Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (4) 1989, S. 349–360

Регулярность решений некоторых задач математической физики

А. И. Кошелев, С. И. Челкак и В. М. Чистяков

Посвящается С. Г. Михлину к восьмидесятилетию его рождения

In dieser Arbeit wird die Regularität der verallgemeinerten Lösungen von Randwertproblemen für quasilineare Systeme elliptischer und parabolischer partieller Differentialgleichungen untersucht. Es werden Bedingungen gefunden, unter denen die Lösungen und ihre Ableitungen glatte (Hölder-stetige) Funktionen sind. Diese Bedingungen bestehen, außer natürlichen Forderungen, in der Beschränktheit der Eigenwertstreuung für diejenige Matrix, die die Elliptizität des betrachteten Operators bestimmt.

Работа посвящена изучению гладкости обобщенных решений краевых задач для квазилинейных систем дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типа. Получены условия при которых решения и их производные являются гладкими (гельдеровыми) функциями. Эти условия, помимо естественных требований, состоят в ограничении разброса спектра матрицы, определяющей эллиптичность рассматриваемого оператора.

The regularity of generalized solutions of boundary value problems for quasilinear systems of elliptic and parabolic partial differential equations is studied. Conditions are found under which the solutions and their derivatives are smooth (Hölder continuous) functions. Except for some natural demands, these conditions consist in the boundedness of dispersion in the spectrum of that matrix which determines the ellipticity of the considered operator.

Проблема регулярности решений основных задач математической физики занимает центральное место в теории уравнений с частными производными. Для эллиптических уравнений эта проблема была сформулирована Д. Гильбертом следующим образом: верно ли, что при аналитических коэффициентах уравнения все решения также будут аналитическими? В случае двух независимых переменных положительный ответ на этот вопрос был дан С. Н. Бернштейном при так называемых естественных ограничениях на функции, образующие уравнения, и, кроме того, в предположении, что решение уравнения трижды непрерывно дифференцируемо. В дальнейших работах многих математиков этот результат был распространен на квазилинейные уравнения с любым числом независимых переменных, а априорные требования на решение снижены до предположения гёльдеровости его градиента.

К настоящему времени для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с любым числом независимых переменных доказаны теоремы существования обобщенных решений при минимальных предположениях о гладкости коэффициентов и установлена точная зависимость гладкости обобщенных решений от дифференциальных свойств коэффициентов. Наиболее полный обзор этих результатов содержится в монографии [7] О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой и в обзорной статье этих же авторов [8]. Аналогичные вопросы для уравнений параболического типа рассмотрены в монографии О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова и Н. Н. Уральцевой [3]. Из всех этих результатов отметим лишь один, хорошо известный факт: любое обобщенное решение u уравнения (здесь и везде далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам)

$$\left(a_{ij}(x)\,u_{x_j}\right)_{x_i} = f(x), \qquad f \in \mathcal{L}_2(\Omega), \tag{1}$$

является непрерывной по Гёльдеру функцией, если только уравнение равномерно эллиптично, а коэффициенты a_{ij} — ограниченные измеримые в Ω функции.

В случае систем уравнений аналогичные результаты были получены Ч. Морри [11] при двух независимых переменных. Если же число независимых переменных больше двух, то положение оказывается несколько иным, причем даже в случае линейных систем эллиптического типа. Известный пример Е. де Джорджи показывает, что эллиптическая система вида (1) может иметь разрывное решение при ограниченных измеримых функциях a_{ij} и $f = 0$. Кроме того, выяснено, что решение квазилинейной системы может быть разрывным даже при аналитических функциях, образующих систему. Такая же ситуация имеет место и для эллиптических уравнений высокого порядка. Соответствующие примеры были построены В. Г. Мазьей, Е. Джусти и М. Миранда. Аналогичные примеры известны и для параболических систем. Естественно возникает вопрос о нахождении дополнительных условий, обеспечивающих гладкость решения. Особенно важен этот вопрос для таких приложений, как, например, система уравнений теории упругости, в которых реально появляются негладкие решения.

Внутри конечной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqq 2$, с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим систему квазилинейных уравнений второго порядка

$$L(u) \equiv \mathcal{D}_i a_i(x, \mathcal{D}u) - a_0(x, \mathcal{D}u) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{2}$$

относительно неизвестной вектор-функции $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(N)})$, удовлетворяющей граничному условию

$$u(x) = f(x), \qquad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{D}_i$ — оператор дифференцирования по x_i, $\mathcal{D}_0$ — единичный оператор, $\mathcal{D}u = (\mathcal{D}_0 u, \mathcal{D}_1 u, \ldots, \mathcal{D}_m u)$. В отношении вектор-функций $a_i(x, p) = \left(a_i^{(1)}(x, p), \ldots, a_i^{(N)}(x, p)\right)$, $p \in \mathbb{R}^{N(m+1)}$, предположим выполненными следующие условия (далее $\mathcal{L}_q$ и $W_q^{(l)}$ обозначают лебеговские и соболевские пространства вектор-функций):

1. $a_i(x, \mathcal{D}u) \in \mathcal{L}_q(\Omega)$ для любой функции $u \in \mathring{W}_q^{(1)}(\Omega)$ при любом $q > 1$;
2. при почти всех $x \in \Omega$ функции $a_i(x, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы;
3. система (2) — эллиптическая с ограниченными нелинейностями, т. е. для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^{N(m+1)}$, почти всех $x \in \Omega$ и всех $p \in \mathbb{R}^{N(m+1)}$ справедливо неравенство

$$\mu\,\|\xi\|^2 \leqq \left(A(x, p)\,\xi, \xi\right) \leqq \nu\,\|\xi\|^2, \tag{4}$$

где $\mu, \nu = \mathrm{const} > 0$ и $A = \{\partial a_i^{(k)}/\partial p_j^{(l)}\}_{\substack{i,j=0,1,\ldots,m\\ k,l=1,\ldots,N}}$ — матрица (размера $N(m+1) \times N(m+1)$) производных коэффициентов системы (2).

