

## Über Lipschitzstetige implizite Funktionen

A. LANGENBACH

Herrn Prof. Dr. S. G. Michlin zum 80. Geburtstag gewidmet

Die Auflösung der impliziten Funktion  $F(x, z) + K(z)x = 0$  mit  $K(z) \in \text{Lip}(X, Y)$  wird durch die Annahme  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) + K(z^0) \right]^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$  ermöglicht.

Разрешение неявной функции  $F(x, z) + K(z)x = 0$  в которой  $K(z) \in \text{Lip}(X, Y)$  становится возможным, если предположить  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) + K(z^0) \right]^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$ .

A solution of the implicit function  $F(x, z) + K(z)x = 0$  with  $K(z) \in \text{Lip}(X, Y)$  becomes possible if we propose  $\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) + K(z^0) \right]^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$ .

Wir betrachten zwei Banachräume  $X, Y$ , einen metrischen Parameterraum  $Z$ , Umgebungen  $U(x^0) \times V(z^0)$  des Punktes  $(x^0, z^0) \in X \times Z$  und eine Abbildung  $F: U(x^0) \times V(z^0) \rightarrow Y$ ,  $F(x^0, z^0) = 0$ . Gesucht ist eine Abbildung  $x: \mathfrak{R}(z^0, r_1) \rightarrow X$ , die der Gleichung

$$F(x(z), z) = 0 \tag{1}$$

für  $z \in \mathfrak{R}(z^0, r_1) \subset V(z^0)$  genügt und wenigstens in  $z^0$  stetig ist.  $\mathfrak{R}(z, r)$  bezeichnet die offene Kugel mit dem Zentrum  $z$  und dem Radius  $r$ . Wir formulieren zunächst ein geläufiges Resultat.

**Satz 1:** Die Abbildung  $F: U(x^0) \times V(z^0) \rightarrow Y$  sei stetig in  $(x^0, z^0)$ , besitze die partielle Fréchet-Ableitung  $-\partial F/\partial x: U(x^0) \times V(z^0) \rightarrow \mathfrak{Q}(X, Y)$ , die ihrerseits stetig in  $(x^0, z^0)$  sei. Überdies möge die Abbildung  $[\partial F(x^0, z^0)/\partial x]^{-1} \in \mathfrak{Q}(Y, X)$  existieren. Dann gibt es Zahlen  $0 < r_1 \leq r$  derart, daß zu jedem  $z \in \mathfrak{R}(z^0, r_1)$  genau ein  $x(z) \in \mathfrak{R}(x^0, r)$  existiert, welches die Gleichung (1) erfüllt. Die Abbildung  $x: \mathfrak{R}(z^0, r_1) \rightarrow X$  ist in  $z^0$  stetig. (Mit  $\mathfrak{R}$  bezeichnen wir die Abschließung der offenen Kugel  $\mathfrak{R}$ .)

Satz 1 ist u. a. ein Spezialfall des in [1] bewiesenen Satzes über implizite Inklusionen, vgl. auch E. ZEIDLER [3], wo die Einschränkung „ $Z$  Banachraum“ für unsere Aussage nicht benötigt wird. Im Prinzip beruht die lokale Auflösung der impliziten Funktion (1) auf der globalen Lösbarkeit einer vereinfachten Gleichung, in Satz 1 z. B. der linearen Gleichung  $[\partial F(x^0, z^0)/\partial x]x = y$ . Im Falle der in [1] untersuchten impliziten Inklusion ist auch die vereinfachte Version eine nichtlineare Inklusion, deren eindeutige Auflösbarkeit postuliert wird. Die Durchsicht von Anwendungsbeispielen aus der Elastostatik legt die Betrachtung von Situationen nahe, die zwischen der in [1] behandelten impliziten Inklusion und dem in Satz 1 formulierten Spezialfall liegen.

Wir beschreiben zunächst eine naheliegende Verallgemeinerung der Räume  $\mathfrak{Q}(X, Y)$  linearer stetiger Abbildungen.

**Definition 1:** Für Banachräume  $X, Y$  und Teilmengen  $G \subset X$ , die wenigstens zwei verschiedene Elemente enthalten, erklären wir die Vektorräume

$$\text{Lip}(G, Y) = \left\{ A: G \rightarrow Y; \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{\|Ax_1 - Ax_2\|}{\|x_1 - x_2\|} < \infty \right\} \quad (2)$$

mit der üblichen linearen Struktur von Funktionen.

