbeiten (zum Beispiel [4, 6]) werden Gleichungen in Gebieten mit periodisch verteilten Löchern betrachtet, deren Anzahl beim Grenzprozeß $\varepsilon \to 0$ gegen unendlich strebt. Die in [1] von D. Göhde für kugelförmige Defekte angestellten Betrachtungen werden in diesem Artikel bezüglich der zugrunde gelegten Operatoren, Gebiete und der Raumdimension verallgemeinert. Während es in [1] möglich war, die asymptotischen Entwicklungen explizit anzugeben, ist dies bei den hier betrachteten Problemen nicht mehr durchführbar. Besondere Schwierigkeiten bereiten hierbei die ebenen Aufgabenstellungen, da die Lösungen der äußeren Probleme im allgemeinen nicht so gewählt werden können, daß sie im Unendlichen verschwinden. Daher sind sie zur Kompensation der durch die Lösungen der ausgearteten Probleme auf dem Lochrand verursachten Fehlerterme zunächst ungeeignet.

Seien $G \subset \mathbf{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ zwei einfach zusammenhängende und hinreichend glatt berandete Gebiete, die den Koordinatenursprung enthalten. Dann definieren wir ein gestörtes Gebiet G_ε durch die Beziehung $G_\varepsilon = G \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$, wobei $\Omega_\varepsilon = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x/\varepsilon \in \Omega\}$ ist, und betrachten das Randwertproblem

$$\left.\begin{aligned} G_\varepsilon:&\quad -\Delta u + c(x) = f(x) \\ \partial G:&\quad u = g(x) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

unter einer der beiden zusätzlichen Randbedingungen

$$\partial\Omega_\varepsilon: \quad u = 0 \tag{2}$$

bzw.

$$\partial\Omega_\varepsilon: \quad \partial u/\partial\mathfrak{n} = 0. \tag{3}$$

Hierbei bezeichnet $\triangle$ den n-dimensionalen Laplace-Operator, $\partial/\partial\mathfrak{n}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen $\mathfrak{n}$, ∂G und $\partial\Omega_\varepsilon$ den Rand des Gebietes G bzw. Ω_ε. Zusätzlich gelte $\cos(\mathfrak{n}, x) > 0$ für alle Punkte $x \in \partial\Omega_\varepsilon$. Des weiteren wird vorausgesetzt, daß f, g und c hinreichend glatt sind und $c(x) \geqq 0$ in G gilt. Die Lösungen der so definierten Störprobleme werden im weiteren nach wachsenden Potenzen des Störparameters ε entwickelt. Hierzu löst man zunächst das ausgeartete Problem (1) in G und addiert einen geeigneten Korrekturterm, der den Einfluß des Defektes zum Ausdruck bringt und möglichst nur in unmittelbarer Nähe der Fehlstelle einen wesentlichen Beitrag zur Lösung des Störproblems liefert. Den dadurch auf ∂G entstandenen Fehler kompensiert man durch die Lösung eines im unverletzten Gebiet gestellten Problems usw.

1. Zunächst werde der Fall $n \geqq 3$ betrachtet. Hier gilt

Satz 1: *Die Lösung u des Problems* (1), (2) *besitzt im Falle $n \geqq 3$ die asymptotische Darstellung*

$$u = w_0 + v_0 + \varepsilon(w_1 + v_1) + \ldots + \varepsilon^k(w_k + v_k) + \varepsilon^{k+1}z, \tag{4}$$

wobei z eine in der Maximumnorm unabhängig von ε beschränkte Funktion ist. Die Funktion w_0 genügt dem ausgearteten Problem

$$\left.\begin{aligned} G:&\quad -\Delta w_0 + c(x)\, w_0 = f(x) \\ \partial G:&\quad w_0 = g(x) \end{aligned}\right\} \tag{5_0}$$

und v_0 dem äußeren Dirichlet-Problem

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon:&\quad \Delta v_0 = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon:&\quad v_0 = -w_0(x) \end{aligned}\right\}. \tag{6_0}$$

Die Funktionen w_i sind Lösungen der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} G:&\quad -\Delta w_i + c(x)\, w_i = -\varepsilon^{-1}c(x)\, v_{i-1} \\ \partial G:&\quad w_i = -\varepsilon^{-1}v_{i-1} \end{aligned}\right\} \tag{5_i}$$

($i = 1, 2, \ldots, k$), und die Funktionen v_i genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon:&\quad \Delta v_i = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon:&\quad v_i = -w_i(x) \end{aligned}\right\} \tag{6_i}$$

($i = 1, 2, \ldots, k$).

