Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (3) 1989, S. 231–236

О нетеровости линейных сингулярных интегральных уравнений в весовых лебеговых пространствах

В. А. Пааташвили

Посвящается С. Г. Михлину по случаю 80-летия со дня рождения

Unter allgemeinen Voraussetzungen über die Kontur der Integration Γ und die Gewichtsfunktion ω wird die Noether-Eigenschaft einer linearen singulären Integralgleichung mit beschränkten meßbaren Koeffizienten in einem Lebesgueschen Gewichtsraum $L_p(\Gamma; \omega)$ auf die Noether-Eigenschaft einer analogen Gleichung in einem gewichtslosen Raum $L_p(\Gamma)$ zurückgeführt.

При общих предположениях относительно контура интегрирования Γ и весовой функции ω вопрос нетеровости линейного сингулярного интегрального уравнения с ограниченными измеримыми коэффициентами в весовом лебеговом пространстве $L_p(\Gamma; \omega)$ сводится к исследованию нетеровости аналогичного уравнения в пространстве без веса $L_p(\Gamma)$.

Under general assumptions with respect to the integration contour Γ and a weight function ω, the question of noetherianness of a linear singular integral equation with bounded measurable coefficients in a weighted Lebesgue space $L_p(\Gamma; \omega)$ is reduced to the investigation of noetherianness of a similar equation in a space without weight $L_p(\Gamma)$.

Линейные сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши давно привлекают внимание математиков. Изучение этих уравнений в функциональных пространствах Лебега было начато С. Г. Михлиным ([3–5] и др.). Для привлечения внимания к этой тематике и ее развития важную роль сыграли его работа [5] и исследования Б. В. Хведелидзе ([15–17] и др.). Дальнейшие достижения в этой области отражены в работах [1, 7, 11, 17] и др. В предлагаемой заметке приводится способ сведения исследования вопросов разрешимости линейных сингулярных интегральных уравнений в весовом лебеговом пространстве к исследованию таких же уравнений в пространстве без веса. Эти последние уравнения хорошо изучены, а сведение к ним удается при достаточно общих предположениях относительно контуров интегрирования и весовых функций.

1°. Обозначим через R_p, $1 < p < \infty$, множество всех тех ориентированных спрямляемых жордановых замкнутых контуров Γ, расположенных в комплексной плоскости, для которых оператор

$$S_\Gamma: f \to S_\Gamma f, \qquad (S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau - t}, \qquad t \in \Gamma,$$

непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma)$. Положим $R = \cup \{R_p: 1 < p < \infty\}$. Известно, что для каждого $p \in (1, \infty)$ имеет место равенство $R_p = R$ (см. [9], а также [17: стр. 72–73]). Конечную область, ограниченную контуром Γ будем обозначать через $\mathscr{D}^+$, а дополнение множества $\mathscr{D}^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости — через $\mathscr{D}^-$. Через $W_p(\Gamma)$ будем обозначать множество всех тех почти всюду конечных и отличных от нуля функций ω, для которых оператор S_Γ непрерывен в пространстве $L_p(\Gamma; \omega) := \{f: \omega f \in L_p(\Gamma)\}$, или, что тоже самое, оператор непрерывен в $L_p(\Gamma)$. Совокупность всех функций вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + c, \qquad z \notin \Gamma,$$

где $f \in L_p(\Gamma;\omega)$, а c — произвольная постоянная, будем обозначать через $K_p(\Gamma;\omega)$. Положим $K_p(\Gamma;1) = K_p(\Gamma)$. Будем говорить, что заданная на Γ *функция* G *факторизуема в классе* $K_p(\Gamma;\omega)$, если существует такая функция X и целое число $\varkappa$, что

(i) $X \in K_p(\Gamma;\omega)$, $X(\infty) \neq 0$, $X^{-1} \in K_q(\Gamma;\omega^{-1})$, $q = p/(p-1)$;

(ii) почти всюду на Γ справедливо равенство $G(t) = (t-a)^\varkappa X^+(t)/X^-(t)$, где $X^+(t)$ и $X^-(t)$ угловые граничные значения в точке t функции X изнутри, соответственно, извне, а точка a принадлежит области $\mathcal{D}^+$;

(iii) оператор

$$T: f \to Tf, \qquad (Tf)(t) = \frac{X^+(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t}, \qquad t \in \Gamma \tag{1}$$

непрерывен в $L_p(\Gamma;\omega)$.