В этой работе будем, ради простоты, считать матрицу A симметричной; пусть $\lambda_i(x, p)$ — ее собственные числа. Положим

$$\lambda = \inf_{\substack{x\in\Omega;\, p\in\mathbb{R}^{N(m+1)}\\ i=1,\ldots,N(m+1)}} \lambda_i(x, p), \qquad \Lambda = \sup_{\substack{x\in\Omega;\, p\in\mathbb{R}^{N(m+1)}\\ i=1,\ldots,N(m+1)}} \lambda_i(x, p).$$

Очевидно, $0 < \lambda \leqq \Lambda < +\infty$.

Теорема 1: *Пусть для задачи* (2), (3) *выполнены условия* 1—3, $f \in W_q^{(1)}(\Omega)$ *при* $q > m$ *и справедливо неравенство*

$$(\Lambda - \lambda)(\Lambda + \lambda)^{-1}[1 + (m-2)^2 (m-1)^{-1}]^{1/2} < 1. \tag{5}$$

Тогда $u \in C^{(0,\gamma)}(\bar{\Omega})$ *при некотором* $\gamma \in (0, 1)$.

Эта теорема доказана А. И. Кошелевым в работах [2, 4] (см. также [6]). Условие (5), ограничивающее разброс спектра матрицы A, является дополнительным условием по сравнению со случаем одного уравнения и именно это условие позволяет гарантировать гёльдеровость решения. Более того, оказывается, что условие (5) точное. Это означает, что существует эллиптическая система с разрывным обобщенным решением и такая, что $(\Lambda - \lambda)(\Lambda + \lambda)^{-1}[1 + (m-2)^2 (m-1)^{-1}]^{1/2} = 1$. Соответствующий пример приведен в [3] и является некоторой модификацией примера Е. де Джорджи.

В случае квазилинейных параболических систем уравнений ситуация оказывается аналогичной. Рассмотрим внутри конечного цилиндра $Q = \Omega \times [0, T]$ систему уравнений

$$\partial u/\partial t = L_t(u) \equiv \mathcal{D}_i a_i(x, t, \mathcal{D}u) - a_0(x, t, \mathcal{D}u) \tag{6}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, 0) = 0; \qquad u(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Предположим, что для функций $a_i(x, t, p)$ выполнены условия, аналогичные условиям 1—3. Пусть $\lambda_i(x, t, p)$ — собственные числа (симетричной) матрицы A, соответствующей системе (6), и

$$\lambda = \inf_{\substack{(x,t)\in Q;\, p\in\mathbb{R}^{N(m+1)} \\ i=1,\ldots,N(m+1)}} \lambda_i(x, t, p); \qquad \Lambda = \sup_{\substack{(x,t)\in Q;\, p\in\mathbb{R}^{N(m+1)} \\ i=1,\ldots,N(m+1)}} \lambda_i(x, t, p).$$

Теорема 2: *При сделанных предположениях, если матрица* A *непрерывна по переменной* t *и* $(\Lambda - \lambda)(\Lambda + \lambda)^{-1}[1 + (m-2)^2 (m-1)^{-1}]^{1/2} < 1$, *то обобщенное решение задачи* (6), (7) *гёльдерово по* x *в каждой внутренней точке цилиндра* Q.

Эта теорема доказана в работе В. М. Чистякова [14]. Условия теоремы 2 являются точными в том же смысле, как и условия теоремы 1, что устанавливается с помощью соответствующего примера.

В ряде прикладных задач возникают системы уравнений вида (2) и (6), в которых функции a_i непрерывны, но недифференцируемы по аргументу p. К таким задачам теоремы 1 и 2 непосредственно не применимы. Однако оказывается, что при некоторых условиях гёльдеровость решения сохраняется и в этом случае. Ограничимся рассмотрением задачи (2), (3). Положим

$$K = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{x\in\Omega;\, p,q\in\mathbb{R}^{N(m+1)}} \frac{\|p - q - \varepsilon[a(x, p) - a(x, q)]\|}{\|p - q\|}, \tag{8}$$

где $a = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$, $\|p\|^2 = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=1}^{N} |p_i^k|^2$. Легко видеть, что если $K < 1$, то функций $a_i(x, \cdot)$ удовлетворяют условию Липшица и, кроме того, $[a(x, p) - a(x, q)](p - q) \geq C\|p - q\|^2$, где $C = \text{const} > 0$. Справедлива [5] следующая

Теорема 3: *Пусть выполнено условие* 1, $f \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *и выполнено неравенство*

$$K[1 + (m-2)^2 (m-1)^{-1}]^{1/2} < 1, \tag{9}$$

где постоянная K определена соотношением (8). *Тогда решение задачи* (2), (3) *гёльдерово внутри Ω, т. е. $u \in C^{(0,\gamma)}(\Omega')$, $\Omega \subset\subset \Omega$, при некотором $\gamma \in (0, 1)$. Условие* (9) *является точным в том же смысле, как и условие* (5) *в теореме* 1.

Аналогичная теорема имеет место и для задачи (6), (7).