Es sei bemerkt, daß die rechten Seiten der Probleme (5_i) zunächst nur außerhalb von Ω_ε definiert sind. Diese können aber leicht stetig auf Ω_ε fortgesetzt werden, indem man $v_{i-1} = -w_{i-1}$ in Ω_ε setzt.

Zum Nachweis der punktweisen Beschränktheit von z löst man die Gleichung (4) nach z auf und setzt das Ergebnis in das Störproblem (1), (2) ein. Hierbei ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ll} G_\varepsilon: & -\Delta z + c(x)\, z = -\varepsilon^{-1} c(x)\, v_k \\ \partial G: & z = -\varepsilon^{-1} v_k \\ \partial\Omega_\varepsilon: & z = 0. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Da z unter Anwendung der Majorisierungsvariante des Maximumprinzips abgeschätzt werden soll, seien einige Eigenschaften der auf den rechten Seiten in (5_i) und (7) auftretenden Lösungen der äußeren Dirichlet-Probleme (6_0) und (6_i) angegeben. Zunächst kann ein Problem der Gestalt

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon: & \Delta v = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon: & v = w(x) \end{array}\right\} \tag{8}$$

durch die Transformation $x' = x/\varepsilon$ in das Problem

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}: & \Delta v' = 0 \\ \partial\Omega: & v' = w'(x') = w(\varepsilon x') \end{array}\right\} \tag{9}$$

übergeführt werden. Hierbei hängt das Gebiet nicht mehr von dem Parameter ε ab. Mit Hilfe der Kelvin-Spiegelung an der Einheitskugel $y_l = x_l'/|x'|^2$ ($l = 1, 2, \ldots, n$) führt man das äußere Problem (9) in das innere Problem

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega': & \Delta \bar{v}' = 0 \\ \partial\Omega': & \bar{v}' = |y|^{2-n}\, w'(y) = |y|^{2-n}\, w(\varepsilon y/|y|^2) \end{array}\right\} \tag{10}$$

über. Hierbei ist $\Omega' = \{y' = x'^2/|x'|^2 \mid x' \in \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}\}$. Damit ist die durch $v'(x') = |x'|^{2-n} \times \bar{v}'(x'/|x'|^2)$ definierte Funktion harmonisch in $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ und erfüllt wegen $|x'| = |y|^{-1}$ die Randbedingung in (9). Die Lösung von Problem (8) lautet

$$v(x) = (\varepsilon/|x|)^{n-2}\, \bar{v}'(\varepsilon x/|x|^2), \tag{11}$$

wobei $\bar{v}'$ die durch (10) festgelegte Funktion ist. Sei noch $M = \max\{|y|^{2-n}\, |w(\varepsilon y/|y|^2)| \mid y \in \partial\Omega'\}$. Dann folgt aus der Anwendung des Maximumprinzips auf (10) die Abschätzung

$$|v(x)| \leqq (\varepsilon/|x|)^{n-2}\, M. \tag{12}$$

Sei nun $C = \max\{c(x) \mid x \in G\}$. Dann genügt die Funktion z aus der Lösungsdarstellung (4) wegen der Gültigkeit von (7) dem Ungleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} G_\varepsilon: & |-\Delta z + c(x)\, z| \leqq (\varepsilon^{n-3}/|x|^{n-2})\, CM \\ \partial G: & |z| \leqq (\varepsilon^{n-3}/|x|^{n-2})\, M \\ \partial\Omega_\varepsilon: & z = 0 \end{array}\right\}$$

und kann nach der Majorisierungsvariante des Maximumprinzips durch $Z = A - \big(CM/(n-1)\big)\, |x|$ abgeschätzt werden. Hierbei ist $A = 1 + \big(CM/(n-1)\big) \times \max\{|x| \mid x \in G\}$. Damit gilt $|z(x)| \leqq Z(x)$ für alle x aus G_ε, und die Beschränktheit der Funktion z im Restglied der asymptotischen Lösungsdarstellung (4) ist nachgewiesen.

