Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (4) 1989, S. 329–347

Разрешимость одной некоэрцитивной начально-краевой задачи для системы Стокса в гельдеровских классах функций (случай полупространства)

И. Ш. Могилевский и В. А. Солонников

Посвящается С. Г. Михлину к восьмидесятилетию его рождения

Es wird eine Anfangsrandwertaufgabe im Halbraum $\mathbb{R}_+^3$ $(x_3 > 0)$ für die Stokesschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung in den Randbedingungen betrachtet. Die eindeutige Lösbarkeit dieser Aufgabe in Hölderschen Räumen wird bewiesen. Der Beweis beruht auf den Abschätzungen der Lösung in $\mathbb{R}_\infty = \{(x, t): x \in \mathbb{R}_+^3, t > 0\}$, die mit den Methoden der Theorie der Fourier-Multiplikatoren erhalten wurden.

В полупространстве $\mathbb{R}_+^3$ $(x_3 > 0)$ рассматривается начально-краевая задача для линейной системы Стокса с граничным условием, учитывающим поверхностное натяжение. Доказана однозначная разрешимость этой задачи в пространствах Гельдера. Доказательство основано на оценках решения задачи в $\mathbb{R}_\infty = \{(x, t): x \in \mathbb{R}_+^3, t > 0\}$ методами теории мультьтипликаторов Фурье.

The initial-boundary value problem for the Stokes system with the surface tension in boundary conditions is considered in the half-space $\mathbb{R}_+^3$ $(x_3 > 0)$. This unique solubility of this problem in Hölder spaces is proved. The proof is based on estimates of the solution in $\mathbb{R}_\infty = \{(x, t): x \in \mathbb{R}_+^3, t > 0\}$. These estimates are obtained by methods of the Fourier multipliers theory.

§ 1. Введение

В [6] исследована задача о неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью (с учетом сил поверхностного натяжения) в пространствах С. Л. Соболева. Эта задача сводится к некоэрцитивной начально-краевой задаче для системы уравнений Навье-Стокса, существенным моментом при исследовании которой является анализ линеаризованной задачи в неизменяющейся со временем области. В ней речь идет об определении векторного поля $\vec{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ и скалярной функции $p(x, t)$, удовлетворяющих в цилиндре $Q_T = \{(x, t): x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, t \in (0, T)\}$ (Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$) нестационарной системе уравнений Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \Delta \vec{v} + \nabla p = \vec{f}, \qquad \nabla \cdot \vec{v} = \varrho, \tag{1.1}$$

при $t = 0$ начальному условию

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \tag{1.2}$$

а на поверхности $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ краевым условиям

$$\begin{gathered} \Pi \mathsf{S}(\vec{v})\, \vec{n}|_{\Gamma_T} = \Pi \vec{b}, \\ \vec{n} \cdot \mathsf{T}(\vec{v}, p)\, \vec{n} - \sigma \vec{n} \cdot \int_0^t \Delta' \vec{v}(x, \tau)\, d\tau|_{\Gamma_T} = b + \sigma \int_0^t d(x, \tau)\, d\tau. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ — оператор Гамильтона (так что $\nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v}$), $\mathsf{S}(\vec{v})$ — тензор скоростей деформации с элементами $\mathsf{S}_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$, $\vec{n}(x)$ — вектор внешней нормали к Γ в точке x, Π — оператор проектирования на плоскость, касательную к Γ в точке x $\left(\Pi\vec{g} = \vec{g} - \vec{n}(\vec{g}\cdot\vec{n})\right)$, $\mathsf{T}(\vec{v}, p) = -p\mathsf{I} + \mathsf{S}(\vec{v})$ — тензор напряжений, σ — положительная постоянная (коэффициент поверхностного натяжения), Δ' — оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности Γ. Наша цель состоит в доказательстве разрешимости задачи (1.1)—(1.3) в анизотропных гельдеровских классах функций. В настоящей работе рассматривается модельная задача в полупространстве $\mathbb{R}_+^3$ $(x_3 > 0)$.

Напомним определение гельдеровских пространств. Пусть G область из $\mathbb{R}^n$ (здесь мы будем иметь дело лишь со случаями $G = \mathbb{R}_+^3$ и $G = \mathbb{R}^2$), T — положительное число (случай $T = \infty$ не исключается), $G_T = G \times (0, T)$ и $\alpha \in (0, 1)$. Через $C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$ обозначим пространство функций, заданных в G_T, ограниченных и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α по переменным $x \in G$ и с показателем $\alpha/2$ по переменной $t \in (0, T)$. Норма в $C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$ задается выражением

$$|f|_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = |f|_{G_T} + \langle f\rangle_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)},$$

где

$$|f|_{G_T} = \sup_{(x,t)\in G_T} |f(x,t)|, \qquad \langle f\rangle_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = \langle f\rangle_{x,G_T}^{(\alpha)} + \langle f\rangle_{t,G_T}^{(\alpha/2)},$$

$$\langle f\rangle_{x,G_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,y\in G;\, t\in(0,T)} |x-y|^{-\alpha}\, |f(x,t) - f(y,t)|,$$

$$\langle f\rangle_{t,G_T}^{(\beta)} = \sup_{x\in G;\, t,\tau\in(0,T)} |t-\tau|^{-\beta}\, |f(x,t) - f(x,\tau)|, \qquad \forall \beta \in (0, 1).$$

$C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — это пространство заданных в G_T функций с нормой

$$|f|_{G_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)} = \sum_{r+2s\leq k} |\mathcal{D}_x^r \mathcal{D}_t^s f|_{G_T} + \langle f\rangle_{G_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)},$$

где

$$r = (r_1, \ldots, r_n), \qquad r_i \geqq 0, \qquad |r| = r_1 + \cdots + r_n, \qquad \mathcal{D}_x^r = \frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}},$$

$$\langle f\rangle_{G_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)} = \sum_{|r|+2s=k} \langle \mathcal{D}_x^r \mathcal{D}_t^s f\rangle_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \sum_{|r|+2s=k-1} \langle \mathcal{D}_x^r \mathcal{D}_t^s f\rangle_{t,G_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}.$$

Аналогично определяются и теми же символами обозначаются пространства вектор-функций $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$. При этом, если $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, то $|\vec{f}|_{G_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)} = \max_i |f_i|_{G_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)}$.

Будем рассматривать пространства $C^{k+\alpha}(G)$ функций, заданных в G и имеющих конечную норму

$$|f|_G^{(k+\alpha)} = \sum_{|r|\leq k} |\mathcal{D}^r f|_G + \langle f\rangle_G^{(k+\alpha)},$$

где

$$\langle f\rangle_G^{(k+\alpha)} = \sum_{|r|=k} \langle \mathcal{D}^r f\rangle_G^{(\alpha)} = \sum_{|r|=k} \sup_{x,y\in G} |x-y|^{-\alpha}\, |\mathcal{D}^r f(x) - \mathcal{D}^r f(y)|.$$

Понадобится нам также полунорма

$$|f|_{G_T}^{(1+\alpha,\gamma)} = \sup_{x,y\in G} \sup_{t,\tau\in(0,T)} |x-y|^{-\gamma} |t-\tau|^{-\frac{1+\alpha-\gamma}{2}} |f(x,t) - f(y,t) - f(x,\tau) + f(y,\tau)|,$$

где $\alpha, \gamma \in (0, 1)$. В [4] установлено, что при гладкой границе ∂G будет $|f|_{G_T}^{(1+\alpha,\gamma)} \leqq c\langle f\rangle_{G_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}$.

Множество функций из $C^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяющих нулевым начальным условиям $(\partial^m f/\partial t^m)|_{t=0} = 0$ $(m = 0, \ldots, [k/2])$ обозначим $\overset{\circ}{C}{}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$. Функции из $\overset{\circ}{C}{}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$ продолжаются нулем в область $t < 0$ с сохранением класса. Очевидно, что для функций из $\overset{\circ}{C}{}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$ при конечном T справедливы неравенства

$$|f|_{G_T} \leqq T^{\alpha/2} \langle f\rangle_{t,G_T}^{(\alpha/2)}, \qquad \langle f\rangle_{t,G_T}^{(\alpha/2)} \leqq T\langle \partial f/\partial t\rangle_{t,G_T}^{(\alpha/2)}.$$

Из них следует, что в $\overset{\circ}{C}{}^{k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}}(G_T)$ нормам (2.1) и (2.3) эквивалентны соответственно нормы $\langle f\rangle_{G_T}^{(\alpha,\alpha/2)}$ и $\langle f\rangle_{G_T}^{\left(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2}\right)}$ $(k = 1, 2)$.

§ 2. Начально-краевая задача для однородной системы Стокса

Введем обозначения: $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon x_3 > 0\}$, $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R}_+^3 \times (0, \infty) = \{(x, t)\colon x \in \mathbb{R}_+^3, t > 0\}$, $\mathbb{D}_\infty = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) = \{(y, t)\colon y \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$, $\mathbb{D}_T = \mathbb{R}^2 \times (0, T)$, $\mathbb{R}_T = \mathbb{R}^3{}_+ \times (0, T)$. Рассмотрим в области $\mathbb{R}_\infty$ задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \Delta\vec{v} + \nabla p = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0, \qquad \vec{v}|_{t=0} = 0,\\
\left.\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right|_{x_3=0} = b_1, \qquad \left.\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right|_{x_3=0} = b_2,\\
-p + 2\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \sigma\int_0^t \Delta' v_3\, d\tau|_{x_3=0} = b_3,
\end{gathered}\tag{2.1}$$

где $\Delta' f = (\partial/\partial x_1)^2 f + (\partial/\partial x_2)^2 f$. Потребуем, чтобы $\vec{v} \to 0$ при $|x| \to \infty$. Будем считать, что все функции удовлетворяют нулевым начальным условиям и поэтому их можно продолжить нулем в область $t < 0$ с сохранением класса. За продолженными функциями сохраним прежние обозначения.