Функция

$$X_1(z) = \begin{cases} X(z), & z \in \mathcal{D}^+,\\ (z-a)^{-\varkappa} X(z), & z \in \mathcal{D}^-,\end{cases}$$

называется факторфункцией G.

2°. Рассмотрим в $L_p(\Gamma;\omega)$ уравнение

$$a\varphi + bS_\Gamma\varphi + V\varphi = g, \tag{2}$$

где a, b — ограниченные, измеримые на Γ функции, $g \in L_p(\Gamma;\omega)$, а V — вполне непрерывный в $L_p(\Gamma;\omega)$ оператор. Поскольку нас будет интересовать вопрос нетеровости уравнения (2) и известно, что оно нетерово лишь одновременно с уравнением $a\varphi + bS_\Gamma\varphi = g$, то мы ограничимся рассмотрением этого последнего уравнения.

3°. Теорема: *Пусть $\Gamma \in R$, $\omega \in W_p(\Gamma)$ и существует такая действительная ограниченная функция μ, что*

$$\omega(t) = \exp\frac{1}{2}(S_\Gamma\mu)(t). \tag{3}$$

Если a, b — ограниченные измеримые функции на Γ и

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\Gamma} |a^2(t) - b^2(t)| > 0, \tag{4}$$

то уравнение

$$a\varphi + bS_\Gamma\varphi = g \tag{5}$$

является нетеровым в пространстве $L_p(\Gamma;\omega)$ тогда и только тогда, когда нетерово в пространстве $L_p(\Gamma)$ уравнение

$$a_1\psi + b_1S_\Gamma\psi = g_1, \tag{6}$$

где $a_1 = a(1 + m) + b(1 - m)$, $b_1 = a(1 - m) + b(1 + m)$, $m(t) = \exp i\mu(t)$, $t \in \Gamma$. *При одновременной нетеровости уравнения* (5) *и* (6) *имеют одинаковый индекс.*

При доказательстве будем опираться на следующее утверждение: в принятых предположениях относительно коэффициентов нетеровость уравнения (5) в пространстве $L_p(\Gamma; \omega)$ равносильно факторизуемости в $K_p(\Gamma; \omega)$ функции $G = (a - b)(a + b)^{-1}$. Это утверждение при $\omega = 1$ доказано И. Б. Симоненко ([12], а также [13]); случай степенного веса рассмотрен в [1: стр. 272—275]. Небольшими изменениями в доказательстве из [12] убеждаемся в справедливости утверждения и при предположении $\omega \in W_p(\Gamma)$.

Пусть теперь (5) нетерово в $L_p(\Gamma; \omega)$ и покажем нетеровость в $L_p(\Gamma)$ уравнения (6). Для этого, в силу приведенного утверждения, достаточно установить факторизуемость в $L_p(\Gamma)$ функции $G_1 = (a_1 - b_1)(a_1 + b_1)^{-1}$. Из нетеровости в $L_p(\Gamma; \omega)$ уравнения (5) следует факторизуемость в $K_p(\Gamma; \omega)$ функции $G = (a - b)(a + b)^{-1}$. Пусть X_1 является ее факторфункцией в этом классе. Покажем, что функция

$$Z_1 = X_1 M, \tag{7}$$

где

$$M(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau - z}\right), \quad z \notin \Gamma, \tag{8}$$

является факторфункцией для G в $K_p(\Gamma)$. Для этого нам следует проверить для нее выполнения свойств (i)—(iii).