Wir betrachten nun das *Störproblem* (1), (3), bei dem das Verschwinden der Normalableitung auf dem Lochrand gefordert wird. Hier gilt

Satz 2: *Die asymptotische Lösungsdarstellung zu Problem* (1), (3) *lautet im Falle* $n \geqq 3$

$$u = w_0 + \varepsilon(w_1 + v_1) + \dots + \varepsilon^k(w_k + v_k) + \varepsilon^{k+2}z, \tag{13}$$

wobei z wiederum punktweise beschränkt ist. Die Funktionen w_0 *und* w_i *genügen hierbei den Gleichungen* (5_0) *bzw.* (5_i) ($i = 1, 2, \dots, k$), *und die Funktionen* v_0 *bzw.* v_i *sind Lösungen der äußeren Neumannschen Probleme*

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon\colon & \Delta v_0 = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon\colon & \partial v_0/\partial \mathfrak{n} = -\partial w_0/\partial \mathfrak{n} \end{array}\right\} \tag{14_0}$$

bzw:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon\colon & \Delta v_i = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon\colon & \partial v_i/\partial \mathfrak{n} = -\partial w_i/\partial \mathfrak{n} \end{array}\right\} \tag{14_i}$$

($i = 1, 2, \dots, k$).

Zum Nachweis löst man die Beziehung (13) wiederum nach z auf und setzt das Ergebnis in das *Störproblem* (1), (3) ein. Hierbei ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ll} G_\varepsilon\colon & -\Delta z + c(x)\, z = -\varepsilon^{-2} c(x)\, v_k \\ \partial G\colon & z = -\varepsilon^{-2} v_k \\ \partial\Omega_\varepsilon\colon & \partial z/\partial \mathfrak{n} = 0. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Es ist wiederum das Verhalten der Funktionen v_0 und v_i aus (14_0) bzw. (14_i) zu untersuchen. Hierzu führen wir die Probleme der Gestalt

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon\colon & \Delta v = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon\colon & \partial v/\partial \mathfrak{n} = \partial w(x)/\partial \mathfrak{n} \end{array}\right\} \tag{16}$$

mit Hilfe der Transformation $x' = x/\varepsilon$ in das Problem

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}\colon & \Delta v' = 0 \\ \partial\Omega\colon & \partial v'/\partial \mathfrak{n}' = \partial w(\varepsilon x')/\partial \mathfrak{n}' = \varepsilon \psi(x') \end{array}\right\} \tag{17}$$

über, wobei $\partial/\partial \mathfrak{n}'$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen $\mathfrak{n}'$ an $\partial\Omega$ bezeichnet und $\psi(x')$ für alle $x' \in \partial\Omega$ unabhängig von ε beschränkt ist. Damit gilt $v(x) = v'(x/\varepsilon)$. Nun führt man das äußere Neumannsche Problem (17) unter Anwendung der Kelvin-Spiegelung in ein inneres Problem über. Dazu ist es zunächst notwendig, die Transformation des Normalenvektors $\mathfrak{n}'$ an $\partial\Omega$ zu beschreiben. Die Fläche $\partial\Omega$ sei durch die implizite Darstellung $\partial\Omega = \{x' \in \mathbf{R}^n \mid F(x') = 0\}$ gegeben. Dann gilt für die s-te Komponente $\mathfrak{n}_s'(x')$ von $\mathfrak{n}'$ im Punkt x' die Beziehung

$$\mathfrak{n}_s'(x') = |\operatorname{grad}_{x'} F(x')|^{-1}\, \partial F(x')/\partial x_s', \tag{18}$$

wobei $\operatorname{grad}_{x'} F(x')$ den Vektor der partiellen Ableitungen der Funktion F im Punkt x' bezüglich der Koordinaten x_t' ($t = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet. Bei der Kelvin-Spiegelung geht die Funktion F in F' mit $F'(y) = F(y/|y|^2)$ über, und die Komponenten des Normalenvektors ν an $\partial\Omega' = \{y \in \mathbf{R}^n \mid F'(y) = 0\}$ lauten

$$\nu_s(y) = |\operatorname{grad}_y F'(y)|^{-1}\, \partial F'(y)/\partial y_s \qquad (s = 1, 2, \dots, n). \tag{19}$$