**Satz 2:** Mit der Norm  $\|A\|_{\text{Lip}} = \|Ax_1\| + \sup_{x_i \neq x_j} \frac{\|Ax_i - Ax_j\|}{\|x_i - x_j\|}$  für ein fixiertes  $x_1 \in G$  ist  $\text{Lip}(X, Y)$  ein Banachraum. Die zu verschiedenen Elementen  $x_i \in G$  definierten Normen sind topologisch äquivalent.

Den naheliegenden Beweis dieses Satzes findet man bei R. H. MARTIN [2].

**Bemerkung 1:** In unseren Anwendungen ist stets  $G = X, x_1 = 0$ , also

$$\|A\|_{\text{Lip}(X, Y)} = \|A0\| + \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{\|Ax_1 - Ax_2\|}{\|x_1 - x_2\|}. \quad (3)$$

Damit wird  $\mathfrak{L}(X, Y) \subset \text{Lip}(X, Y)$  mit der üblichen Norm stetiger linearer Operatoren ein Unterraum. Ein weiterer Unterraum ist  $\text{Lip}_0(X, Y) = \{A \in \text{Lip}(X, Y); \|A0\| = 0\} \supset \mathfrak{L}(X, Y)$ . Sind  $X, Y, W$  Banachräume,  $A \in \text{Lip}(X, Y), B \in \text{Lip}(Y, W)$ , so ist  $BA \in \text{Lip}(X, W)$  mit

$$\|BA\|_{\text{Lip}(X, W)} \leq \|B\|_{\text{Lip}(Y, W)} (1 + 2\|A\|_{\text{Lip}(X, Y)}). \quad (4)$$

**Definition 2:** Sind  $X, Y$  Banachräume, so nennen wir einen injektiven Operator  $A \in \text{Lip}(X, Y)$  umkehrbar, falls  $A^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$  mit  $AA^{-1} = id \in \text{Lip}(Y, Y)$  existiert.

**Satz 3:** Die Menge der umkehrbaren Operatoren ist offen in  $\text{Lip}(X, Y)$ . Ist  $A_0 \in \text{Lip}(X, Y)$  umkehrbar, so gibt es Zahlen  $\varrho, L > 0$  derart, daß für  $A \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho)$  die Ungleichung  $\|A^{-1}\|_{\text{Lip}(Y, X)} \leq L$  gilt. Für jede Folge  $(A_n)$  in  $\text{Lip}(X, Y)$  mit  $\|A_n - A_0\|_{\text{Lip}} \rightarrow 0$  und jedes  $w \in Y$  gilt  $\|A_n^{-1}w - A_0^{-1}w\| \rightarrow 0$ .

**Beweis:** Der (injektive) Operator  $A_0 \in \text{Lip}(X, Y)$  sei umkehrbar, d. h., es gibt einen Operator  $A_0^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$  mit  $A_0^{-1}A_0 = id \in \text{Lip}(X, X)$  und  $A_0A_0^{-1} = id \in \text{Lip}(Y, Y)$ . Wir können die Gleichung  $Ax = y$  äquivalent umformen zu  $x = T_y x$  mit  $T_y x := A_0^{-1}[(A_0 - A)x + y]$ ,  $T_y \in \text{Lip}(X, X)$ . Für  $x_1, x_2 \in X$  finden wir

$$\|T_y x_1 - T_y x_2\| \leq \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}(Y, X)} \|A_0 - A\|_{\text{Lip}(X, Y)} \|x_1 - x_2\|.$$

$T_y$  ist sicher strikt kontraktiv für  $A \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho)$  mit  $\varrho = 1/2 \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}}$  und jedes  $y \in Y$ . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz ist jeder Operator  $A \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho)$  injektiv und surjektiv. Überdies gilt für  $A \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho), y_i \in Y, x_i = A^{-1}y_i, T_i x = T_{y_i} x$  ( $i = 1, 2$ )  $\|x_1 - x_2\| = \|T_1 x_1 - T_2 x_2\| \leq \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} (\|(A - A_0)x_1 - (A - A_0)x_2\| + \|y_1 - y_2\|)$ , folglich

$$\|A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2\| \leq 2\|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} \|y_1 - y_2\|, \quad (5)$$

also  $A^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$  und

$$\sup_{y_1, y_2 \in Y} \frac{\|A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2\|}{\|y_1 - y_2\|} \leq 2\|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}}.$$