Отметим, что теоремы 1—3 доказываются с помощью изучения сходимости некоторых итерационных процессов. В случае задачи (2), (3) процесс имеет вид

$$\Delta u_{n+1} - u_{n+1} = \Delta u_n - u_n - \varepsilon L(u_n), \qquad x \in \Omega, \tag{10}$$

$$u_{n+1} = f, \qquad x \in \partial\Omega \tag{11}$$

и предложен для исследования эллиптических систем А. И. Кошелевым в работе [2]. В равенстве (10) ε — положительная константа, а начальное приближение u_0 — любая достаточно гладкая функция, удовлетворяющая граничному условию (11). В случае параболической системы (6), (7) итерационный процесс (введенный в [14]), имеет вид

$$\partial u_{n+1}/\partial t = -\beta(\Delta u_{n+1} - u_{n+1}), \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\partial u_n/\partial t = -\beta(\Delta u_n - u_n) - \varepsilon\big(\partial u_n/\partial t - L_t(u)\big), \qquad (x, t) \in Q, \\ &u_{n+1}|_{x\in\partial\Omega} = 0, \qquad u_{n+1}(x, 0) = 0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

где β и ε — положительные параметры. Процессы (10), (11) и (12), (13) при условиях 1—3 и при подходящем выборе параметров β и ε сходятся к обобщенным решениям рассматриваемых задач в соответствующих соболевских нормах.

Однако для доказательства гёльдеровости обобщенного решения необходимо установить сходимость итерационного процесса в более сильной норме. Для этой цели оказываются удобны пространства $H_{l,\alpha}(\Omega)$, использованные (при $l = 1$) в теории уравнений с частными производными Л. Ниренбергом [12] и Х. Кордесом [1]. Пусть $x, x_0 \in \Omega$, $r = |x - x_0|$ и $\alpha > -m$. Рассмотрим весовое соболевское пространство $W^{(l)}_{2,\alpha}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W^{(l)}_{2,\alpha}(\Omega)} = \left[\sum_{s=0}^{l} \int_{\Omega} r^{\alpha} |\mathcal{D}^s u|^2\, dx\right]^{1/2}, \quad \text{где} \quad |\mathcal{D}^s u|^2 = \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\beta|=s} (\mathcal{D}^{\beta} u^{(k)})^2,$$

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ — мультииндекс, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_m$, $\mathcal{D}^{\beta} u = \mathcal{D}_1^{\beta_1} \ldots \mathcal{D}_m^{\beta_m} u$, $\mathcal{D}_i^0 u = u$. Определим банахово пространство $H_{l,\alpha}(\Omega)$ как множество всех измеримых в Ω функций, принадлежащих пространству $\mathring{W}^{(l)}_{2,\alpha}(\Omega)$ при любом $x \in \Omega$ и имеющих конечную норму $\|u\|_{H_{l,\alpha}(\Omega)} = \sup\limits_{x_0\in\Omega} \|u\|_{W^{(l)}_{2,\alpha}(\Omega)}$. Важнейшим свойством пространства $H_{l,\alpha}(\Omega)$, определяющим целесообразность его использования при изучении регулярности решений, является теорема вложения: $H_{l,\alpha}(\Omega) \subset C^{(l-1,\gamma)}(\Omega)$, $2\gamma = 2 - m - \alpha$, если только $\alpha \in (-m, 2 - m)$. Исследование сходимости итерационного процесса (10), (11) в пространстве $H_{1,\alpha}(\Omega)$ приводит к теоремам 1 и 3, а теорема 2 получается в результате исследования процесса (12), (13) в пространстве $H_{1,\alpha}(Q)$, норма в котором определяется равенством $\|u\|_{H_{1,\alpha}(Q)} = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|u\|_{H_{1,\alpha}(\Omega)}$, $Q = \Omega \times [0, T]$. Аналогично могут быть рассмотрены квазилинейные эллиптические системы любого порядка, соответствующие результаты приведены в [5, 6]. Отметим, что как и в теоремах 1—3, существенным условием, гарантирующим гладкость решения, является ограничение на разброс спектра матрицы производных коэффициентов системы. В [6, 13] подробно рассмотрен также случай эллиптических систем четвертого порядка и получены условия, обеспечивающие $C^{(1,\gamma)}(\Omega')$- или $C^{(0,\gamma)}(\Omega')$-регулярность решения. Эти условия, как и для систем второго порядка, оказываются точными, что подтверждается соответствующими примерами.

Отметим еще, что в приложениях часто встречаются системы уравнений, для которых не выполнено условие эллиптичности в форме (4). Это будет, например, для системы уравнений теории упругости. В теории упругости справедлива [4] теорема, аналогичная теореме 1, и, как и для общих эллиптических систем, удается рассмотреть случай недифференцируемости коэффициентов. Приведем соответсвующий результат. Внутри конечной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ рассмотрим первую краевую задачу для системы уравнений теории упругости

$$M(u) \equiv \mathcal{D}_i a_k^{(i)}(x, \varepsilon_{jl}) - f(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{15}$$

где $\varepsilon_{jl} = \mathcal{D}_j u^{(l)} + \mathcal{D}_l u^{(j)}$ $(j, l = 1, \ldots, m)$. Будем считать, что выполнено условие 1, т. е. $a_k^{(i)}(x, \varepsilon_{jl}) \in \mathcal{L}_q(\Omega)$ при любой $u \in W_q^{(1)}(\Omega)$, $q > 1$, и положим

$$K_1^2 = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ p,q\in\mathbb{R}^{m\times m}}} \frac{\sum\limits_{i,k=1}^{m} |p_i^{(k)} + p_k^{(i)} - (q_i^{(k)} + q_k^{(i)}) - \varepsilon[a_k^{(i)}(x, p_j^{(l)} + p_l^{(j)}) - a_k^{(i)}(x, q_j^{(l)} + q_l^{(j)})]|^2}{\sum\limits_{i,k=1}^{m} |p_i^{(k)} + p_k^{(i)} - (q_i^{(k)} + q_k^{(i)})|^2}. \tag{16}$$

Теорема 4: *Если для задачи* (14), (15) *выполнено условие* 1 *и справедливо неравенство*

$$2K_1\left[1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}\right]^{1/2}\left[1 + \frac{\sqrt{m}}{2}\left(1 + \frac{m-2}{m+1}\right)^{1/2}\right] < 1, \tag{17}$$

где K_1 определено соотношением (16), *то $u \in C^{(0,\gamma)}(\Omega')$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, при некотором $\gamma \in (0, 1)$. При $m = 2, 3$ условие* (17) *можно ослабить, заменив его условием* $2K_1[1 - 5(m-2)^2/4(m - 1 + (m-2)^2)]^{-1} < 1$.