In den folgenden Formeln ist von 1 bis zur Raumdimension n über doppelt auftretende Indizes zu summieren. Es gilt

$$\frac{\partial F(x')}{\partial x_s'} = \frac{\partial y_t}{\partial x_s'}\frac{\partial F'(y)}{\partial y_t} = \left[\frac{\delta_{st}}{|x'|^2} - \frac{2x_s'x_t'}{|x'|^4}\right]\frac{\partial F'(y)}{\partial y_s}$$

$$= |y|^2\frac{\partial F'(y)}{\partial y_s} - 2y_sy_t\frac{\partial F'(y)}{\partial y_t} = |\mathrm{grad}_y\, F'(y)|\,(|y|^2\,\nu_s - 2y_sy_t\nu_t) \qquad (20)$$

($s = 1, 2, \ldots, n$; δ_{st} bezeichnet das Kronecker-Symbol). Nach Quadrieren und Aufsummieren der n Gleichungen (20) erhält man $|\mathrm{grad}_{x'}\, F(x')|^2 = |y|^4\,|\mathrm{grad}_y\, F'(y)|^2$. Setzt man die Beziehungen (19) und (20) in (18) ein, so ergibt sich $\mathfrak{n}_s'(x') = \nu_s - 2(y_sy_t/|y|^2)\,\nu_t$. Wird nun anstelle des zweiten Randwertproblems (17) das dritte Randwertproblem

$$\left.\begin{array}{ll} \Omega': & \Delta\bar{v}' = 0 \\ \partial\Omega': & \partial\bar{v}'/\partial\nu + (n-2)\cos(\nu, y)/|y|\,\bar{v}' = |y|^{-n}\,\varepsilon\psi(y|y|^2) \end{array}\right\} \qquad (21)$$

gelöst, so lautet analog zu oben die Lösung von (17) $v'(x') = |x'|^{2-n}\,\bar{v}'(x'/|x'|^2)$. Die so definierte Funktion ist wiederum harmonisch in $\mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ und genügt wegen

$$\frac{\partial v'(x')}{\partial \mathfrak{n}'} = \mathfrak{n}_s'\frac{\partial}{\partial x_s'}\left[|x'|^{2-n}\,\bar{v}'\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right)\right]$$

$$= |y|^{n-2}\left(\nu_s - \frac{2y_sy_t}{|y|^2}\,\nu_t\right)\left[(2-n)\,y_s\bar{v}'(y) + (|y|^2\,\delta_{sl} - 2y_sy_l)\frac{\partial\bar{v}'(y)}{\partial y_l}\right]$$

$$= |y|^n\left[(n-2)\frac{\cos(\nu, y)}{|y|}\,\bar{v}'(y) + \frac{\partial\bar{v}'(y)}{\partial\nu}\right] = \varepsilon\psi\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$$

der Randbedingung in (17). Somit lautet die Lösung von (16) $v(x) = (\varepsilon/|x|)^{n-2}\,\bar{v}'(\varepsilon x/|x|^2)$. Da die Funktion ψ in (17) unabhängig von ε beschränkt ist, folgt aus dem Maximumprinzip die Existenz einer Konstanten M, so daß $|v'(x')| \leqq \varepsilon M$ für alle $x' \in \Omega'$ gilt. Folglich genügt v der Beziehung

$$|v(x)| \leqq \varepsilon(\varepsilon/|x|)^{n-2}\,M. \qquad (22)$$

Damit erfüllt die durch (15) festgelegte Funktion z aus dem Restglied der Lösungsdarstellung (13) die Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} G_\varepsilon: & |-\Delta z + c(x)\,z| \leqq (\varepsilon^{n-3}/|x|^{n-2})\,MC \\ \partial G: & |z| \leqq (\varepsilon^{n-3}/|x|^{n-2})\,M \\ \partial\Omega_\varepsilon: & \partial z/\partial\mathfrak{n} = 0. \end{array}\right\}$$