Обозначим через $FL[f(x_1, x_2, x_3, t)]$ преобразование Фурье функции f по переменным x_1, x_2 и преобразование Лапласа по t, т. е.

$$\tilde{f}(\xi, x_3, s) \equiv FL[f] = \int_{\mathbb{R}^2} dx' \int_0^\infty f(x', x_3, t) \exp(-ix'\cdot\xi) \exp(-st)\, dt, \tag{2.2}$$

где, $x' = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $x' \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$, $s = a + i\xi_0$, $a > 0$. Через $F[f]$ будем обозначать преобразование Фурье функции f по переменным x_1, x_2, t, т.е.

$$\hat{f}(\xi, x_3, \xi_0) \equiv F[f] = \int_{\mathbb{R}^2} dx' \int_0^\infty f(x', x_3, t) \exp\left(-i(x' \cdot \xi + t\xi_0)\right) dt. \tag{2.3}$$

Преобразования (2.2) и (2.3) связаны соотношением

$$FL[f] = F[f_a] \quad \text{или} \quad \tilde{f} = \hat{f}_a, \tag{2.4}$$

где $f_a(x, t) = f(x, t) \exp(-at)$.

Применим к задаче (2.1) преобразование (2.2). В [8] для преобразованных функций $\tilde{v}_j$ и $\tilde{p}$ получено представление

$$\begin{aligned} \tilde{v}_j = &-\frac{\tilde{b}_j}{r} \exp(-rx_3) \\ &+ \frac{i\xi_j}{rP} \left\{(|\xi| - 3r)(r - |\xi|) B + r(r - |\xi|)^2 \tilde{b}_3 - \frac{\sigma\xi^2}{r + |\xi|} B\right\} \exp(-rx_3) \\ &+ \frac{i\xi_j(r - |\xi|)}{P} \left\{\left(2r + \frac{\sigma\xi^2}{s}\right) B - (r^2 + \xi^2) \tilde{b}_3\right\} E(x_3) \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_3 = &-\frac{1}{P} \{(r - |\xi|)^2 B + |\xi| (r^2 - \xi^2) \tilde{b}_3\} \exp(-rx_3) \\ &- \frac{r - |\xi|}{P} \left\{\left(2r|\xi| + \sigma \frac{|\xi|}{s}\right) B - |\xi| (r^2 + \xi^2) \tilde{b}_3\right\} E(x_3), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\tilde{p} = \frac{sr}{P} \left\{\left(2 + \sigma \frac{\xi^2}{sr}\right) B - \left(r + \frac{\xi^2}{r}\right) \tilde{b}_3\right\} \exp(-|\xi| x_3), \tag{2.7}$$

где

$$r = \sqrt{s + \xi^2} \quad (\operatorname{Re} r > 0), \quad B = i\xi_1\tilde{b}_1 + i\xi_2\tilde{b}_2,$$

$$E(x_3) = (r - |\xi|)^{-1} [\exp(-rx_3) - \exp(-|\xi| x_3)]$$

и

$$P = s^2 + 4s\xi^2 \frac{r}{r + |\xi|} + \sigma |\xi|^3. \tag{2.8}$$

Пусть

$$\tilde{u} = \tilde{f}\tilde{g}. \tag{2.9}$$

Применим к (2.9) преобразование F^{-1}, обратное к (2.3), и воспользуемся теоремой о свертке и соотношением (2.4). Получим

$$u_a = \int_{\mathbb{R}^2} dy' \int_0^\infty f_a(x - y', t - \tau) g_a(y', x_3, \tau) d\tau, \tag{2.10}$$

где $x - y' = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3)$. Обозначим

$$K_1 = \frac{sr}{P} \left[\left(2 + \frac{\sigma\xi^2}{sr}\right) B - \left(r + \frac{\xi^2}{r}\right) \tilde{b}_3\right]. \tag{2.11}$$

Применяя к (2.7) преобразование F^{-1} и пользуясь (2.4), получим

$$p_a(x, t) = F^{-1}[K_1 \exp(-|\xi|\, x_3)]. \tag{2.12}$$

Функция p_a есть решение задачи Дирихле в $\mathbb{R}_+^3$: $\Delta p_a = 0$, $p_a|_{x_3=0} = F^{-1}[K_1]$. Используя хорошо известные (см. напр. [1]) оценки решения задачи Дирихле, получим

$$\langle \nabla p_a \rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}\infty} \leqq c_1 \langle F^{-1}[K_1] \rangle^{(1+\alpha)}_{x',\mathbb{D}\infty}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим теперь функцию $p_a' = F^{-1}[-|\xi|^{-1} K_1 \exp(-|\xi|\, x_3)]$. Из (2.12) следует, что $\partial p_a'/\partial x_3 = p_a$. Кроме того, функция p_a' есть решение следующей задачи Неймана: $\Delta p_a' = 0$, $(\partial p_a'/\partial x_3)|_{x_3=0} = F^{-1}[K_1]$. Для решения этой задачи в [7: лемма 7] установлена оценка

$$\left\langle \frac{\partial^2 p_a'}{\partial x_j\, \partial x_k} \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\mathbb{R}\infty} \leqq c_2 \langle F^{-1}[K_1] \rangle^{\left(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{D}\infty} \qquad (j, k = 1, 2, 3). \tag{2.14}$$

Т. к. $\langle \nabla p_a \rangle^{(\alpha/2)}_{t,\mathbb{R}\infty} \leqq \sum\limits_{k=1}^{3} \left\langle \dfrac{\partial^2 p_a'}{\partial x_k\, \partial x_3} \right\rangle^{(\alpha/2)}_{t,\mathbb{R}\infty}$, то из (2.13) и (2.14) получим

$$\langle \nabla p_a \rangle^{(\alpha,\alpha/2)}_{\mathbb{R}\infty} \leqq c_3 \langle F^{-1}[K_1] \rangle^{\left(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{D}\infty}. \tag{2.15}$$

Норму, стоящую в правой части (2.15), мы оценим позже, а пока вычислим $\tilde{v}|_{x_3=0}$. Функция $E(x_3)$, фигурирующая в формулах (2.5)—(2.6), при $x_3 = 0$ обращается в ноль. Поэтому

$$\tilde{v}_k|_{x_3=0} = K_{2k} \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{2.16}$$

где

$$K_{2j} = -\frac{\tilde{b}_j}{r} + \frac{i\xi_j}{rP} \left\{ (|\xi| - 3r)(r - |\xi|)\, B + r(r - |\xi|)^2\, \tilde{b}_3 - \frac{\sigma\xi^2}{r + |\xi|}\, B \right\}$$

$(j = 1, 2)$,

$$K_{23} = -\frac{1}{P}\, \{(r - |\xi|)^2\, B + |\xi|\, (r^2 - \xi^2)\, \tilde{b}_3\}.$$

Применяя к (2.16) преобразование F^{-1} и учитывая (2.4), получим

$$v_{ka}|_{x_3=0} = F^{-1}[K_{2k}] \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{2.17}$$

Нашей ближайшей целью является оценка норм функций $F^{-1}[K_1]$ и $F^{-1}[K_{2k}]$ через соответствующие нормы вектора краевых условий $\tilde{b}$. Докажем предварительно лемму.

Лемма 3.1: *Пусть* $f \in \mathring{C}^{3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_\infty)$, *тогда*

$$\langle F^{-1}[|\xi|\, Ff] \rangle^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}_{\mathbb{D}\infty} \leqq c_1 \langle f \rangle^{\left(3+\alpha, \frac{3+\alpha}{2}\right)}_{\mathbb{D}\infty}. \tag{2.18}$$

Доказательство: Рассмотрим функцию $v(x, t) = F^{-1}[\exp(-|\xi|\, x_3)\, Ff]$. Она есть решение задачи Дирихле $\Delta v = 0$, $v|_{x_3=0} = f$. Из известной оценки решения задачи Дирихле выводим

$$\langle F^{-1}[-|\xi|\, Ff] \rangle^{(2+\alpha)}_{x',\mathbb{D}\infty} = \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} \right\rangle^{(2+\alpha)}_{x',\mathbb{D}\infty} \leqq \langle v \rangle^{(3+\alpha)}_{x,\mathbb{R}\infty} \leqq c_2 \langle f \rangle^{(3+\alpha)}_{x',\mathbb{D}\infty}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим теперь функцию $v'(x, t) = F^{-1}[-|\xi|^{-1} Ff \exp(-|\xi| x_3)]$. Имеем $\Delta v' = 0$, $(\partial v'/\partial x_3)|_{x_3=0} = f$. Применяя к производной $\partial v'/\partial t$ оценку (2.14), установленную в [7], получаем

$$\langle F^{-1}[|\xi|\ Ff]\rangle_{t,\mathbb{D}_\infty}^{(1+\alpha/2)} \leqq \left\langle \frac{\partial^3 v'}{\partial x_3^2\, \partial t} \right\rangle_{t,\mathbb{R}_\infty}^{(\alpha/2)} \leqq c_3 \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)}$$

Кроме того, как показано в [7], при $j = 1, 2$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} F^{-1}[|\xi|\ Ff] \right\rangle_{t,\mathbb{D}_\infty}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \leqq \left\langle \frac{\partial^3 v'}{\partial x_3^2\, \partial x_j} \right\rangle_{t,\mathbb{R}_\infty}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \leqq c_4 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}.$$