Доказательство теоремы 4 может быть получено на основе доказательства соответствующей теоремы из [4], относящейся к случаю дифференцируемых по ε_{jl} функций $a_k^{(i)}(x, \varepsilon_{jl})$. Переход к недифференцируемым функциям $a_k^{(i)}$ оказывается возможным с помощью того же приема, что и в случае общих квазилинейных эллиптических систем.

Вернемся теперь к задаче (2), (3). Снова будем считать выполненными условия 1—3. Теорема 3, как уже было отмечено, позволяет несколько ослабить эти условия. С другой стороны, возникает вопрос о том, какими свойствами будет обладать решение этой задачи, если коэффициенты $a_i(x, p)$ имеют лучшие дифференциальные свойства. В частности, при каких условиях $u \in C^{(1,\gamma)}(\Omega')$, если $a_i(x; p)$, кроме дифференцируемости по p, будут еще и дифференцируемы по переменной x? Пусть помимо условий 1—3 выполнено следующее условие:

4. Функции $a_i(x, p)$ $(i = 1, \ldots, m)$ дифференцируемы по переменной x и справедливы оценки

$$|a_i(x, p)| \leqq C\,|p| + \varphi(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m),$$

$$|\partial a_i(x, p)/\partial x_k| \leqq C\,|p| + \varphi(x) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\varphi \in \mathcal{L}_{q_1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при некотором $q_1 > m$.

Теорема 5: *Пусть для задача* (2), (3) *выполнены условия* 1—4 *и* $f \in W_2^{(1)}(\Omega)$. *Тогда, если справедливо неравенство*

$$\frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + \lambda}\left\{1 + \frac{(m-2)^2}{m-1}\left[1 + \max\left\{0, \frac{2m(m-2)(m-4)}{9m^2}\right\}\right]\right\}^{1/2} < 1, \tag{18}$$

то $u \in C^{(1,\gamma)}(\Omega')$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, *при некотором* $\gamma \in (0, 1)$.

Теорема 5 доказана в [6]. Сравним неравенства (5) и (18), ограничивающие разброс собственных чисел матрицы A. Ясно, что при $m = 2, 3, 4$ эти неравенства совпадают и при этих m решение задачи (2), (3) принадлежит пространству $C^{(1,\gamma)}(\Omega')$ без дополнительных ограничений на разброс спектра матрицы A. Если же $m > 4$, то, очевидно, условие (18) более ограничительно, чем условие (5).

Теорема 5 является, по-существу, следствием результатов, относящихся к системам четвертого порядка. Оказывается, что эту теорему можно усилить, рассматривая непосредственно эллиптические системы второго порядка. Именно, справедлива

Теорема 6: *Если для задачи* (2), (3) *выполнены условия* 1—4, $f \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *и справедливо неравенство*

$$\frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda + \lambda}\left[1 + \frac{2m(m-2)^2(m^3 - 2m^2 + 4m - 5)}{(m+1)(3m^4 - 9m^3 + 10m^2 - 7m + 7)}\right]^{1/2} < 1, \tag{19}$$

то $u \in C^{(1,\gamma)}(\Omega')$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, *при некотором* $\gamma \in (0, 1)$.

Заметим, прежде всего, что условие (19) при $m > 2$ менее ограничительно, чем условие (5), а при $m = 2$ оба эти условия выполнены автоматически. Таким образом, дополнительная гладкость коэффициентов позволяет не только гарантировать $C^{(1,\gamma)}(\Omega')$-регулярность решения, но и ослабить ограничения на разброс спектра матрицы A. Доказательство теоремы 6 технически весьма громоздко, поэтому остановимся только на некоторых идеях, приводящих к этому результату. Обозначим $\|u\|_{\alpha,0} = \left(\int\limits_\Omega r^\alpha |u|^2\, dx\right)^{1/2}$, $x_0 \in \Omega$, $r = |x - x_0|$ — норму в лебеговом пространстве $\mathcal{L}_{2,\alpha}(\Omega)$ с весом r^α, а $B_\varrho \equiv B_\varrho(x_0)$ — шар в $\mathbb{R}^m$ радиуса ϱ с центром в x_0. Будем считать, что $m \geqq 3$. Положим $q = q_1$ при $m = 3$, где q_1 взято из условия 4, а при $m \geqq 4$ пусть q — произвольное число из $(2, q_1]$. Возьмем вещественное число α так, что $-m(1 - 2/q) < \alpha < 0$. Это, очевидно, возможно. При этом, если $m = 3$, то будем дополнительно считать, что $\alpha < -1$ (это также возможно, поскольку в этом случае $-m(1 - 2/q) = -3(1 - 2/q_1) < -1$). Рассмотрим итерационный процесс (10), (11). Пусть $x_0 \in \Omega'$, $\Omega' \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$ и $u_0 \in W_q^{(2)}(\Omega)$ при выбранном q. Тогда $L(u_0) \in \mathcal{L}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и, следовательно, $u_1 \in W_{q,\mathrm{loc}}^{(2)}(\Omega)$. Поэтому все $u_n \in W_q^{(2)}(\omega)$ и $L(u_n) \in \mathcal{L}_q(\omega)$. С помощью неравенства Гёльдера нетрудно установить, что $L_q(\omega) \subset \mathcal{L}_{2,\alpha}(\omega)$ при $x_0 \in \Omega'$ и выбранном α. Значит, при всех n обе части равенства (10) будут элементами пространства $\mathcal{L}_{2,\alpha}(\omega)$.