Als Vergleichsfunktion wählen wir hier $Z = 1 + (A - |x|)\,\varrho^{n-3}\,MC/(n-1)$, wobei $\varrho = \max\,\{\varepsilon/|x| \mid x \in \partial\Omega_\varepsilon\}$ und $A = \max\,\{|x| \mid x \in \partial G\}$ ist. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{ll} G_\varepsilon: & -\Delta(\pm z - Z) + c(x)\,(\pm z - Z) \leqq 0 \\ \partial G: & \pm z - Z < 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon: & \partial(\pm z - Z)/\partial\mathfrak{n} > 0. \end{array}\right\}$$

Wegen der Randbedingung auf $\partial\Omega_\varepsilon$, die aus der eingangs erwähnten Einschränkung an den Rand des Defektes folgt, wachsen die Funktionen $\pm z - Z$ in Richtung des Gebietsinneren. Deshalb können sie ihr Maximum auf diesem Teil des Randes von G_ε nicht annehmen. Nach dem Maximumprinzip besitzen sie des weiteren in G_ε

weder ein negatives Minimum noch ein positives Maximum. Folglich gilt $\pm z(x) \leqq Z(x)$ für alle x aus G_ε. Damit ist gezeigt, daß das Restglied in der Lösungsdarstellung (13) zu dem Problem (1), (3) eine Größe der Ordnung ε^{k+2} ist.

2. Bisher wurde ausschließlich der Fall $n \geqq 3$ betrachtet. Zur asymptotischen Darstellung der Lösung des Störproblems (1), (2) konnte wesentlich ausgenutzt werden, daß die Lösungen der äußeren Probleme (6_0) und (6_i) beim Grenzübergang $|x|/\varepsilon \to \infty$ gegen Null gehen. In der Ebene besitzen diese Funktionen eine derartige Eigenschaft nicht. Daher sind zur Konstruktion einer (4) entsprechenden Entwicklung noch einige weitere Betrachtungen anzustellen. Sei nun $n = 2$. Wir betrachten wiederum das äußere Dirichlet-Problem (8), welches durch die Transformation $x' = x/\varepsilon$ in (9) und durch $y_l = x_l/|x|^2$ $(l = 1, 2)$ in (10) übergeht. Die Lösung $\bar{v}'$ des Problems besitze in einer kleinen Umgebung des Koordinatenursprunges die Entwicklung $\bar{v}'(y) = \bar{v}'(0) + |y|\, R(y)$ mit Restglied erster Ordnung, in der $R(y)$ unabhängig von $|y|$ beschränkt ist. Dann läßt sich die Lösung v des Problems (8) wegen

$$v(x) = v'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \bar{v}'\left(\frac{\varepsilon x}{|x|^2}\right) = \bar{v}'(0) + \frac{\varepsilon}{|x|} R\left(\frac{\varepsilon x}{|x|^2}\right) = v(\infty) + \frac{\varepsilon}{|x|} R\left(\frac{\varepsilon x}{|x|^2}\right) \tag{23}$$

für hinreichend große Werte von $|x|/\varepsilon$ als Summe aus einer Konstanten und einem Term, der sich wie $\varepsilon/|x|$ verhält und harmonisch ist, darstellen.

Sei nun w_{00} die Lösung des ausgearteten Problems

$$\left.\begin{array}{ll} G: & -\Delta w_{00} + c(x)\, w_{00} = f(x) \\ \partial G: & w_{00} = g(x) \end{array}\right\}$$

und v^0 die Lösung des äußeren Dirichlet-Problems

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon: & \Delta v^0 = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon: & v^0 = -w_{00}(x). \end{array}\right\}$$

Dann ist v^0 zur Kompensation von w_{00} auf $\partial\Omega_\varepsilon$ zunächst ungeeignet, da v^0 auf ∂G mit ε nicht gegen Null geht. Daher kompensiert man unter Verwendung der Darstellung (23) mit der in G_ε harmonischen Funktion $v^0(\infty)\,\big(\lambda - \ln r + \gamma(x)\big)/(\lambda - \ln \varepsilon) + \big(v^0(x) - v^0(\infty)\big) = \mu v_{01} + \varepsilon v_{10}$. Hierbei ist $r = |x|$, $\mu = (\lambda - \ln \varepsilon)^{-1}$, $v_{10}(x) = \varepsilon^{-1}\big(v^0(x) - v^0(\infty)\big)$, $v_{01}(x) = v^0(\infty)\,\big(\lambda - \ln r + \gamma(x)\big)$ und λ eine noch frei wählbare Konstante. γ sichert als Lösung des Problems