Отсюда и из предыдущих оценок следует (2.18) ∎

Имея в виду воспользоваться некоторыми результатами [3], сформулируем соответствующие предложения. Пусть $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \omega \subset [0, 1]$ и $\int_0^1 \omega(z)\, dz = 1$. Пусть, далее, $\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{k} \omega\left(\frac{z}{k}\right)$, n — натуральное и $\Psi(y, y_0) = \psi(y_1) \times \psi(y_2)\, \psi(y_0)$, $y = (y_1, y_2)$. Ясно, что Ψ есть финитная и бесконечно дифференцируемая функция. Обозначим через $Y_i(h)$ оператор усреднения по переменной y_i $(i = 1, 2)$:

$$Y_i(h)\, f(y, t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(y - ze_i, t)\, \psi(z/h)\, dz$$

(e_i — орт i-ой оси координат), $Y_0(h)$ — оператор усреднения по переменной t:

$$Y_0(h)\, f(y, t) = \frac{1}{h} \int_0^\infty f(y, t - z)\, \psi(z/h)\, dz.$$

Положим $Y(h) = Y_1(h)\, Y_2(h)$, $Y_0(h^2)$, $\tilde{Y}(h) = \prod_{k=0}^{\infty} Y(h\, 2^{-k})$. Как показано в [3], в пространстве $\mathring{C}^{2l,l}(\mathbb{D}_\infty)$ норме $\langle f\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(2l,l)}$ эквивалентна норма

$$|f|_{2l,l} = \sum_{i=1}^{2} \sup_{h>0} \left[h^{-2l+m_i} \left\| \frac{\partial^{m_i}}{\partial x_i^{m_i}} [\tilde{Y}(h)\, f] \right\| \right] + \sup_{h>0} \left[h^{-2l+2m_0} \left\| \frac{\partial^{m_0}}{\partial t^{m_0}} [\tilde{Y}(h)\, f] \right\| \right],$$

$$\|\varphi\| = \sup_{x,t} |\varphi(x, t)|.$$

Нормы $|f|_{2l,l}$ эквивалентны при различных m_i $(i = 0, 1, 2)$, удовлетворяющих неравенствам $m_i > 2l$ $(i = 1, 2)$ и $m_0 > l$.

Пусть теперь $\tilde{u}(\xi, s) = \tilde{K}(\xi, s)\, \tilde{f}(\xi, s)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $s = a + i\xi_0$, $a > 0$ и $u(x'; t) = (FL)^{-1}\, \tilde{u}$, $f = (FL)^{-1} \tilde{f}$. Из результатов [3] следует, что если при некоторых целых неотрицательных ν_j $(j = 0, 1, 2)$ выполняются неравенства

$$\int_0^\infty z_0^{-3/2}\, dz_0 \int_0^\infty z_1^{-3/2}\, dz_1 \int_0^\infty z_2^{-3/2} \|\Delta_0(z_0)\, \Delta_1(z_1)\, \Delta_2(z_2)\, [(i\xi_j)^{\nu_j}\, \tilde{K}(\xi, s)$$

$$\times F\Psi(h\xi, h^2\xi_0)]\|_2\, dz_2 \leqq c h^{\beta - \gamma_j \varkappa_j} \quad (j = 0, 1, 2), \tag{2.20}$$

то $|u_a|_{2l+\beta,l+\beta/2} \leqq c\,|f_a|_{2l,l}$. Здесь $\Delta_k(z_k)$ — оператор конечной разности по переменной ξ_k $(k = 0, 1, 2)$: $\Delta_1(z_1)\,f(\xi, \xi_0) = f(\xi_1 + z_1, \xi_2, \xi_0) - f(\xi, \xi_0)$, $\|\cdot\|_2$ — L_2-норма по переменным ξ, ξ_0, β — вещественное число, $\varkappa_j = 1$ при $j = 1, 2$, $\varkappa_0 = 2$, h — положительное число. Преобразуем (2.20). В интеграле

$$\|\Delta_0(z_0)\,\Delta_1(z_1)\,\Delta_2(z_2)\,[(i\xi_j)^{\nu_j}\,\tilde{K}(\xi, s)\,F\Psi(h\xi, h^2\xi_0)]\|_2{}^2$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_0(z_0)\,\Delta_1(z_1)\,\Delta_2(z_2)\,[(i\xi_j)^{\nu_j}\,\tilde{K}(\xi, s)\,F\Psi(h\xi, h^2\xi_0)]|^2\,d\xi_0$$

введем новые переменные интегрированния $\eta_j = \xi_j h\,(j = 1, 2)$ и $\eta_0 = \xi_0 h^2$. Получим

$$\|\Delta_0(z_0)\,\Delta_1(z_1)\,\Delta_2(z_2)\,[(i\xi_j)^{\nu_j}\,\tilde{K}(\xi, s)\,F\Psi(h\xi, h^2\xi_0)]\|_2$$
$$= h^{-2-\nu_j\varkappa_j}\,\|\Delta_0(h^2z_0)\,\Delta_1(hz_1)\,\Delta_2(hz_2)\,[(i\eta_j)^{\nu_j}\,\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)\,F\Psi(\eta, \eta_0)]\|_2,$$

где $s_h = a + ih^{-2}\eta_0$. Подставляя полученное выражение в левую часть (2.20) и вводя во внешнем интеграле новые переменные интегрирования $y_j = hz_j$ $(j = 1, 2)$ и $y_0 = h^2z_0$, получим

$$\int_0^\infty z_0{}^{-3/2}\,dz_0 \int_0^\infty z_1{}^{-3/2}\,dz_1 \int_0^\infty z_2{}^{-3/2}\,\|\Delta_0(z_0)\,\Delta_1(z_1)\,\Delta_2(z_2)$$
$$\times\,[(i\xi_j)^{\nu_j}\,\tilde{K}(\xi, s)\,F\Psi(h\xi, h^2\xi_0)]\|_2\,dz_2$$
$$= h^{-\nu_j\varkappa_j} \int_0^\infty y_0{}^{-3/2}\,dy_0 \int_0^\infty y_1{}^{-3/2}\,dy_1 \int_0^\infty y_2{}^{-3/2}\,\|\Delta_0(y_0)\,\Delta_1(y_1)\,\Delta_2(y_2)$$
$$\times\,[(i\eta_j)^{\nu_j}\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)\,F\Psi(\eta, \eta_0)]\|_2\,dy_2.$$

Отсюда заключаем, что условия (2.20) эквивалентны следующим

$$\Gamma_h{}^{(\nu_j)}(\tilde{K}) \equiv \int_0^\infty y_0{}^{-3/2}\,dy_0 \int_0^\infty y_1{}^{-3/2}\,dy_1 \int_0^\infty y_2{}^{-3/2}\,\|\,\Delta_0(y_1)\,\Delta_1(y_1)\,\Delta_2(y_2)$$
$$\times\,[(i\eta_j)^{\nu_j}\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)\,F\Psi(\eta, \eta_0)]\|_2\,dy_2 \leqq ch^\beta \qquad (j = 0, 1, 2), \tag{2.21}$$

где константы c не зависят от h. Итак, имеет место

Теорема 2.1: *Пусть функции u и f удовлетворяют нулевым начальным условиям и связаны соотношением $\tilde{u}(\xi, s) = \tilde{K}(\xi, s)\,\tilde{f}(\xi, s)$. Тогда если существуют такие неотрицательные целые числа ν_j $(j = 0, 1, 2)$, что при некотором вещественном β и любом положительном h выполняются условия* (2.21), *то имеет место неравенство* $\langle u_a\rangle_{\mathbb{D}\infty}^{(2l+\beta,l+\beta/2)} \leqq c\langle f_a\rangle_{\mathbb{D}\infty}^{(l,l/2)}$.

Применим теорему 2.1 для оценки $F^{-1}[K_1]$ и $F^{-1}[K_{2k}]$.

Теорема 2.2: *Пусть $\tilde{K}(\xi, s)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|\tilde{K}(\xi, s)| \leqq c_1\,|r|^{-m}, \qquad |\partial\tilde{K}/\partial\xi_0| \leqq c_2\,|r|^{-m-2},$$
$$|\partial\tilde{K}/\partial\xi_j| \leqq c_3\,|r|^{-m-1}, \qquad |\partial^2\tilde{K}/\partial\xi_0\,\partial\xi_j| \leqq c_4\,|r|^{-m-3} \quad (j = 1, 2), \tag{2.22}$$
$$|\partial^2\tilde{K}/\partial\xi_1\partial\xi_2| \leqq c_5\,|r|^{-m-2}, \qquad |\partial^3\tilde{K}/\partial\xi_0\,\partial\xi_1\,\partial\xi_2| \leqq c_6\,|r|^{-m-4}$$

при $s = a + i\xi_0$, $a > 0$, $m \geqq 0$. *Тогда, если* $\nu_q > m + 2$ $(q = 1, 2)$ *и* $\nu_0 > m/2 + 1$, *то*

$$\Gamma_h{}^{(\nu_q)}(\tilde{K}) \leqq c_7 h^m \qquad (q = 0, 1, 2). \tag{2.23}$$

Неравенства (2.22) выполняются для гладких при $|s| + \xi^2 \neq 0$, $\operatorname{Re} s > 0$, ядер, однородных в смысле $\tilde{K}(\lambda\xi, \lambda^2 s) = \lambda^{-m}\tilde{K}(\xi, s)$. Отметим также, что при $\operatorname{Re} s > 0$ имеем $c_8^{-1}|r| \leqq (|s| + \xi^2)^{1/2} \leqq c_8 |r|$.