При $\delta > 0$ обозначим ζ такую гладкую срезающую функцию, что $0 \leqq \zeta(r) \leqq 1$, $\zeta(r) = 0$ при $r \geqq 3\delta/4$ и $\zeta(r) = 1$ при $0 \leqq r \leqq \delta/2$. Выберем δ столь малым, что $B_\delta(x_0) \subset \omega$ при любом $x_0 \in \Omega'$. Пусть $\{\overset{s}{v}\}_{s\geq 0}$, $\overset{s}{v} = (\overset{s}{v}{}^{(1)}, \ldots, \overset{s}{v}{}^{(N)})$ — произвольная последовательность вектор-функций, для которых конечны величины $|\overset{s}{v}| = \left[\|\mathcal{D}^2\overset{s}{v}\|^2_{-\alpha,0} + \|\mathcal{D}\overset{s}{v}\|^2_{-\alpha-2,0} + \|\overset{s}{v}\|^2_{-\alpha-4,0}\right]^{1/2}$, где нормы в правой части вычисляются по всему $\mathbb{R}^m$. Будем также считать последовательность $\{\overset{s}{v}\}_{s\geq 0}$ такой, что

$$\sum |\overset{s}{v}|^2 < +\infty. \tag{20}$$

Если справедливо неравенство (20), то, очевидно, при любом вещественном α_1 верно и соотношение $\sum \|\overset{s}{v}\|^2_{W^{(2)}_{2,\alpha_1}(\omega_\delta)} < +\infty$, где $\omega_\delta = \omega \setminus \overline{B}_{\delta/2}$, так как функция r^β ограничена и положительна на ω_δ при любом β. Наконец, пусть $\{\tau_s\}, \{\varkappa_s\} \subset \mathbb{R}$ некоторые ограниченные последовательности, которые выбираются в дальнейшем определенным образом. Введём обозначение

$$F_s(v) \equiv \mathscr{D}_j\left(\frac{1}{r^{\tau_s}}\mathscr{D}_j(r^{\tau_s}v)\right) + \varkappa_s\frac{v}{r^2} = \Delta v + \tau_s\mathscr{D}_j\frac{x_j v}{r^2} + \varkappa_s\frac{v}{r^2}.$$

Если $|v| < +\infty$, то $F_s(v) \in \mathscr{L}_{2,-\alpha}(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим функцию $V = \sum F_s(\overset{s}{v})$. При условии (20), вообще говоря, неверно, что $V \in \mathscr{L}_{2,-\alpha}(\mathbb{R}^m)$. Однако, если последовательность $\{\overset{s}{v}\}$ выбрана подходящим образом, то V будет элементом этого пространства.

Пусть (r, ϑ) — сферические координаты с центром в x_0, а $\{Y_{s,k}(\vartheta)\}_{s\geq 0;k=1,\ldots,k_s}$ — полная система сферических функций (далее для сокращения записи индекс k у сферических функций и коэффициентов Фурье будем опускать). Возьмем функции $\overset{s}{v}$ в виде

$$\overset{s}{v}(x) = v_s(r)\,Y_s(\vartheta). \tag{21}$$

Тогда

$$\|V\|_{-\alpha,0} = \sum_{s,p}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\Delta\overset{s}{v} + \tau_s\mathscr{D}_j\frac{x_j\overset{s}{v}}{r^2} + \varkappa_s\frac{\overset{s}{v}}{r^2}\right)$$
$$\times\left(\Delta\overset{p}{v} + \tau_p\mathscr{D}_i\frac{x_i\overset{p}{v}}{r^2} + \varkappa_p\frac{\overset{p}{v}}{r^2}\right)r^{-\alpha}\,dx.$$

Так как $2\mathscr{D}_j(x_jv/r^2) = (m-3)\,v/r^2 + \Delta(vr)/r - \Delta v$, то, используя равенство (21), ортогональность сферических функций и ограниченность последовательностей $\{\tau_s\}$ и $\{\varkappa_s\}$, после соответствующих вычислений получим

$$\|V\|^2_{-\alpha,0} \leqq C\sum_{s=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left\{|v_s''|^2 + (\lambda_s+1)\frac{|v_s'|^2}{r^2} + (\lambda_s^2+1)\frac{|v_s|^2}{r^4}\right\}r^{m-\alpha-1}\,dr$$
$$\leqq C_1\sum_{s=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left\{|v_s''|^2 + (2\lambda_s+m)\frac{|v_s'|^2}{r^2}\right.$$
$$\left.+\,[\lambda_s(\lambda_s+2m-3\alpha+7)+1]\frac{|v_s|^2}{r^4}\right\}r^{m-\alpha-1}\,dr = C_1\sum_{s=0}^{+\infty}|\overset{s}{v}|^2 < +\infty,$$

где $\lambda_s = s(s+m-2)$ — собственные числа оператора Бельтрами. Таким образом, из (20) и (21) вытекает, что $V \in \mathscr{L}_{2,-\alpha}(\mathbb{R}^m)$, если $\{v_s(r)\}$ — произвольная последовательность функций, для которой верно (20).