Ferner sei  $x := A^{-1}w, z := A_0^{-1}w$  für  $A \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho), w \in Y$ . Dann ist

$$\|x - z\| = \|A_0^{-1}[(A_0 - A)x + w] - A_0^{-1}w\| \leq \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} \|(A_0 - A)x\|.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|(A_0 - A)x\| &\leq \|(A_0 - A)0\| + \|(A_0 - A)x - (A_0 - A)0\| \\ &\leq \|A_0 - A\|_{\text{Lip}} (1 + \|x\|) \end{aligned}$$

gilt dann  $\|A^{-1}w - A_0^{-1}w\| \leq \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} \|A_0 - A\|_{\text{Lip}} (1 + \|A^{-1}w\|)$ , folglich

$$\begin{aligned} \|A^{-1}w\| &\leq \|A_0^{-1}w\| + \|A^{-1}w - A_0^{-1}w\| \\ &\leq \|A_0^{-1}w\| + \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} \|A_0 - A\|_{\text{Lip}} (1 + \|A^{-1}w\|) \end{aligned}$$

und, da  $A \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho)$  gewählt war,  $\|A^{-1}w\| \leq 2 \|A_0^{-1}w\| + 1$ . Speziell folgt aus der letzten Ungleichung  $\|A^{-1}0\| \leq 2 \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} + 1$  und schließlich  $\|A^{-1}\|_{\text{Lip}} \leq 4 \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} + 1 =: L$ . Ist nun  $(A_n)$  eine Folge in  $\text{Lip}(X, Y)$ ,  $\|A_n - A_0\|_{\text{Lip}} \rightarrow 0$ ,  $w \in Y$  beliebig fixiert, so erhalten wir für  $A_n \in \mathfrak{R}(A_0, \varrho)$

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1}w - A_0^{-1}w\| &\leq \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} \|A_0 - A_n\|_{\text{Lip}} (1 + \|A_n^{-1}w\|) \\ &\leq 2 \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}} (1 + \|A_0^{-1}w\|) \|A_0 - A_n\|_{\text{Lip}} \rightarrow 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir formulieren nun die angestrebte Verallgemeinerung von Satz 1.

**Satz 4:** Zu Banachräumen  $X, Y$ , dem metrischen Parameterraum  $Z$ , einer Umgebung  $U(x^0) \times V(z^0)$  des Punktes  $(x^0, z^0) \in X \times Z$  mögen Abbildungen  $F: U(x^0) \times V(z^0) \rightarrow Y$ ,  $K: V(z^0) \rightarrow \text{Lip}(X, Y)$  mit  $F(x^0, z^0) + K(z^0)x^0 = 0$  gegeben sein. Dabei existiere die partielle Fréchet-Ableitung  $\partial F/\partial x: U(x^0) \times V(z^0) \rightarrow \mathfrak{L}(X, Y)$ ,  $F$  und  $\partial F/\partial x$  seien stetig in  $(x^0, z^0)$ ,  $K$  stetig in  $z^0$ . Die Abbildung  $\partial F(x^0, z^0)/\partial x + K(z^0) \in \text{Lip}(X, Y)$  sei umkehrbar. Dann gibt es Zahlen  $r \geq r_1 > 0$  derart, daß zu jedem  $z \in \mathfrak{R}(z^0, r_1)$  genau ein  $x(z) \in \mathfrak{R}(x^0, r)$  mit

$$F(x(z), z) + K(z)x(z) = 0 \tag{6}$$

existiert. Die Abbildung  $x: \mathfrak{R}(z^0, r_1) \rightarrow X$  ist in  $z^0$  stetig.

**Beweis:** Mit einer Hilfsfunktion

$$g(x, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0)(x - x^0) - F(x, z), \quad (x, z) \in U(x^0) \times V(z^0),$$

kommen wir von der Gleichung

$$F(x, z) + K(z)x = 0 \tag{7}$$

zur äquivalenten Formulierung

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) + K(z) \right] x = g(x, z) + \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0)x^0.$$

Es ist  $A_0 = \partial F(x^0, z^0)/\partial x + K(z^0) \in \text{Lip}(X, Y)$  umkehrbar. Mit  $A_0$  sind nach Satz 3 auch die Operatoren  $A_z = \partial F(x^0, z^0)/\partial x + K(z) \in \text{Lip}(X, Y)$  umkehrbar, falls  $A_z$  in einer geeigneten Umgebung  $U(A_0)$  ist, und es kann

$$\|A_z^{-1}\|_{\text{Lip}(Y, X)} \leq 4 \|A_0^{-1}\|_{\text{Lip}(Y, X)} + 1 =: L \tag{8}$$

angenommen werden. Wir kommen somit zu einer weiteren äquivalenten Formulierung der Gleichung (7), und zwar zu

$$x = A_z^{-1} \left( g(x, z) - \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0)x^0 \right). \tag{9}$$