Доказательство: Разобьем каждый из трех интегралов, входящих в (2.21), на два: по промежутку $y_k \in (0, 1)$ и $y_k > 1$. В тех интегралах, где $y_k \in (0, 1)$, выразим конечную разность по η_k через производную и воспользуемся неравенством $\|\Delta_k(y_k) f\|_2 \leqq y_k \|\partial f/\partial\eta_k\|_2$, а в остальных интегралах — неравенством $\|\Delta_k(y_k) f\|_2 \leqq 2\|f\|_2$. Это приведет к оценке

$$\begin{aligned}
&\Gamma_h^{(\nu_q)}(\tilde{K}) \\
&\leqq 8 \sum_{i_0,i_1,i_2=1}^{2} \int_{d_{i_0}}^{d_{i_0+1}} y_0^{1/2-i_0}\,dy_0 \int_{d_{i_1}}^{d_{i_1+1}} y_1^{1/2-i_1}\,dy_1 \int_{d_{i_2}}^{d_{i_2+1}} y_2^{1/2-i_2} \\
&\quad\times \left\|\left(\frac{\partial}{\partial\eta_0}\right)^{2-i_0}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{2-i_1}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)^{2-i_2}[(i\eta_q)^{\nu_q}\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)\,F\Psi(\eta, \eta_0)]\right\|_2 dy_2 \\
&\leqq c_9 \sum_{i_0,i_1,i_2=1}^{2} \left\|\left(\frac{\partial}{\partial\eta_0}\right)^{2-i_0}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{2-i_1}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)^{2-i_2}[(i\eta_q)^{\nu_q}\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)\,F\Psi(\eta, \eta_0)]\right\|_2
\end{aligned} \tag{2.24}$$

(здесь $d_1 = 0, d_2 = 1, d_3 = \infty$). Выражение под знаком нормы является линейной комбинацией функций $L = \eta_q^{\nu_q-\theta}\phi(\eta, \eta_0)\,\mathcal{D}^\gamma\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)$, где $\mathcal{D}^\gamma$ — любая из производных, фигурирующих в (2.22), ϕ — гладкая функция, убывающая на бесконечности сверхстепенным образом (это $F\Psi$ или ее производная), $\theta = 0$ или $\theta = 1$ (если $\gamma = (1, 1, 1)$, то $\theta = 0$). В силу (2.22)

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}^\gamma\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)| &= \frac{1}{h^{\langle\gamma\rangle}}\,|\mathcal{D}^\gamma_{\xi_0\xi}\tilde{K}(\xi, a + i\xi_0)|_{\xi_k=h^{-\varkappa}\eta_k}| \\
&\leqq c_{10}h^{-\langle\gamma\rangle}\left|\sqrt{s_h + h^{-2}\eta^2}\right|^{-m-\langle\gamma\rangle} = c_{10}'h^m\left|\sqrt{ah^2 + i\eta_0 + \eta^2}\right|^{-m-\langle\gamma\rangle} \\
&\leqq \frac{c_{11}h^m}{(|\eta_0| + \eta^2)^{1/2(m+\langle\gamma\rangle)}}, \qquad \langle\gamma\rangle = 2\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция L квадратично суммируема, если ν_q удовлетворяют условию теоремы, и правая часть (2.24) не превосходит $c_6 h^m$ ∎

Лемма 2.2: *Для функции $P(\xi, s)$ (2.8) справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}
&|P(\xi, s)| \geqq c_1(|s|^2 + |s|\,\xi^2 + \sigma|\xi|^3), \\
&\left|\frac{\partial P}{\partial\xi_1}\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial\xi_2}\right| \leqq c_2(|s|\,|\xi| + \sigma\xi^2), \qquad \left|\frac{\partial^2 P}{\partial\xi_1\,\partial\xi_2}\right| \leqq c_3(|s| + \sigma|\xi|),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial P}{\partial s}\right| \leqq c_4(|s| + \xi^2), \qquad \left|\frac{\partial^2 P}{\partial s\,\partial\xi_1}\right| + \left|\frac{\partial^2 P}{\partial s\,\partial\xi_2}\right| \leqq c_5|\xi|, \\
&|\partial^3 P/\partial s\,\partial\xi_1\,\partial\xi_2| \leqq c_6
\end{aligned} \tag{2.26}$$

при условии, что $a = \operatorname{Re} s \geqq a_0 > 0$; постоянные c_i зависят от a_0.

Доказательство: Оценка (2.25) следует из рассуждений работы [8]; остальные устанавливаются после элементарных выкладок ∎

Следствие: *Если* $\operatorname{Re} s \geqq a_0 > 0$, *то*

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \xi_j}\right| |s|^{1/2} + \left|\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right| |s| + \left|\frac{\partial P}{\partial s}\right| |s| + \left|\frac{\partial^2 P}{\partial s\, \partial \xi_j}\right| |s|^{3/2}$$
$$+ \left|\frac{\partial^3 P}{\partial s\, \partial \xi_1\, \partial \xi_2}\right| |s|^2 \leqq c_7(\sigma, a_0)\, |P|, \tag{2.27}$$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \xi_j}\right| |\xi| + \left|\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2}\right| \xi^2 \leqq c_8(\sigma, a_0)\, |P| \qquad (j = 1, 2). \tag{2.28}$$

Действительно,

$$|\partial P/\partial \xi_j|\, |s|^{1/2} \leqq c_2 \left(|s|\, (|s|\, \xi^2)^{1/2} + \left(\sigma/\sqrt{a_0}\right) |s|\, \xi^2\right) \leqq c_9\, |P|,$$
$$|\partial P/\partial \xi_j|\, |\xi| \leqq c_2(|s|\, \xi^2 + \sigma\, |\xi|^3) \leqq c_{10}\, |P|;$$

остальные неравенства устанавливаются аналогично ∎

Теорема 2.3: *Если* $\tilde{K}(\xi, s)$ *удовлетворяет неравенствам* (2.22), $c\text{-}m \geqq -3$, *то*

$$\Gamma_h^{(\nu_q)}(\tilde{K}/P) \leqq c_1 h^{m+3} \qquad (q = 0, 1, 2) \tag{2.29}$$

при достаточно больших ν_q.

Доказательство: Пусть $q = 0$. Повторяя доказательство теоремы 2.2, мы придем к необходимости показать, что

$$\left\| (\mathrm{i}\eta_0)^{\nu_0 - \theta}\, \phi(\eta, \eta_0)\, \mathcal{D}^\gamma \frac{\tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)}{P(h^{-1}\eta, s_h)} \right\|_2 \leqq c_2 h^{3+m}$$

(обозначения те же, что в теореме 2.2). Производная $\mathcal{D}^\gamma \tilde{K} P^{-1}$ есть линейная комбинация членов вида

$$\mathcal{D}^{\gamma-\beta} \tilde{K}(h^{-1}\eta, s_h)\, \mathcal{D}^\beta \frac{1}{P(h^{-1}\eta, s_h)} \qquad (\beta \leqq \gamma, \quad \text{т. е.} \quad \beta_q \leqq \gamma_q,\, q = 0, 1, 2).$$

Выпишем производные функции $1/P$, подлежащие оценке:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{P} = -\frac{P_{\xi_k}}{P} \qquad (k = 0, 1, 2),$$

$$\frac{\partial^2 (1/P)}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k} = -\frac{P_{\xi_i \xi_k}}{P^2} + \frac{2 P_{\xi_i} P_{\xi_k}}{P^3} \qquad (i, k = 0, 1, 2;\ i \neq k),$$

$$\frac{\partial^3 (1/P)}{\partial \xi_0\, \partial \xi_i\, \partial \xi_k} = -\frac{P_{\xi_0 \xi_1 \xi_2}}{P^2} + \frac{2}{P^3} (P_{\xi_0} P_{\xi_1 \xi_2} + P_{\xi_0 \xi_1} P_{\xi_2} + P_{\xi_0 \xi_2} P_{\xi_1}) - \frac{6 P_{\xi_0} P_{\xi_1} P_{\xi_2}}{P^4}.$$

Все они являются линейными комбинациями произведений $1/P$ и нескольких (не более трех) множителей вида $P^{(\mu)}/P$, где $\mu \leqq \beta$, $P^{(\mu)} = \mathcal{D}^\mu P$. Следовательно, $\mathcal{D}^\beta\left(1/P(h^{-1}\eta, s_h)\right)$ — это линейная комбинация произведений $1/P(h^{-1}\eta; s_h)$ и $P^{(\mu)}(h^{-1}\eta, s_h)/h^{\langle\mu\rangle} P(h^{-1}\eta, s_h)$. Из (2.27) следует, что $|P^{(\mu)}(h^{-1}\eta, s_h)|/h^{\langle\mu\rangle}\, |P(h^{-1}\eta, s_h)| \leqq c_3/|\eta_0|^{\langle\mu\rangle/2}$. Таким образом, $\left|\mathcal{D}^\beta\left(1/P(h^{-1}\eta, s_h)\right)\right| \leqq c_4/|\eta_0|^{\langle\beta\rangle/2}\, |P(h^{-1}\eta, s_h)|$, а так как $|s_h| \geqq a_0 > 0$, то

$$\left|\mathcal{D}^\gamma \frac{\tilde{K}}{P}\right| \leqq c_5 \sum_{\beta \leqq \gamma} \frac{(|s_h| + h^{-2}\eta^2)^{-m/2}}{|P(h^{-1}\eta, s_h)|\, |\eta_0|^{\langle\beta\rangle/2}} \leqq c_6 |s_h|^{-2-m/2} \sum_{\beta \leqq \gamma} |\eta_0|^{-\langle\beta\rangle/2}$$
$$\leqq c_7 \sum_{\beta \leqq \gamma} \frac{h^{3+m}}{|\eta_0|^{(\langle\beta\rangle+3+m)/2}}$$

и при $\nu_0 > (m+5)/2$

$$\left\|(i\eta_0)^{\nu_0-\theta} \phi \mathcal{D}^\gamma \frac{\tilde{K}}{P}\right\|_2 \leqq c_7 h^{3+m} \sum_{\beta \leqq \gamma} \left\| |\eta_0|^{\nu_0 - \theta - \frac{\langle\beta\rangle+3+m}{2}} \phi \right\|_2 \leqq c_8 h^{3+m}.$$

Тем самым доказана оценка (2.29) при $q = 0$.