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon: & \Delta\gamma = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon: & \gamma = \ln(r/\varepsilon), \end{array}\right\}$$

daß v^0 und $\mu v_{01} + \varepsilon v_{10}$ auf $\partial\Omega_\varepsilon$ übereinstimmen. Damit wird erreicht, daß die nullte Korrekturfunktion auf ∂G mit ε gegen Null geht. Die Lösungsdarstellung mit Restglied der Ordnung ε lautet

$$u(x) = w_{00}(x) + \mu v_{01}(x) + \varepsilon v_{10}(x) + \mu z.$$

Ist man an Näherungen höherer Ordnung interessiert, so löst man als nächstes das Problem

$$\left.\begin{array}{ll} G: & -\Delta w_{10} + c(x)\, w_{10} = -c(x)\, v_{10}(x) \\ \partial G: & w_{10} = -v_{10}(x) \end{array}\right\}$$

und kompensiert εv_{10} auf ∂G durch εw_{10}. Nun ist der durch μv_{01} auf ∂G verursachte Fehler auszugleichen. Dazu löst man das Ersatzproblem

$$\left.\begin{array}{ll} G: & -\Delta \overline{w} + c(x)\,\overline{w} = c(x)\,\big(\gamma(x) - \ln r\big) \\ \partial G: & \overline{w} = \gamma(x) - \ln r, \end{array}\right\}$$

setzt $\lambda = -\overline{w}(0)$ und kompensiert μv_{01} auf ∂G durch die Funktion $\mu w_{01}(x) = \mu v^0(\infty)$ $\big(\lambda + \overline{w}(x)\big)$. Durch den so von A. M. Il'in bereits in [3] eingeführten Parameter λ wird gesichert, daß die auftretenden Reihen nach wachsenden Potenzen von μ nach endlich vielen Gliedern abbrechen. Damit ist w_{01} auf $\partial\Omega_\varepsilon$ nämlich eine Größe der Ordnung ε, und man gelangt zu Restgliedern, deren Ordnung nicht nur eine Potenz von μ, sondern eine Potenz von ε ist. Die Lösungsdarstellung mit Restglied der Ordnung ε lautet somit

$$u = w_{00} + \varepsilon v_{10} + \mu v_{01} + \varepsilon w_{10} + \mu w_{01} + \varepsilon z.$$

Im folgenden Schritt sind die Probleme

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon: & v^{10} = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon: & v^{10} = -w_{10} \end{array}\right\}$$

und

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon: & v^{11} = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon: & v^{11} = -\varepsilon^{-1} w_{01} \end{array}\right\}$$

zu lösen. Nun setzt man $v_{20}(x) = \varepsilon^{-1}\big(v^{10}(x) - v^{10}(\infty)\big)$, $v_{11}(x) = v^{10}(\infty)\,\big(\ln r - \lambda + \gamma(x)\big)$, $v_{21}(x) = \varepsilon^{-1}\big(v^{11}(x) - v^{11}(\infty)\big)$, $v_{12}(x) = v^{11}(\infty)\,\big(\ln r - \lambda + \gamma(x)\big)$ und kompensiert v_{11} und v_{12} auf ∂G durch $w_{11}(x) = v^{10}(\infty)\,\big(\lambda + \overline{w}(x)\big)$ bzw. $w_{12}(x) = v^{11}(\infty)$ $\big(\lambda + \overline{w}(x)\big)$; w_{11} und w_{12} sind auf $\partial\Omega_\varepsilon$ Größen der Ordnung ε; v_{20} und v_{21} sind auf ∂G beschränkt. Daher sind diese Terme erst im nächsten Schritt auszugleichen. Es gilt

Satz 3: *Die Lösung u des Problems* (1), (2) *kann für $n = 2$ durch*

$$\begin{aligned} u = {} & w_{00} + \varepsilon v_{10} + \mu v_{01} + \varepsilon w_{10} + \mu w_{01} \\ & + \varepsilon^2 v_{20} + \varepsilon^2 \mu v_{21} + \varepsilon\mu v_{11} + \varepsilon\mu^2 v_{12} + \varepsilon\mu w_{11} + \varepsilon\mu^2 w_{12} + \varepsilon^2 z \end{aligned}$$

asymptotisch dargestellt werden. Dabei ist z unabhängig von ε beschränkt.