(i) Установим сперва, что $M \in K_q(\Gamma; \omega^{-1})$. В силу теоремы 1 из работы [2] функция $M - 1$ принадлежит в областях $\mathcal{D}^\pm$ классу Смирнова E_δ, для некоторого $\delta > 0$. Кроме того, как нетрудно проверить, $M^\pm(t) = \omega(t)\, m^{\pm 1/2}(t)$ и так как $\omega \in W_p(\Gamma) \subset L_p(\Gamma)$, то $M^\pm \in L_p(\Gamma)$. В силу условия $\Gamma \in R$, $\mathcal{D}^\pm$ являются областями Смирнова [14], поэтому заключаем, что функция $M - 1$ принадлежит $E_p(\mathcal{D}^\pm)$. Но тогда она представима интегралом типа Коши с плотностью $M^+(t) - M^-(t) = \omega(t)\big(m(t) - m^{-1}(t)\big)$. Очевидно эта функция принадлежит $L_q(\Gamma; \omega^{-1})$ (напомним, что $q = p/(p - 1)$), поэтому $M \in K_q(\Gamma; \omega^{-1})$, причем $M(\infty) = 1$. Таким образом, $X \in K_p(\Gamma; \omega)$ (по предположению) и $M \in K_q(\Gamma; \omega^{-1})$, $X(\infty)\, M(\infty) \neq 0$. Как известно, в этом случае функция $Z = XM$ представима интегралом типа Коши с постоянной главной частью на бесконечности [17: стр. 98—99], причем плотность соответствующего интеграла будет $z(t) = Z^+(t) - Z^-(t)$. Но

$$Z^\pm(t) = X^\pm(t)\,\omega(t)\, m^{\pm 1/2}(t) \tag{9}$$

и в этих равенствах $X^+ \in L_p(\Gamma; \omega)$. Поскольку $X^-(t) = G(t)\,(t - a)^{-\varkappa} X^+(t)$, а в силу условия (4) имеем $\operatorname{ess\,inf} |G| > 0$, то и $X^- \in L_p(\Gamma; \omega)$. Теперь из (9) заключаем, что $Z^\pm \in L_p(\Gamma)$;; тем самым $z \in L_p(\Gamma)$ и значит $Z \in K_p(\Gamma)$. Аналогично показывается справедливость включения $Z^{-1} \in K_q(\Gamma; \omega^{-1})$, следует лишь учесть, что если $\omega \in W_p(\Gamma)$, то $\omega^{-1} \in W_q(\Gamma)$

(ii) Из равенства $Z^+(t) = X^+(t)\,\omega(t)\, m^{1/2}(t)$ и предположения, что оператор T, заданный равенством (1), непрерывен в $L_p(\Gamma; \omega)$, сразу следует непрерывность в $L_p(\Gamma)$ оператора $Z S_\Gamma Z^{-1}$.

(iii) Имеем

$$\frac{Z_1^+(t)}{Z_1^-(t)} = \frac{X_1^+(t)\, M^+(t)}{X_1^-(t)\, M^-(t)} = (t - a)^{\varkappa}\, \frac{X^+(t)\, M^+(t)}{X^-(t)\, M^-(t)} = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\, m(t).$$

С другой стороны нетрудно проверить справедливость равенства

$$\frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(t) + b_1(t)} = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} m(t).$$

Таким образом, функция Z_1 дает факторизацию функции G_1 в классе $K_p(\Gamma)$ и тем самым уравнение (6) оказывается нетеровым в $L_p(\Gamma)$. Из (7) видно, что функции X_1 и Z_1 имеют одинаковый порядок на бесконечности. Поэтому соответствующие этим факторфункциям интегральные уравнения (5) и (6) имеют одинаковый индекс (равный $\varkappa$) в классах $K_p(\Gamma; \omega)$ и $K_p(\Gamma)$, соответственно.