Рассмотрим случай $q = 1, 2$ и предположим, что $h > 1$. Тогда

$$\frac{1}{h^{\langle\mu\rangle}} \frac{|P^{(\mu)}(h^{-1}\eta, s_h)|}{|P(h^{-1}\eta, s_h)|} \leqq \frac{c_9}{h^{\langle\mu\rangle} |s_h|^{\langle\mu\rangle/2}} \leqq \frac{c_9}{a_0^{\langle\mu\rangle/2}},$$

$$\left|\mathcal{D}^\gamma \frac{\tilde{K}}{P}\right| \leqq \frac{c_{10}}{|s_h|^{2+m/2}} \leqq \frac{c_{10}}{a_0^{2+m/2}},$$

$$\left\|(i\eta_q)^{\nu_q-\theta} \phi \mathcal{D}^\gamma \frac{\tilde{K}}{P}\right\|_2 \leqq c_{11} \leqq c_{11} h^{3+m}. \tag{2.30}$$

Пусть теперь $h < 1$. Снова воспользуемся (2.24), но на этот раз разобьем бесконечный промежуток интегрирования по y_0 на промежутки $y_0 \in (0, h)$ и $y_0 > h$, в результате чего (2.29) сведется к доказательству ограниченности выражений

$$h^{-3-m} h^{1/2} \left\| \frac{\partial}{\partial\eta_0} \left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{2-i_1} \left(\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)^{2-i_2} \left[(i\eta_q)^{\nu_q} \frac{\tilde{K}}{P} F\Psi\right]\right\|_2$$

и

$$h^{-3-m} h^{-1/2} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{2-i_1} \left(\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right)^{2-i_2} \left[(i\eta_q)^{\nu_q-\theta} \frac{\tilde{K}}{P} F\Psi\right]\right\|_2 \quad (i_1, i_2 = 1, 2),$$

т. е.

$$h^{-3-m} h^{1/2} \|(i\eta_q)^{\nu_q-\theta} \phi \mathcal{D}^{\gamma-\beta} \tilde{K} \mathcal{D}^\beta(1/P)\|_2, \tag{2.31}$$

$$h^{-3-m} h^{-1/2} \|(i\eta_q)^{\nu_q-\theta} \phi \mathcal{D}^{\gamma-\beta} \tilde{K} \mathcal{D}^\beta(1/P)\|_2, \quad \gamma_0 = \beta_0 = 0. \tag{2.32}$$

Рассмотрим $P^{(\mu)}/h^{\langle\mu\rangle}P$. Если $\mu_0 = 0$, то в силу (2.28)

$$|P^{(\mu)}(h^{-1}\eta, s_h)|/h^{\langle\mu\rangle} |P(h^{-1}\eta, s_h)| \leqq c_{12}/|\eta|^{\langle\mu\rangle}. \tag{2.33}$$

Функцию $1/P$ мы теперь оценим следующим образом:

$$1/|P(h^{-1}\eta, s_h)| \leqq c_{13} h^4/\eta^2(|\eta_0| + \sigma h |\eta|). \tag{2.34}$$

Это влечет за собой

$$|\mathcal{D}^\beta(1/P)| \leqq c_{14} h^4/|\eta|^{2+\langle\beta\rangle}(|\eta_0| + \sigma h |\eta|),$$

$$\|(i\eta_q)^{\nu_q-\theta} \phi \mathcal{D}^{\gamma-\beta} \tilde{K} \mathcal{D}^\beta(1/P)\|_2$$

$$\leqq c_{15} h^{4+m} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2(\nu_q-\theta-2-\langle\beta\rangle)} \sup_{\eta_0} |\phi|^2 (|ah^2 + i\eta_0| + \eta^2)^{-m} d\eta \int_{\infty}^{\infty} \frac{d\eta_0}{(|\eta_0| + \sigma h |\eta|)^2} \right)^{1/2}$$

$$\leqq \sqrt{\frac{2}{6}}\, c_{15} h^{7/2+m} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\eta|^{2(\nu_q-\theta-2-\langle\beta\rangle)-1} \sup_{\eta_0} |\phi|^2 (|ah^2 + i\eta_0| + \eta^2)^{-m} d\eta \right)^{1/2} \leqq c_{16} h^{7/2+m},$$

если $\nu_q > 11/2 + \max(0, m)$.

Точно так же оценивается (2.31) в случае $\beta_0 = 0$. Пусть $\beta_0 = 1$. Если $\mu_0 = 0$, то мы можем воспользоваться (2.33). В случае же $\mu_0 = 1$ могут представиться следующие возможности:

$$\frac{1}{h^{\langle\mu\rangle}} \frac{|P^{(\mu)}(h^{-1}\eta, s_h)|}{|P(h^{-1}\eta, s_h)|} \leqq \begin{cases} \dfrac{c_{17}}{h^4\,|P(h^{-1}\eta, s_h)|}, & \mu = (1,1,1) \\[2ex] \dfrac{c_{18}\,|\eta|}{h^4\,|P(h^{-1}\eta, s_h)|}, & \mu = (1,0,1) \text{ или } \mu = (1,1,0) \\[2ex] \dfrac{c_{19}(|s_h| + h^{-2}\eta^2)}{h^2\,|P(h^{-1}\eta, s_h)|} \leqq \dfrac{c_{19}\eta^2}{h^4\,|P|} + \dfrac{c_{20}}{\eta^2}, & \mu = (1,0,0). \end{cases} \tag{2.35}$$

Поэтому

$$\left|\mathscr{D}^\beta \frac{1}{P(h^{-1}\eta, s_h)}\right| \leqq \frac{c_{21}(1+\eta^2)}{h^4\,|P(h^{-1}\eta, s_h)|^2} + \frac{c_{22}}{|\eta|^{\langle\beta\rangle}\,|P(h^{-1}\eta, s_h)|}$$

$$\leqq \frac{c_{23}(1+\eta^2)\,h^4}{\eta^4(|\eta_0| + \sigma h\,|\eta|)^2} + \frac{+\,c_{24}h^3}{|\eta|^{3+\langle\beta\rangle}};$$

$$\|(\mathrm{i}\eta_q)^{\nu_q-\theta}\,\phi\mathscr{D}^{\gamma-\beta}\tilde{K}\mathscr{D}^\beta(1/P)\|_2$$

$$\leqq c_{25}h^4\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\eta|^{2(\nu_q-\theta-4)}\,(1+\eta^2)^2 \sup_{\eta_0} |\phi|^2\,(|s_h| + h^{-2}\eta^2)^{-m}\,d\eta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta_0}{(|\eta_0| + \sigma h\,|\eta|)^4}\right)^{1/2}$$

$$+\,c_{26}h^3\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta|^{2(\nu_q-\theta-3-\langle\beta\rangle)}\,|\phi|^2\,(|s_h| + h^{-2}\eta^2)^{-m}\,d\eta\,d\eta_0\right)^{1/2}$$

$$\leqq c_{27}(h^{5/2+m} + h^3) \leqq 2c_{27}h^{5/2+m},$$

если $\nu_q > 7 + \max(0, m)$ ∎

Переходим непосредственно к оценкам $F^{-1}[K_1]$ и $F^{-1}[K_{2k}]$.

Теорема 2.4: *Если* $\vec{b}_a \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_\infty)$, *то имеют место неравенства*

$$\langle F^{-1}[K_1]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} \leqq c_1 \sum_{i=1}^{3} \langle b_{ia}\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}, \tag{2.36}$$

$$\langle F^{-1}[K_{2k}]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}\right)} \leqq c_2 \sum_{i=1}^{3} \langle b_{ia}\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}. \tag{2.37}$$

Доказательство: Представим функции K_1 и K_{2k} в следующей форме:

$$K_1 = \sum_{j=1}^{3} K_{1j}\tilde{b}_j, \qquad K_{2k} = \sum_{j=1}^{3} K_{2kj}\tilde{b}_j,$$

$$K_{1j} = \frac{\mathrm{i}\xi_j}{P}\,(2sr + \sigma\xi^2) \quad (j = 1, 2), \qquad K_{13} = -\frac{s(s + 2\xi^2)}{P},$$

$$K_{2kj} = -\frac{\delta_{kj}}{r} - \frac{\xi_j\xi_k\,|\xi|\,s}{r(r+|\xi|)\,P} + \frac{3\xi_j\xi_k s}{(r+|\xi|)\,P} + \frac{\sigma\xi^2\xi_k\xi_j}{r(r+|\xi|)\,P} \qquad (k, j = 1, 2),$$

$$K_{2k3} = -K_{23k} = \frac{\mathrm{i}\xi_k s^2}{(r+|\xi|)^2\,P} \qquad (k = 1, 2), \quad K_{233} = -|\xi|\,\frac{s}{P}.$$