Führt man das beschriebene Verfahren fort, so gelangt man zu asymptotischen Lösungsdarstellungen mit Restgliedern höherer Ordnung in ε.

Die Einführung eines zweiten Parameters neben ε ist zur Entwicklung der Lösung des ebenen Problems (1), (3) nicht notwendig. Allerdings kann hier der durch die Lösung w_0 des ausgearteten Problems auf $\partial\Omega_\varepsilon$ entstandene Fehler im Gegensatz zum höherdimensionalen Fall nicht durch eine Funktion v_0, die (14_0) genügt, kompensiert werden. Das Problem (14_0) ist für $n = 2$ im allgemeinen unlösbar. Es gilt der

Satz 4: *Die Lösung u des Problems* (1), (3) *besitzt für $n = 2$ die asymptotische Darstellung*

$$\begin{aligned} u = {} & w_0 + v_0 + \varepsilon^2 K_0 \ln r + \varepsilon(w_1 + v_1 + \varepsilon^2 K_1 \ln r) \\ & + \dots + \varepsilon^k(w_k + v_k + \varepsilon^2 K_k \ln r) + (\varepsilon^{k+2} \ln \varepsilon)\, z, \end{aligned} \tag{24}$$

wobei die Funktionen w_0, v_0 und w_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sowie die Konstanten K_0, K_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ den folgenden Beziehungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} G:&\quad -\Delta w_0 + c(x)\, w_0 = f(x) \\ \partial G:&\quad w_0 = g(x), \end{aligned}\right\} \tag{25_0}$$

$$K_0 = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta w_0\, dx,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon:&\quad \Delta v_0 = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon:&\quad \partial v_0/\partial\mathfrak{n} = -\partial(w_0 + \varepsilon^2 K_0 \ln r)/\partial\mathfrak{n} \end{aligned}\right\} \tag{26_0}$$

und

$$\left.\begin{aligned} G:&\quad -\Delta w_i + c(x)\, w_i = -\varepsilon^{-1} c(x)\, (v_{i-1} + \varepsilon^2 K_{i-1} \ln r) \\ \partial G:&\quad w_i = -\varepsilon^{-1}(v_{i-1} + \varepsilon^2 K_{i-1} \ln r), \end{aligned}\right\} \tag{25_i}$$

$$K_i = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta w_i\, dx,$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon:&\quad \Delta v_i = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon:&\quad \partial v_i/\partial\mathfrak{n} = -\partial(w_i + \varepsilon^2 K_i \ln r)/\partial\mathfrak{n}. \end{aligned}\right\} \tag{26_i}$$

Zum Beweis betrachten wir zunächst ein Problem der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon:&\quad \Delta v = 0 \\ \partial\Omega_\varepsilon:&\quad \partial v/\partial\mathfrak{n} = -\partial(w + \varepsilon^2 K \ln r)/\partial\mathfrak{n}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

welches genau dann beschränkt lösbar ist, wenn $\int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\partial v/\partial\mathfrak{n})\, do = 0$ gilt. Aus dieser Beziehung berechnen wir K. Aus der ersten Greenschen Formel folgt

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial\mathfrak{n}}\, d\sigma + \varepsilon^2 K \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \ln r}{\partial\mathfrak{n}}\, d\sigma = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta w\, dx + 2\pi\varepsilon^2 K.$$