Умножим теперь равенство (10) на $V(x)\,\zeta$ (при этом обе части равенства будут элементами пространства $\mathscr{L}_1(\omega)$) и проинтегрируем по B_δ. Тогда получим

$$\int_{B_\delta}\Delta u_{n+1}V(x)\,\zeta\,dx$$
$$= \int_{B_\delta}[\Delta u_n - \varepsilon L(u_n)]\,V(x)\,\zeta\,dx + \int_{B_\delta}(u_{n+1}-u_n)\,V(x)\,\zeta\,dx.$$

В первом интеграле в правой части этого равенства вычислим производные, входящие в оператор и в старших членах проинтегрируем по частям два раза. В результате, обозначая $\tilde{u}_n(x) = u_n(x)\,\zeta$, получим равенство

$$\int \Delta\tilde{u}_{n+1} V(x)\,dx = \sum_{s=0}^{+\infty} \int \left(\mathcal{D}_h\mathcal{D}_j\tilde{u}_n - \varepsilon\,\frac{\partial a_h}{\partial p_l^{(l)}}\,\mathcal{D}_l\mathcal{D}_j\tilde{u}_n^{(l)}\right) \times \left[\mathcal{D}_h\,\frac{1}{r^{\tau_s}}\left(\mathcal{D}_j(r^{\tau_s}\dot{v})\right) + \varkappa_s\delta_{hj}\,\frac{\dot{v}}{r^2}\right] dx + S. \tag{22}$$

В этом равенстве интегралы можно считать распространенными на все $\mathbb{R}^m$, по h, t суммирование подразумевается в пределах от 0 до m, по j — от 1 до m, по l — от 1 до N, а S обозначает младшие члены. С помощью функций

$$w_{n,j} = \mathcal{D}_j\mathcal{D}_l\tilde{u}_n^{(l)}, \qquad z_j = \sum_{s=0}^{+\infty}\left[\mathcal{D}_h\left(\frac{1}{r^{\tau_s}}\,\mathcal{D}_j(r^{\tau_s}\dot{v})\right) + \varkappa_s\delta_{hj}\,\frac{\dot{v}}{r^2}\right]$$

равенство (22) представим в виде

$$\int \Delta\tilde{u}_{n+1} V(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m}\int \left((I - \varepsilon A)\,w_{n,j}, z_j\right) dx + S,$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(m+1)}$. Поэтому

$$\left|\int \Delta\tilde{u}_{n+1} V(x)\,dx\right| \leqq K_\varepsilon \left[\sum_{j,h}\int |\mathcal{D}_j\mathcal{D}_h\tilde{u}_n|^2\, r^\alpha\,dx\right]^{1/2} \times \left\{\sum_{j,h}\int\left|\sum_{s=0}^{+\infty}\left[\mathcal{D}_h\left(\frac{1}{r^{\tau_s}}\,\mathcal{D}_j(r^{\tau_s}\dot{v})\right) + \varkappa_s\delta_{hj}\,\frac{\dot{v}}{r^2}\right]\right|^2 r^{-\alpha}\,dx\right\}^{1/2} + |S|. \tag{23}$$

Здесь K_ε — верхняя оценка для нормы матрицы $I - \varepsilon A$. В случае симметричной матрицы A будет $\inf\limits_{\varepsilon>0} K_\varepsilon = (\Lambda - \lambda)/(\Lambda + \lambda)$. Далее будем считать, что параметр ε в итерационном процессе (10) выбран так, что $K_\varepsilon = (\Lambda - \lambda)/(\Lambda + \lambda)$. В соотношении (23) слагаемые, соответствующие $h = 0$, можно отнести в сумму S. С помощью стандартных рассуждений при условиях 2—4, оценивая все входящие в S слагаемые, получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\left|\int \Delta\tilde{u}_{n+1} V(x)\,dx\right| \\
&\leqq K_\varepsilon(1 + C\delta)\,\|\mathcal{D}^2\tilde{u}_n\|_{\alpha,0}\left\{\int\sum_{i,j=1}^{m}\left|\sum_{s=0}^{+\infty}\left[\mathcal{D}_i\left(\frac{1}{r^{\tau_s}}\,\mathcal{D}_j(r^{\tau_s}\dot{v})\right) + \varkappa_s\delta_{ij}\,\frac{\dot{v}}{r^2}\right]\right|^2 r^{-\alpha}\,dx\right\}^{1/2} \\
&\quad + C[\delta\,\|\mathcal{D}^2\tilde{u}_n\|_{\alpha,0} + \delta^2\,\|\mathcal{D}^2\tilde{u}_{n+1}\|_{\alpha,0} + C_1(\delta)]\left(\sum_{s=0}^{+\infty}|\dot{v}|^2\right)^{1/2} \\
&\quad + C_2(\delta)\,(1 + \|\mathcal{D}^2\tilde{u}_n\|_{\alpha,0})\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\left\|\dot{v}\right\|^2_{W^{(2)}_{2,\alpha_1}(\omega_\delta)}\right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{24}$$

где α_1 — произвольное вещественное число. Отметим, что постоянная $C_1(\delta)$ зависит от $\mathcal{L}_q$-нормы функции φ из условия 4 и от $\chi = \alpha + m(1 - 2/q)$.

Напомним, что $u_n \in W^{(l)}_{2,\alpha}(\omega)$. В работе [10] показано, что при $\alpha \in (-m, 4 - m)$ для функции u_n определено значение $u_n(x_0)$, а при $\alpha \in (-m, 2 - m)$, кроме того, еще определено и значение $\nabla u_n(x_0)$. При этом имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned} |u_n(x_0)| &\leqq C\delta^{(2-m-\alpha)/2}\,\|\mathcal{D}u_n\|_{\alpha,0} + C\,\|u_n\|_{\mathcal{L}_2(\omega)}, \\ |\nabla u_n(x_0)| &\leqq C\delta^{(2-m-\alpha)/2}\,\|\mathcal{D}^2u_n\|_{\alpha,0} + C\,\|u_n\|_{W_2^{(1)}(\omega)}, \\ |u_n(x_0)| &\leqq C\delta^{(4-m-\alpha)/2}\,\|\mathcal{D}^2u_n\|_{\alpha,0} + C\,\|u_n\|_{W_2^{(1)}(\omega)}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Значит, можно корректно определить функцию $\hat{u}_n$ по функции $\tilde{u}_n$ следующим образом:

$$\hat{u}_n(x) = \begin{cases} \tilde{u}_n(x) - T_1(x_0, x)\,\zeta, & \alpha \in (-m, 2-m), \\ \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(x_0)\,\zeta, & \alpha \in (2-m, 4-m), \\ \tilde{u}_n(x), & \alpha \in (4-m, +\infty), \end{cases}$$