Пусть (6) нетерово в классе $L_p(\Gamma)$ и Z_1 факторфункция для G_1 в $K_p(\Gamma)$. Пусть $X_1 = Z_1 M^{-1}$, где M определена равенством (3), а

$$Z_1(z) = \begin{cases} Z(z), & z \in \mathcal{D}^+, \\ (z - a)^{-\varkappa} Z(z), & z \in \mathcal{D}^-. \end{cases}$$

Покажем, что X_1 факторфункция для G в классе $K_p(\Gamma; \omega)$. Так как рассуждения аналогичны проведенным выше, то останавливаемся несколько подробнее лишь о свойстве (i). Поскольку

$$1/M^+(t) = \omega^{-1}(t)\, m^{1/2}(t) \tag{10}$$

и $\omega^{-1} \in W_q(\Gamma)$, то как и выше установим, что $(M^{-1} - 1) \in E_q(\mathcal{D}^\pm)$; поэтому функция $M^{-1} - 1$ представима интегралом типа Коши с плотностью из $L_q(\Gamma)$. Отсюда следует представимость интегралом типа Коши и функции XM^{-1}. Ее плотностью будет

$$\frac{X^+(t)}{M^+(t)} - \frac{X^-(t)}{M^-(t)} = \frac{X^+(t)}{M^+(t)} \left(1 - \frac{1}{G(t)\, m(t)}\right),$$

которая (с учетом (10)) принадлежит $L_p(\Gamma; \omega)$. Значит $X = ZM^{-1} \in K_p(\Gamma; \omega)$. Таким же образом устанавливаются остальные свойства факторфункции. Итак, G факторизуема в классе $K_p(\Gamma; \omega)$, откуда следует нетеровость уравнения (5) в классе $L_p(\Gamma; \omega)$. Очевидно также, что и на этот раз индексы уравнений (5) и (6) (в соответствующих классах) равны.

4°. Уравнения вида (6) в классах $L_p(\Gamma)$ хорошо изучены (см. напр. [1, 7, 11, 16, 17] и др.). Известны критерии их нетеровости и условия разрешимости, а в ряду важнейших случаев построены решения. Поэтому опираясь на эти результаты можно получать соответствующие утверждения относительно разрешимости уравнения (5) в пространствах $L_p(\Gamma; \omega)$. На этом мы останавливаться не будем.

В дополнение доказанного можно указать взаимнооднозначное соответствие между решениями уравнений (5) и (6). А именно, если φ — решение (5) класса $L_p(\Gamma; \omega)$ и M — функция заданная равенством (8), то

$$\psi = \frac{1}{2}(M^+ + M^-)\varphi + \frac{1}{2}(M^+ - M^-) S_\Gamma \varphi$$

будет решением класса $L_p(\Gamma)$ уравнения (6) при правой части $g_1 = g/M^+$. Если же ψ — решение уравнения (6) класса $L_p(\Gamma)$, то

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^+} + \frac{1}{M^-}\right)\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^+} - \frac{1}{M^-}\right) S_\Gamma \psi$$

будет решением из $L_p(\Gamma; \omega)$ уравнения (5) с правой частью $g = g_1 M^+$.

5°. Относительно весовой функции ω мы приняли предположение, что она представима в виде (3). Это условие в дополнение предположения $\omega \in W_p(\Gamma)$ может показаться несколько жестким. Однако, в ряде случаев, например, когда Γ — ляпуновский контур для любой функции $\omega \in W_p(\Gamma)$ существует такая действительная ограниченная функция, что ω представима в виде (3) (см. [10]). Так, что при рассмотрении уравнения (5) на таких контурах, относительно веса остается только требование $\omega \in W_p(\Gamma)$. Это условие уже необходимо. Действительно, для рассмотрения уравнения (5) в классе $L_p(\Gamma; \omega)$ минимальным требованием будет предположение, что оператор S_Γ действует из $L_p(\Gamma; \omega)$ в $L_p(\Gamma; \omega)$. Но отсюда следует, что $\omega \in W_p(\Gamma)$ (см. [9]; там доказано, что если оператор S_Γ действует из $L_p(\Gamma)$ в $L_p(\Gamma)$, $p > 1$, то он непрерывен. Доказательство состоятельно и в случае пространства $L_p(\Gamma; \omega)$).