Es ergibt sich $K = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta w\, dx$, so daß zunächst die obige Definition der Konstanten K_0 und K_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sinnvoll ist. Die Anwendung der Transformation $x' = x/\varepsilon$ und der Kelvin-Spiegelung auf (27) liefert das innere Neumannsche Problem

$$\left.\begin{aligned} \Omega':&\quad \Delta\bar{v}' = 0 \\ \partial\Omega':&\quad \partial\bar{v}'/\partial\nu = \varepsilon\, |y|^{-2}\, \psi(y/|y|^2). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Hierbei ist ψ durch die Beziehung $\psi(x) = -\varepsilon^{-1}\, \partial w(\varepsilon x')/\partial\mathfrak{n}' - \varepsilon K\, \partial \ln r'/\partial\mathfrak{n}'$, $r' = |x'|$, definiert und unabhängig von ε beschränkt. Die Lösung $\bar{v}'$ von (28) ist lediglich bis auf einen konstanten Summanden eindeutig bestimmt. Diesen wählen wir so, daß $\bar{v}'(0) = 0$ gilt. Weil $\partial\bar{v}'(y)/\partial\nu$ auf $\partial\Omega'$ eine Größe der Ordnung ε ist, ergibt sich $|\bar{v}'(y)| \leqq \varepsilon M$ mit einer gewissen Konstanten M für alle $y \in \Omega'$. Nun kann man aus der Lipschitz-Stetigkeit von $\bar{v}'$ die Ungleichung $|v'(y)| \leqq \varepsilon M'\, |y|$ für $y \in \Omega'$ folgern. Entsprechend Formel (11) erhält man die Lösung v von (27) durch den Übergang zu den ursprünglichen Koordinaten: $v(x) = \bar{v}'(\varepsilon x/|x|^2)$. Damit genügt v der Abschätzung $|v(x)| \leqq \varepsilon^2 M'/|x|$ außerhalb von Ω_ε, und die Funktionen v_0, v_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sind als Lösungen von (26_0), (26_i) auf $\partial\Omega_\varepsilon$ Größen der Ordnung ε. Deshalb können die rechten Seiten von (25_i) stetig so auf Ω_ε fortgesetzt werden, daß diese Eigenschaft erhalten bleibt. Zum Nachweis der Beschränktheit von z löst man wiederum die Entwicklung (24) nach z auf und setzt in das Ausgangsproblem (1), (3) ein. Hierbei ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &G \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon: \quad -\Delta z + c(x)\, z = -(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)^{-1}\, c(x)\,(v_k + \varepsilon^2 K_k \ln r)\\ &\partial G: \quad z = -(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)^{-1}\,(v_k + \varepsilon^2 K_k \ln r)\\ &\partial\Omega_\varepsilon: \quad \partial z/\partial \mathfrak{n} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Analog zum oben behandelten höherdimensionalen Fall zeigt man hier unter Anwendung des Maximumprinzips, daß z unabhängig von ε beschränkt ist.

LITERATUR

[1] Göhde, D.: Singuläre Störungen von Randwertproblemen durch ein kleines Loch im Gebiet. Z. Anal. Anw. 4 (1985), 467–477.
[2] Ильин, А. М.: Краевая задача эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай. Мат. сб. **99** (1976), 514–537.
[3] Ильин, А. М.: Краевая задача эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием. Мат. сб. **103** (1977), 265–284.
[4] Иосифьян, Г. А., Олейник, О. А., и А. С. Шамаев: О сходомости энергии, тензоров напряжений и частот собственных колебаний в задачах усреднения, возникающих в теории упругости. Докл. Акад. Наук СССР **274** (1984), 1329–1333.
[5] Мазья, В. Г., Назаров, С. А., и В. А. Пламеневский: Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для операторов Лапласа в областях с малыми отверстиями. Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат., **48** (1984), 347–371.
[6] Nguetzeng, G.: Problèmes d'écrans perforés pour l'équation de Laplace. RAIRO Modèl. Math. Anal. Numér. **19** (1985), 33–63.
[7] Ozawa, S.: An asymptotic formula for the eigenvalues of the laplacian in a domain with a small hole. Proc. Japan. Acad. Tokyo A **58** (1982), 5–8.

Manuskripteingang: 05. 10. 1987; in revidierter Fassung 28. 03. 1988

VERFASSER:

Dr. Alfred Herwig
Heinrich-Heine-Str. 59
DDR-9550 Zwickau