где $T_1(x_0, \cdot)$ — линейный многочлен Тейлора функции $\tilde{u}_n$ в точке x_0. Соотношения (25) позволяют заменить в неравенстве (24) функции $\tilde{u}_n$ и $\tilde{u}_{n+1}$ на функции $\hat{u}_n$ и $\hat{u}_{n+1}$. Иначе говоря, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left|\int \Delta\hat{u}_{n+1}V(x)\,dx\right| \leqq{}& (1 + C\delta)\,\frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda+\lambda}\,\|\mathcal{D}^2\hat{u}_n\|_{\alpha,0} \\ &\times \left\{\int \sum_{i,j=1}^{m}\left|\sum_{s=0}^{+\infty}\left[\mathcal{D}_i\left(\frac{1}{r^{\tau_s}}\,\mathcal{D}_j\big(r^{\tau_s}\overset{s}{v}\big)\right) + \varkappa_s\delta_{ij}\,\frac{\overset{s}{v}}{r^2}\right]\right| r^{-\alpha}\,dx\right\}^{1/2} \\ &+ C[\delta\,\|\mathcal{D}^2\hat{u}_n\|_{\alpha,0} + \delta^2\,\|\mathcal{D}^2\hat{u}_{n+1}\|_{\alpha,0} + C(\delta)]\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\big|\overset{s}{v}\big|^2\right)^{1/2} \\ &+ C(\delta)\,(1 + \|\mathcal{D}^2\hat{u}_n\|_{\alpha,0})\left(\sum_{s=0}^{+\infty}\big\|\overset{s}{v}\big\|^2_{W^{(2)}_{2,\alpha_1}(\omega_\delta)}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Полученное неравенство позволяет установить сходимость процесса (10), (11) в норме пространства $H_{2,\alpha}(\Omega')$ и, тем самым, доказать теорему 6. Для этого необходимо подходящим образом выбрать функции $\overset{s}{v}$ и последовательности $\{\tau_s\}$ и $\{\varkappa_s\}$. В случае, когда $\tau_s = \varkappa_s \equiv 0$ и $\overset{s}{v}$ — Фурье-компоненты пробной функции v, выбор функции v описан в [6] и в результате получена теорема 5. Сейчас функции $\overset{s}{v}$ выберем так, что

$$\begin{aligned} I \equiv{}& \int \sum_{i,j=1}^{m}\left|\sum_{s=0}^{+\infty}\left[\mathcal{D}_i\left(\frac{1}{r^{\tau_s}}\,\mathcal{D}_j\big(r^{\tau_s}\overset{s}{v}\big)\right) + \varkappa_s\delta_{ij}\,\frac{\overset{s}{v}}{r^2}\right]\right|^2 r^{-\alpha}\,dx \\ ={}& \int \Delta\hat{u}_{n+1}V(x)\,dx, \end{aligned} \tag{27}$$

где интегралы, как и раньше, распространены на все $\mathbb{R}^m$. Непосредственное вычисление входящих в это равенство интегралов через функции v_s и коэффициенты Фурье $u_s(r)$ функции $\hat{u}_{n+1}$ приводит к тому, что для функций v_s должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\Big\{&v_s'''' + 2(m-\alpha-1)\,\frac{v_s'''}{r} - [2\lambda_s + m - 1 - (m-\alpha-1)(m-\alpha-2) \\ &+ \tau_s(\alpha - m + 4) - 2\varkappa_s + \tau_s^2]\,\frac{v_s''}{r^2} \\ &- (m-\alpha-3)\,[2\lambda_s + m - 1 + \tau_s(\alpha - m + 4) - 2\varkappa_s + \tau_s^2]\,\frac{v_s'}{r^3} \end{aligned}$$

$$+ \{\lambda_s(\lambda_s + 2m - 3\alpha - 8) + \tau_s[\lambda_s(\alpha - m) + (m - \alpha - 4)(\alpha - 2m + 4)] - \varkappa_s[2\lambda_s + (\alpha + 2)(m - \alpha - 4)] + \tau_s^2(\lambda_s + 2m - \alpha - 4) + \tau_s\varkappa_s(m + \alpha) + m\varkappa_s^2\} \frac{v_s}{r^4}\Bigg\} v_s r^{m-\alpha-1}\, dr$$

$$= \sum_{s=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Bigg\{ u_s'''' + [2(m-1) - \tau_s] \frac{u_s'''}{r} - [2\lambda_s - (m-1)(m-3) + \tau_s(m-1) - \varkappa_s] \frac{u_s''}{r^2} - [(m-3)(2\lambda_s + m - 1) - \tau_s(\lambda_s + m - 1) - (m-1)\varkappa_s] \frac{u_s'}{r^3} + \lambda_s(\lambda_s + 2m - 8 - 2\tau_s - \varkappa_s) \frac{u_s}{r^4} \Bigg\} v_s r^{m-1}\, dr.$$