Положим $Q = s + 4\xi^2 r/(r+|\xi|)$ и воспользуемся равенством $s/P = 1/Q + (sQ - P)/QP = 1/Q - \sigma\,|\xi|^3/QP$, с помощью которого перепишем формулы для K_{1j}, K_{2kj} в виде

$$K_{1j} = K'_{1j} + K''_{1j}, \qquad K_{2kj} = K'_{2kj} + K''_{2kj},$$

$$\left.\begin{aligned} &K'_{1j} = \frac{2\mathrm{i}\xi_j r}{Q} \qquad (j = 1, 2), \qquad K'_{13} = -\frac{s+2\xi^2}{Q},\\ &K'_{2kj} = -\frac{\delta_{kj}}{r} - \frac{\xi_j\xi_k\,|\xi|}{Qr(r+|\xi|)} + \frac{3\xi_j\xi_k}{(r+|\xi|)\,Q} \qquad (j, k = 1, 2),\\ &K'_{2k3} = -K'_{23k} = \frac{\mathrm{i}\xi_k s}{(r+|\xi|)^2\,Q} \qquad (k = 1, 2), \quad K'_{233} = -\frac{|\xi|}{Q}, \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

$$\left.\begin{aligned} &K''_{1j} = \frac{\sigma}{P}\left(\mathrm{i}\xi_j\xi^2 - \frac{2\mathrm{i}\xi_j r\,|\xi|^3}{Q}\right) \qquad (j = 1, 2), \qquad K''_{13} = \sigma\,\frac{|\xi|^3(s+2\xi^2)}{QP},\\ &K''_{2kj} = \frac{\sigma}{P}\left(\frac{\xi_j\xi_k\xi^4}{r(r+|\xi|)\,Q} - \frac{3\xi_j\xi_k\,|\xi|^3}{(r+|\xi|)\,Q} + \frac{\xi_j\xi_k\xi^2}{r(r+|\xi|)}\right) \qquad (k, j = 1, 2),\\ &K''_{2k3} = -K''_{23k} = -\frac{\sigma}{P}\,\frac{\mathrm{i}\xi_k\,|\xi|\,s}{(r+|\xi|)^2\,Q} \qquad (k = 1, 2), \qquad K''_{233} = \frac{\sigma\,|\xi|^4}{PQ}. \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Так как $|Q(\xi, s)| \geqq c_3\,|r|^2$, то функции (2.38) удовлетворяют условиям теоремы 2.2: K_{1k} — с показателем $m = 0$, а K'_{2kj} $(k + j < 6)$ — с показателем $m = 1$. Поэтому при надлежащих ν_q $(q = 0, 1, 2)$

$$\Gamma_h^{(\nu_q)}(K'_{1k}) \leqq c_4 \quad (k = 1, 2, 3), \qquad \Gamma_h^{(\nu_q)}(K'_{2kj}) \leqq c_5 h \quad (k + j < 6). \tag{2.40}$$

Для оценок же $\Gamma_h^{(\nu_q)}(K''_{1k})$, $\Gamma_h^{(\nu_q)}(K''_{2kj})$ можно привлечь теорему 2.3, что приводит к аналогичным неравенствам

$$\Gamma_h^{(\nu_q)}(K''_{1k}) \leqq c_6 \quad (k = 1, 2, 3), \qquad \Gamma_h^{(\nu_q)}(K''_{2kj}) \leqq c_7 h \quad (k, j = 1, 2, 3). \tag{2.41}$$

Функция K'_{233}, которую мы пока не рассмотрели, вносит в K_{233} вклад $K'_{233}\tilde{b}_3 = K_3$. Поскольку $\partial^2\,|\xi|/\partial\xi_1\,\partial\xi_2 = -\xi_1\xi_2/|\xi|^3$, функция $|\xi|/Q$ не удовлетворяет условиям теоремы 2.2, и прямая ссылка на нее невозможна. Мы оценим $F^{-1}[K_3]$ с помощью леммы 2.1 следующим образом:

$$\langle F^{-1}[K_3]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}\right)} \leqq c_8\langle F^{-1}[\tilde{b}_3/Q]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(3+\alpha, \frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \leqq c_9\langle b_{3\alpha}\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}\right)} \tag{2.42}$$

(на последнем шаге мы снова воспользовались теоремой 2.2). Неравенства (2.36), (2.37) вытекают из (2.40)—(2.42) и теоремы 2.1 ∎

Рассмотрим теперь случай, когда функция b_3 имеет вид $b_3 = \int_0^{t'} d(x', \tau)\,d\tau$. Тогда $K_{13}\tilde{b}_3 = s^{-1}K_{13}\tilde{d}$, $K_{2k3}\tilde{b}_3 = s^{-1}K_{2k3}\tilde{d}$.

Теорема 2.5: *Если $d_a \in \mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{D}_\infty)$, то имеют место неравенства*

$$\langle F^{-1}[K_{13}\tilde{b}_3]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} \leqq c_1\langle d_a\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)}, \tag{2.43}$$

$$\langle F^{-1}[K_{2k3}\tilde{b}_3]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}\right)} \leqq c_2\langle d_a\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{2.44}$$

Доказательство: Имеем

$$\frac{K_{13}}{s} = -\frac{s+2\xi^2}{P}, \quad \frac{K_{2k3}}{s} = \frac{\mathrm{i}\xi_k s}{(r+|\xi|)^2 P} \quad (k = 1, 2), \quad \frac{K_{233}}{s} = -\frac{|\xi|}{P}.$$

Вследствие теоремы 2.3, при достаточно больших ν_q $(q = 0, 1, 2)$,

$$\Gamma_h^{(\nu_0)}(K_{13}/s) \leqq c_3 h, \quad \Gamma_h^{(\nu_0)}(K_{2k3}/s) \leqq c_4 h^2 \quad (k = 1, 2). \tag{2.45}$$

Отсюда следуют оценки (2.43) и (2.44) с $k = 1, 2$. Наконец,

$$\langle F^{-1}[K_{233}\tilde{b}_3]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}\right)} \leqq c_5\langle F^{-1}[\tilde{d}/P]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(3+\alpha,\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} \leqq c_6\langle d_a\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)}$$

в силу леммы 2.1 теоремы 2.3 ∎

Применим полученные результаты для оценки решения задачи (2.1).

Теорема 2.6: *Пусть в (2.3) $b_1, b_2 \in \mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)$, $T < \infty$, а $b_3 = b_3' + \int_0^t d(x',\tau)\,d\tau$, где $b_3' \in \mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)$, $d \in \mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{D}_T)$. Тогда задача (2.1) имеет решение $(\vec{v}, p)$ такое, что $\vec{v} \in \mathring{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$, $\nabla p \in \mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$. Оно подчиняется неравенству*

$$\langle\vec{v}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} + \langle\nabla p\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \leqq c(T)\left(\langle b_1\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle b_2\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}\right.$$
$$\left. + \langle b_3'\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle d\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\right); \tag{2.46}$$

постоянная $c(T)$ зависит от T экспоненциальным образом.

Доказательство: Продолжим b_1, b_2, b_3', d нулем в область $t < 0$, а затем в $\mathbb{D}_\infty$ таким образом, чтобы их нормы в $\mathbb{D}_\infty$ оценивались бы через нормы в правой части (2.46) (для этого можно использовать известный способ Хестенса-Уитни, см. напр. [2]). Без ограничения общности можно считать также эти функции хорошо убывающими при $|x| \to \infty$, иначе их можно было бы умножить на $\zeta(x/N)$, $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\zeta(x) = 1$ при $|x| \leqq 1$ и затем устремить N к ∞. Рассмотрим задачу (2.1) в $\mathbb{R}_\infty$. Она имеет решение (2.5)—(2.7). Рассмотрим это же решение как решение первой начально-краевой задачи для системы из трех уравнений теплопроводности:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \Delta\vec{v} = -\exp(at)\,\nabla p_a, \qquad \vec{v}|_{t=0} = 0, \qquad \vec{v}|_{x_3=0} = \exp(at)\,\vec{v}_a|_{x_3=0}, \tag{2.47}$$

где p_a и $\vec{v}_a|_{x_3=0}$ определяются формулами (2.12), (2.17). Воспользуемся оценками (2.36), (2.37), (2.43), (2.44) и легко устанавливаемыми неравенствами

$$\langle f_a\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)} = \langle f\exp(-at)\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)}$$
$$\leqq \langle f\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)} + \sup_{x',t}\ \sup_{0<\tau<t}|f(x',t-\tau)|\,\tau^{-\alpha/2}\left|\exp(-at) - \exp(-a(t-\tau))\right|$$

$$\leqq \langle f\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)}\left\{1+\sup_{0<\tau<t}(t-\tau)^{\alpha/2}\exp\left(-a(t-\tau)\right)\frac{1-\exp(-a\tau)}{\tau^{\alpha/2}}\right\}$$
$$\leqq c_1\langle f\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)},$$
$$\langle f_a\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}\leqq c_2\langle f\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)},$$

а также известными шаудеровскими оценками для решения задачи (2.47) [4]. Это дает

$$\langle\vec v\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}+\langle\nabla p\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\leqq c_3\left(\langle\exp(at)\nabla p_a\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}+\langle\exp(at)\,\vec v_a|_{x_3=0}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$
$$\leqq c_4(T)\left(\langle\nabla p_a\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}+\langle\vec v_a\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}\right)$$
$$\leqq c_5(T)\left(\langle F^{-1}[K_1]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{3}\langle F^{-1}[K_{2k}]\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$$
$$\leqq c_6(T)\left(\sum_{j=1}^{2}\langle b_j\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\langle b_3'\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\langle d\rangle_{\mathbb{D}_\infty}^{(\alpha,\alpha/2)}\right)$$
$$\leqq c_7(T)\left(\sum_{j=1}^{2}\langle b_j\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\langle b_3'\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\langle d\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\right)\ \blacksquare$$

Из доказательств теорем 2.4—2.6 видно, что параметр $\alpha\in(0,1)$ в оценках (2.36), (2.37), (2.43), (2.44), (2.46) можно заменить на $k+\alpha$ с любым целым $k\geqq 0$.