Schreiben wir (9) noch für  $(x, z) := (x^0, z^0)$  auf,  $x^0 = A_0^{-1} \left( g(x^0, z^0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) x^0 \right)$ , so erhalten wir die Form

$$x = x^0 + T(x, z) := T_0(x, z) \quad (10)$$

mit

$$T(x, z) = A_z^{-1} \left( g(x, z) - \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) x^0 \right) - A_0^{-1} \left( g(x^0, z^0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) x^0 \right). \quad (11)$$

Es sei nun  $r$  eine kleine positive Zahl und  $x \in \bar{\mathfrak{K}}(x^0, r)$ ,  $z \in \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r)$ . Dann erhalten wir  $\|T_0(x, z) - x^0\| = \|T(x, z)\| \leq L \|g(x, z) - g(x^0, z^0)\| + \|A_z^{-1}w - A_0^{-1}w\|$  für  $w = g(x^0, z^0) - [\partial F(x^0, z^0)/\partial x] x^0$ . Überdies gilt  $\|g(x, z) - g(x^0, z^0)\| \leq \|g(x, z) - g(x^0, z)\| + \|F(x^0, z) - F(x^0, z^0)\|$  und

$$\|g(x, z) - g(x^0, z)\| \leq \sup_{(x,z) \in \bar{\mathfrak{K}}(x^0, r) \times \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r)} \left\| \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, z) \right\| \right\| \|x - x^0\|.$$

Wir wählen nun  $r$  so klein, daß  $\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, z^0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, z) \right\| \leq \frac{1}{4L}$  angenommen werden darf. Ferner sei  $r \geq r_1 > 0$  und  $r_1$  so klein, daß  $\|A_z^{-1}w - A_0^{-1}w\| \leq r/4$  und  $\|F(x^0, z) - F(x^0, z^0)\| \leq r/4L$  für  $z \in \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1)$  angenommen werden kann. Dann gilt  $\|T_0(x, z) - x^0\| \leq 3r/4$  für  $(x, z) \in \bar{\mathfrak{K}}(x^0, r) \times \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1)$ . Schließlich erhalten wir für  $(x_i, z) \in \bar{\mathfrak{K}}(x^0, r) \times \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1)$ ,  $i = 1, 2$ , die Abschätzung

$$\|T_0(x_1, z) - T_0(x_2, z)\| \leq L \|g(x_1, z) - g(x_2, z)\| \leq \|x_1 - x_2\|/4.$$

Der Operator  $T_0(\cdot, z)$  bildet daher für jedes  $z \in \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1)$  die Kugel  $\bar{\mathfrak{K}}(x^0, r)$  in sich ab und ist dort strikt kontraktiv. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es dann zu jedem  $z \in \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1)$  genau ein  $x(z) \in \bar{\mathfrak{K}}(x^0, r)$  mit  $x(z) = T_0(x(z), z)$ ; diese Beziehung ist aber zu (6) äquivalent.

Zeigen wir die Stetigkeit der Abbildung  $x: \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1) \rightarrow X$  in  $z^0$ . Für  $z \in \bar{\mathfrak{K}}(z^0, r_1)$  gilt  $\|x(z) - x^0\| = \|T(x(z), z)\| \leq L \|g(x(z), z) - g(x^0, z^0)\| + \|A_z^{-1}w - A_0^{-1}w\|$  mit  $L \|g(x(z), z) - g(x^0, z^0)\| \leq 1/4 \|x(z) - x^0\| + L \|F(x^0, z) - F(x^0, z^0)\|$ , insgesamt also  $\|x(z) - x^0\| \leq 4/3(L \|F(x^0, z) - F(x^0, z^0)\| + \|A_z^{-1}w - A_0^{-1}w\|)$ . Wegen der Stetigkeit von  $F$  in  $(x^0, z^0)$  und (5) konvergiert dies gegen Null, falls  $z \rightarrow z^0$  ■

## LITERATUR

- [1] LANGENBACH, A.: Über implizite Inklusionen und Bifurkation. Math. Nachr. 123 (1985), 255–270.
- [2] MARTIN, R. H.: Nonlinear operators and differential equations in Banach-spaces. New York – London – Sydney – Toronto: Wiley-Intersc. 1976.
- [3] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. Bd. I: Fixpunktsätze. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1976.

Manuskripteingang: 07. 07. 1988

## VERFASSER:

Prof. Dr. ARNO LANGENBACH  
Sektion Mathematik der Humboldt-Universität  
Unter den Linden 6  
DDR-1086 Berlin