6°. Все результаты из работ [2, 8—10, 12—14, 17], используемые при доказательстве теоремы из 3°, остаются в силе, когда в уравнениях (5), (6) заданные элементы a, b, a_1, b_1 являются матрицами, а искомые φ, ψ и заданные элементы g, g_1 векторами, поэтому можно доказать аналог теоремы и для систем сингулярных уравнений. На этом мы не останавливаемся.

7°. В работе [8] в случае ляпуновских контуров и частного вида весовых функций было показано, как можно задачу линейного сопряжения в классе $K_p(\Gamma; \omega)$ сводить к исследованию аналогичной задачи в классе $K_p(\Gamma)$. В последующем этот результат был обобщен в [2]. В работе [6] приведен аналог доказанной в 3° теоремы в случае степенных весовых функций и ляпуновских контуров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гохберг, И. Ц., и Н. Я. Крупник: Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинёв: Изд-во Штиница 1973.

[2] Кокилашвили, В. М., и В. А. Пааташвили: Краевая задача линейного сопряжения с измеримыми коэффициентами. Тр. Тбилисского мат. ин-та **55** (1977), 59—92.

[3] Михлин, С. Г.: Распространение операции сингулярного интегрирования на пространстве L_2. Докл. Акад. наук СССР **19** (1938) 5, 353—355.

[4] Михлин, С. Г.: Об одном классе интегральных уравнений. Докл. Акад. наук СССР **24** (1939) 4, 315—317.

[5] Михлин, С. Г.: Сингулярные интегральные уравнения. Успехи мат. наук **3** (1948) 3, 29—112.

[6] Нягa, В. И.: О символе сингулярных интегральных операторов в случае кусочно-ляпуновского контура. В сб.: Мат. исследования (Кишинёв: Изд-во Штиница) **9** (1974) 2, 109—125.

[7] Michlin, S. G., and S. Prössdorf: Singular integral equations. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1986.

[8] Пааташвили, В. А.: О разрывной задаче линейного сопряжения. Сообщ. Акад. наук ГрузССР **34** (1964), 539—540.

[9] Пааташвили, В. А.: О сингулярных интегралах Коши. Сообщ. Акад. наук ГрузССР **53** (1969), 529—532.

[10] Пааташвили, В. А.: Об ограниченности сингулярного интеграла Коши в лебеговых пространствах с весом. Тр. Тбилисского мат. ин-та **43** (1973), 112—119.

[11] Пресдорф, З.: Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва: Изд-во Мир 1979.

[12] Симоненко, И. Б.: Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана. Изв. Акад. наук СССР, Сер. мат. **32** (1968), 1138—1146.

[13] Симоненко, И. Б.: О глобальной и локальной факторизуемости измеримой матрицы функции и нетеровость порожденного ею сингулярного оператора. Известия ВУЗ-ов „Математика" **4** (1983), 81—87.

[14] Хавин, В. П.: Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей. Мат. сб. **68** (1965), 499—517.

[15] Хведелидзе, Б. В.: Сингулярные интегральные уравнения в особых интегралах Коши-Лебега. Сообщ. Акад. наук ГрузССР **8** (1947), 427—434.

[16] Хведелидзе, Б. В.: Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. Тр. Тбилисского мат. ин-та **23** (1956), 3—158.

[17] Хведелидзе, Б. В.: Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной. Итоги науки и техники, серия „Современные проблемы математики" **7** (1975), 5—162.

Manuskripteingang: 25. 05. 1988

VERFASSER

В. А. Пааташвили
Математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР
ул. З. Рухадзе 1
СССР-380093 Тбилиси