§ 3. Задача для неоднородной системы

Рассмотрим теперь в $\mathbb{R}_T$ неоднородную задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec v}{\partial t}-\Delta\vec v+\nabla p=\vec f,\qquad\nabla\cdot\vec v=\varrho,\qquad\vec v|_{t=0}=\vec v_0,\\ \left.\frac{\partial v_j}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_j}\right|_{x_3=0}=b_j\qquad(j=1,2),\\ -p+2\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+\sigma\Delta'\int_0^t v_3\,d\tau|_{x_3=0}=b_3.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Будем считать, что выполняются условия согласования

$$\nabla\cdot\vec v_0=\varrho(x,0),\qquad\left.\frac{\partial v_{0j}}{\partial x_3}+\frac{\partial v_{03}}{\partial x_j}\right|_{x_3=0}=b_j|_{t=0}\qquad(j=1,2)\tag{3.2}$$

и имеет место соотношение

$$\partial\varrho/\partial t-\nabla\cdot\vec f=\nabla\cdot\vec h,\tag{3.3}$$

понимаемое в слабом смысле как тождество

$$\int_{\mathbb{R}_+^3}\varrho(x,t)\,\varphi(x)\,dx-\int_{\mathbb{R}_+^3}\varrho(x,0)\,\varphi(x)\,dx=-\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+^3}(\vec f+\vec h)\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt$$

при почти всех $t\in(0,T)$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^3)$. Основным результатом работы является

Теорема 3.1: *Пусть* $\vec{f} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$, $\varrho \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T)$, $\vec{v}_0 \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_+{}^3)$, $b_j \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)$ $(j = 1, 2)$, $T < \infty$ *причем выполняются условия* (3.2), (3.3),

$$h_i = \sum_{k=1}^{3} \partial h_{ik}/\partial x_k, \qquad b_3 = b_3' + \int_0^t d(x', \tau)\, d\tau, \tag{3.4}$$

где h_{ik} — *функции с конечной нормой* $|h_{ik}|_{\mathbb{R}_T}^{(1+\alpha,\gamma)}$, $b_3' \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)$, $d \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{D}_T)$. *Тогда задача* (3.1) *имеет решение* $(\vec{v}, p)$, *такое, что*

$$\vec{v} \in \overset{\circ}{C}{}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T), \qquad \nabla p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T) \tag{3.5}$$

и выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\langle\vec{v}\rangle^{\left(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}\right)} + \langle\nabla p\rangle^{(\alpha,\alpha/2)} &\leqq c_1(T)\Bigg(\langle\vec{f}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \langle\varrho\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle\vec{h}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \sum_{i,k} |h_{ik}|^{(1+\alpha,\gamma)} \\ &\quad + \langle\vec{v}_0\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(2+\alpha)} + \sum_{j=1}^{2}\langle b_j\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle b_3'\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle d\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}\Bigg) \\ &\equiv c_1(T)\, X.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Решение единственно в классе (3.5) *с конечным* $\sup_x |p(x, t)|$, *при всех* $t \in (0, T)$.

Доказательство: Займемся сначала построением решения, которое проведем в несколько этапов. При этом будем считать, что все известные функции в (3.1) хорошо убывают при $|x| \to \infty$.

1. Сведение к задаче, данные которой согласованы с нулем при $t = 0$: Полагая в уравнениях Стокса $t = 0$, нетрудно увидеть, что $p(x, 0) \equiv p_0(x)$ является решением задачи Дирихле

$$\Delta p_0 = \nabla \cdot \vec{f} - \varrho_t + \Delta\varrho|_{t=0} = \nabla \cdot (\nabla\varrho - \vec{h})|_{t=0}, \qquad x_3 > 0,$$
$$p_0|_{x_3=0} = 2(\partial v_{03}/\partial x_3)|_{x_3=0} - b_3'|_{t=0}.$$

Оно удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}\langle p_0\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(1+\alpha)} &\leqq c_2\big(\langle\nabla\varrho - \vec{h}\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(\alpha)} + \langle 2\partial v_{03}/\partial x_3 - b_3'\rangle_{\mathbb{R}^2}^{(1+\alpha)}\big) \\ &\leqq c_3\left(\langle\vec{h}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \langle\varrho\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle\vec{v}_0\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(2+\alpha)} + \langle b_3'\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}\right).\end{aligned}$$

Построим функцию $P_0 \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T)$ и векторное поле $\vec{V}_0 \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$, удовлетворяющие начальным условиям $P_0|_{t=0} = p_0$, $\vec{V}_0|_{t=0} = \vec{v}_0$, $\vec{V}_{0t}|_{t=0} = \Delta\vec{v}_0 - \nabla p_0 + \vec{f}|_{t=0}$ и неравенствам

$$\begin{aligned}\langle P_0\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} &\leqq c_4\langle p_0\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(1+\alpha)}, \\ \langle\vec{V}_0\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} &\leqq c_5\big(\langle\vec{v}_0\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(2+\alpha)} + \langle p_0\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(1+\alpha)} + \langle\vec{f}|_{t=0}\rangle_{\mathbb{R}_+{}^3}^{(\alpha)}\big).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Задача построения такого рода функций хорошо известна и решается, например, в [4]. Для $\vec{w} = \vec{v} - \vec{V}_0$, $s = p - P_0$ имеем

$$\vec{w}_t - \Delta\vec{w} + \nabla s = \vec{g}, \qquad \nabla\cdot\vec{w} = r,$$

$$\vec{w}|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w_j}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_j}\right|_{x_3=0} = a_j \qquad (j = 1, 2), \tag{3.8}$$

$$-s + 2\frac{\partial w_3}{\partial x_3} + \sigma\Delta'\int\limits_0^t w_3 d\tau|_{x_3=0} = a_3,$$

где

$$\vec{g} = \vec{f} - \vec{V}_{0t} + \Delta\vec{V}_0 - \nabla P_0 \in \mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T), \qquad r = \varrho - \nabla\cdot\vec{V}_0 \in \mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}_T),$$

$$a_j = b_j - \frac{\partial V_{0j}}{\partial x_3} - \left.\frac{\partial V_{03}}{\partial x_j}\right|_{x_3=0} \in \mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T) \qquad (j = 1, 2),$$

$$a_3 = a_3' + \sigma\int\limits_0^t A\,d\tau,$$

$$a_3' = b_3' + P_0 - 2\partial V_{03}/\partial x_3, \qquad A = d - \Delta' V_{03}|_{x_3=0},$$

так что $a_3' \in \mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)$, $A \in C^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{D}_T)$. Условия (3.2), (3.4) для задачи (3.8) имеют место, так как

$$r_t - \nabla\cdot\vec{g} = \varrho_t - \nabla\cdot\vec{f} - \nabla\cdot(\Delta_0\vec{V}_0 - \nabla P) = \nabla\cdot\vec{H},$$

$$\vec{H} = \vec{h} - \Delta\vec{V}_0 + \nabla P_0,$$

$$H_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k}, \qquad H_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial V_{0i}}{\partial x_k} + \delta_{ik}P_0.$$

Запишем a_3 в виде $a_3 = a_3'' + \sigma\int\limits_0^t \mathscr{D}\,d\tau$, где $a_3'' = a_3' - \sigma F$, $\mathscr{D} = A + F_t$, а $F \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{D}_T)$ удовлетворяет условиям $F|_{t=0} = 0$, $F_t|_{t=0} = -A|_{t=0} = d|_{t=0} - \Delta' v_{03}$ и неравенству $\langle F\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqq c_6\langle A|_{t=0}\rangle_{\mathbb{R}^2}^{(\alpha)} \leqq c_6\big(\langle d\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \langle \vec{v}_0\rangle_{\mathbb{R}^3}^{(2+\alpha)}\big)$. Очевидно, $a_3'' \in \mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)$, $\mathscr{D} \in \mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{D}_T)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} X_0 &= \langle\vec{g}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \langle r\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle\vec{H}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} + \sum_{i,k}|H_{ik}|_{\mathbb{R}_T}^{(1+\alpha,\gamma)} \\ &+ \sum_{j=1}^2\langle a_j\rangle_{\mathbb{D}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle a_3''\rangle^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)} + \langle\mathscr{D}\rangle_{\mathbb{D}_T}^{(\alpha,\alpha/2)} \\ &\leqq c_7 X. \end{aligned} \tag{3.9}$$

2. Сведение к однородной задаче. Построим функции $\vec{W}_0$, S_0, удовлетворяющие первым двум уравнениям в (3.7). Как показано в [9], можно положить $\vec{W}_0 = \vec{W}_1 + \vec{W}_2$, где $\vec{W}_1$ решает уравнение теплопроводности $\partial\vec{W}_1/\partial t - \Delta\vec{W}_1 = \vec{g}$ при условии $\vec{W}_1|_{t=0} = 0$ и удовлетворяет неравенству $\langle\vec{W}_1\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)} \leqq c_8\langle\vec{g}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}$, а $\vec{W}_2 = \nabla\Phi$, $\Delta\Phi = r - \nabla\cdot\vec{W}_1$, $\Phi|_{x_3=0} = 0$. Для функции Φ в [9] была установ-