В этом равенстве от функций $\overset{s}{v}$ и $\hat{u}_{n+1}$ требуется большая гладкость, чем та, которой они обладают как элементы пространства $W^{(2)}_{2,\pm\alpha}(\mathbb{R}^m)$. Это обстоятельство, однако, может быть легко преодолено с помощью стандартных рассуждений, так как гладкие функции плотны в весовых соболевских пространствах. Таким образом, в качестве функции $v_s(r)$ можно взять одно из решений обыкновенного дифференциального уравнения типа Эйлера

$$r^4 v_s'''' + 2(m - \alpha - 1) r^3 v_s''' - [2\lambda_s + m - 1 - (m - \alpha - 1)(m - \alpha - 2) + \tau_s(\alpha - m + 4) - 2\varkappa_s + \tau_s^2] r^2 v_s'' - (m - \alpha - 3)[2\lambda_s + m - 1 + \tau_s(\alpha - m + 4) - 2\varkappa_s + \tau_s^2] r v_s' + \{\lambda_s(\lambda_s + 2m - 3\alpha - 8) + \tau_s[\lambda_s(\alpha - m) + (m - \alpha - 4)(\alpha - 2m + 4)] - \varkappa_s[2\lambda_s + (\alpha + 2)(m - \alpha - 4)] + \tau_s^2(\lambda_s + 2m - \alpha - 4) + \tau_s\varkappa_s(m + \alpha) + m\varkappa_s^2\} v_s = r^\alpha f_s(r),$$

где

$$f_s(r) = r^4 u_s'''' + [2(m-1) - \tau_s] r^3 u_s''' - [2\lambda_s - (m-1)(m-3) + \tau_s(m-1) - \varkappa_s] r^2 u_s'' - [(m-3)(2\lambda_s + m - 1) - \tau_s(\lambda_s + m - 1) - (m-1)\varkappa_s] r u_s' + \lambda_s(\lambda_s + 2m - 8 - 2\tau_s - \varkappa_s) u_s.$$

Все решения уравнения (27) можно найти явно и выбрать среди них такое, для которого справедлива оценка (20). При этом устанавливается неравенство

$$\sum_{s=0}^{+\infty} |\overset{s}{v}|^2 \leqq C\, \|\mathcal{D}^2 \hat{u}_{n+1}\|^2_{\alpha,0}. \tag{28}$$

Кроме этой оценки, при некотором α_1 имеет место и неравенство

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \|\overset{s}{v}\|^2_{W^{(2)}_{2,\alpha_1}(\omega_\delta)} \leqq C \|\hat{u}_{n+1}\|^2_{W^{(2)}_{2,\beta}(\omega)} + c(\delta)\, \|\mathcal{D}^2 \hat{u}_{n+1}\|^2_{\alpha,0}, \tag{29}$$

где $c(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. В этом неравенстве $\alpha_1 = \beta = 0$ при $m = 3$, а при $m > 3$ можно взять некоторое $\beta > \alpha$, причем так, что разность $\beta - \alpha$ не зависит от α. Наконец, для интеграла I, определенного в равенстве (27), можно получить и оценку снизу

$$I \geqq \|\mathcal{D}^2 \hat{u}_{n+1}\|^2_{\alpha,0}/N(\alpha). \tag{30}$$

При получении этой оценки параметры τ_s и $\varkappa_s$ выбираются оптимальным образом так, чтобы обеспечить минимальное значение константы $N(\alpha)$. Как функция от α величина $N(\alpha)$ монотонна и для нее имеет место равенство

$$N(2 - m) = 1 + \frac{2m(m-2)^2\,(m^3 - 2m^2 + 4m - 5)}{(m+1)\,(3m^4 - 9m^3 + 10m^2 - 7m + 7)}.$$

Отметим, что наибольшая техническая сложность в доказательстве теоремы состоит в получении оценок (28)—(30). Их доказательство, так же, как и подробное описание нахождения оптимальных параметров τ_s и $\varkappa_s$, мы, к сожалению, вынуждены опустить.

Теперь, выбирая параметры $\beta_0 = 0, \beta_1, \ldots, \beta_k = 2 - m - 2\gamma_0$ при достаточно малом $\gamma_0 > 0$, из неравенства (26) последовательно получаем равномерную по $x_0 \in \Omega'$ ограниченность последовательности норм $\|\mathcal{D}^2 \hat{u}_n\|_{\beta_i,0}$. Отсюда и из свойств пространства $H_{2,\alpha}(\Omega')$ нетрудно заключить, что $u \in C^{(1,\gamma)}(\Omega')$ при некотором $\gamma \in (0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cordes, H. O.: Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Ann. **131** (1956), 278—312.

[2] Кошелев, А. И.: Регулярность решений квазилинейных эллиптических систем. Успехи мат. наук **33** (1978), 4, 3—49.

[3] Кошелев, А. И.: О точных условиях гладкости решений эллиптических систем и теореме Лиувилля. Докл. Акад. Наук СССР **265** (1982), 1309—1311.

[4] Кошелев, А. И.: Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. Москва: Изд-во Наука 1986.

[5] Кошелев, А. И.: Гладкость решений некоторых нелинейных краевых задач для уравнений с недифференцируемыми коэффициентами. Докл. Акад. Наук СССР **298** (1988), 26—28.

[6] Koshelev, A. I., and S. I. Chelkak: Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 77). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1985.

[7] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва: Идз-во Наука 1973.

[8] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности. Успехи мат. наук **41** (1986) 5, 59—83.

[9] Ладыженская, О. А., Солонников, В. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Изд-во Наука 1977.

[10] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Весовые пространства с неоднородными нормами и краевые задачи в областях с коническими точками. В сб.: Elliptische Differentialgleichungen. Vorträge Tag. Rostock 10.—16. 10. 1977. Berlin: Math. Ges. DDR und Rostock: Wilhelm-Pieck-Univ. 1978, S. 161—190.

[11] Morrey, Ch.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1966.
[12] Nirenberg, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 103—156.
[13] Челкак, С. И.: Регулярность решений квазилинейных эллиптических систем четвёртого порядка. Москва: Всесоюзный ин-т научн. тех. информации (ВИНИТИ) № 4357 83 Деп., 1983.

Manuskripteingang: 22. 07. 1988

VERFASSER:

Проф. Д-р Александр Иванович Кошелев, Д-р Сергей Иванович Челкак и Д-р Владимир Матвеевич Чистяков
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)
ул. проф. Попова 5
СССР-197 022 Ленинград