лена оценка

$$\langle\nabla\Phi\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$$
$$\leqq c_9\left(\langle r\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\langle\vec{W}_1\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}+\langle\vec{H}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}+\sum_{i,k=1}^{3}|H_{ik}|^{(1+\alpha,\gamma)}\right).$$

Легко видеть, что $\vec{W}_0=\vec{W}_1+\vec{W}_2$ вместе с $S_0=r-\nabla\cdot\vec{W}_1-\Phi_t$ удовлетворяет уравнениям $\vec{W}_{0t}-\Delta\vec{W}_0+\nabla S_0=\vec{g}$, $\nabla\cdot\vec{W}_0=r$ и неравенству

$$\langle\vec{W}_0\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}+\langle\nabla S_0\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}$$
$$\leqq c_{10}\left(\langle\vec{g}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}+\langle r\rangle_{\mathbb{R}_T}^{\left(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}\right)}+\langle\vec{H}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}+\sum_{i,k=1}^{3}|H_{ik}|_{\mathbb{R}_T}^{(1+\alpha,\gamma)}\right), \tag{3.10}$$

причем $\vec{W}_0\in\mathring{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$, $\nabla S_0\in\mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$. Для $\vec{u}=\vec{w}-\vec{W}_0$, $q=s-S_0$ получаем задачу (2.1), в которой

$$b_j=a_j-\left(\frac{\partial W_{03}}{\partial x_j}+\frac{\partial W_{0j}}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0}\in\mathring{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T)\qquad(j=1,2),$$

$$b_3'=a_3''+S_0-2\,\frac{\partial W_{03}}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=a_3''+r-\nabla\cdot W_1|_{x_3=0}\in\mathring{C}^{2+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{D}_T),$$

$$d=\mathcal{D}-\Delta' W_{03}|_{x_3=0}\in\mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{D}_T).$$

В § 2 было построено решение этой задачи, удовлетворящее неравенству (2.46). Легко видеть, что $\vec{v}=\vec{u}+\vec{W}_0+\vec{V}_0$, $p=q+S_0+P_0$ является решением задачи (3.1). Оценка (3.6) вытекает из (2.46), а также из (3.7), (3.9) и (3.10).

3. Единственность решения. В классе функций, квадратично суммируемых в $\mathbb{R}_T$ вместе со своими производными, единственность решения устанавливается с помощью энергетического соотношения:

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+^3}(\vec{v}_t-\Delta\vec{v}+\nabla p)\cdot\vec{v}\,dx\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+^3}\vec{v}^2(x,t)\,dx+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}_+^3}\mathsf{S}_{ij}^2(v)\,dx\,dt$$
$$+\frac{\sigma}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^t v_3\,d\tau\right]^2dx'-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+^3}\vec{v}^2(x,0)\,dx$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=1}^{3}\mathsf{T}_{i3}v_i+\sigma v_3\,\Delta'\int_0^t v_3\,d\tau\right)dx'\,dt.$$

Пусть $(\vec{v},p)$ являются решением однородной задачи (3.1) (т. е. $f=0$, $\varrho=0$, $b_i=0$ $(i=1,2,3)$) и $\vec{v}\in\mathring{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$, $\nabla p\in\mathring{C}^{\alpha,\alpha/2}(\mathbb{R}_T)$. Следуя доказательству теоремы 3.5 из [9], положим $\vec{v}^N=\vec{v}\zeta^N(x)$, $p^N=p\zeta^N$, $\zeta^N(x)=\zeta(x/N)$, $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\zeta(x)=1$

при $|x| < 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_t{}^N - \Delta\vec{v}^N + \nabla p^N = \vec{f}^N, \qquad \nabla\cdot\vec{v}^N = \varrho^N,\\
&\vec{v}^N|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial v_3{}^N}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j{}^N}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0} = b_j{}^N \qquad (j = 1, 2); \qquad (3.11)\\
&-p^N + 2\,\frac{\partial v_3{}^N}{\partial x_3{}^N} + \sigma\,\Delta'\int_0^t v_3{}^N\,d\tau|_{x_3=0} = b_3{}'^N + \sigma\int_0^t d^N\,d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\vec{f}^N = p\,\nabla\zeta^N - 2(\nabla\zeta^N\cdot\nabla)\,\vec{v} - \vec{v}\,\Delta\zeta^N,\\
&\varrho^N = \vec{v}\cdot\nabla\zeta^N, \qquad b_j{}^N = v_3\partial\zeta^N/\partial x_j + v_j(\partial\zeta^N/\partial x_3)|_{x_3=0} \qquad (j = 1, 2),\\
&b_3{}'^N = 2v_3(\partial\zeta^N/\partial x_3)|_{x_3=0}, \qquad d^N = 2(\nabla'\zeta^N\cdot\nabla')\,v_3 + v_3\Delta'\zeta^N|_{x_3=0}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\varrho_t{}^N - \nabla\cdot\vec{f}^N = (\Delta\vec{v} - \nabla p)\cdot\nabla\zeta^N - \nabla\cdot\vec{f}^N = \nabla\cdot\vec{h}^N, \qquad \vec{h}^N = \nabla H^N,$$

где

$$\begin{aligned}
H^N &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_+^3}\frac{1}{|x-y|}\,[(\Delta\vec{v} - \nabla p)\cdot\nabla\zeta^N - \nabla\cdot\vec{f}^N]\,dy\\
&= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_+^3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\,\frac{1}{|x-y|}\,\frac{\partial\vec{v}}{\partial y_k}\cdot\nabla\zeta^N - \nabla\,\frac{1}{|x-y|}\cdot(p\,\nabla\zeta^N + \vec{f}^N)\right\}dy\\
&+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_+^3}\left(\sum_{k=1}^3\frac{\partial\vec{v}}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial\nabla\zeta^N}{\partial y_k} - p\,\Delta\zeta^N\right)\frac{dy}{|x-y|}\\
&+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial y_3}\cdot\nabla\zeta^N - p\,\frac{\partial\zeta^N}{\partial y_3} - \vec{f}_3{}^N\right)\frac{1}{|x-y|}\bigg|_{y_3=0}dy'.
\end{aligned}$$

Отметим, что p, будучи ограниченным решением задачи $\Delta p = 0$, $p|_{x_3=0} = 2\partial v^3/\partial x_3 + \sigma\int_0^t\Delta' v_3\,d\tau|_{x_3=0}$ удовлетворяет условию Гельдера по t с показателем $(1+\alpha)/2$. Поэтому можно показать в результате элементарных оценок функции H^N, что нормы $|H^N|_{\mathbb{R}_T}^{(1+\alpha,\gamma)}$ и $\langle\nabla H^N\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}$ ограничены и стремятся к нулю при $N\to\infty$. То же самое, очевидно, верно и для норм f^N, ϱ^N, $b_j{}^N$, $b_3{}'^N$, d^N. Решение задачи (3.11) финитно и совпадает с построенным выше. Применяя к нему неравенство (2.46) и устремляя N к ∞, получим $\vec{v} = 0, p = 0$ ∎

Предположение об ограниченности p существенно, т. к. однородная задача (3.1) имеет решение $p(x, t) = p(t)\,x_3$, $v_1 = v_2 = 0$, $v_3 = \int_0^t p(\tau)\,d\tau$, у которого могут быть конечны нормы $\langle\vec{v}\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}$ и $\langle\nabla p\rangle_{\mathbb{R}_T}^{(\alpha,\alpha/2)}$. Можно было бы потребовать, чтобы функция $p(x, t)$ росла не быстрее $|x|^\beta$, $\beta < 1$ при $|x|\to\infty$.

Теорема 3.1 обобщается на пространства $C^{\varkappa+\alpha,\frac{\varkappa+\alpha}{2}}$ с целым $k \geqq 0$; при этом увеличивается число условий согласования в задаче (3.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Agmon, S., Douglis, A., and L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623—727.

[2] Бесов, О. В., Ильин, В. П., и С. М. Никольский: Интегральные представления функций и теоремы вложения. Москва: Изд-во Наука 1975.

[3] Головкин, К. К., и В. А. Солонников: Об оценках операторов свертки. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 7 (1968), 6—86.

[4] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Изд-во Наука 1967.

[5] Могилевский, И. Ш.: О краевой задаче для нестационарной системы Стокса с общими граничными условиями. Известия Акад. Наук СССР (серия мат.) 50 (1986), 37—66.

[6] Солонников, В. А.: О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью. Зап. научн. семин. ЛОМИ 152 (1986), 137—157.

[7] Солонников, В. А.: Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса. Труды Мат. ин-та Акад. Наук СССР 70 (1964), 213—317.

[8] Солонников, В. А.: Разрешимость задачи об эволюции изолированного объема вязкой несжимаемой капиллярной жидкости. Зап. научн. семин. ЛОМИ 140 (1984), 179—186.

[9] Солонников, В. А.: Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье-Стокса. Зап. научн. семин. ЛОМИ 59 (1976), 178—254.

Manuskripteingang: 05. 05. 1988

VERFASSER:

Д-р Илья Шулимович Могилевский
Математический факультет Калининского университета
ул. Желябова 33
СССР-170013 Калинин

Проф. д-р Всеволод Алексеевич Солонников
Ленинградское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Академии Наук
наб. р. Фонтанки 27
СССР-191011 Ленинград