Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (5) 1989, S. 407 – 423

Bernstein-Sato-Polynome und Faltungsgruppen zu Differentialoperatoren

P. Wagner

Die Arbeit beruht auf der Bernsteinschen Methode der analytischen Fortsetzung der distributionswertigen Funktion P^λ (P ein Polynom) bezüglich des komplexen Exponenten λ. Für einen homogenen elliptischen partiellen Differentialoperator $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$ wird die Faltbarkeit und die Gültigkeit der Relation $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$ in der „Faltungsgruppe" $\{T_\lambda\}$, welche P^λ via Fourier-Transformation entspricht, durch eine Bedingung an die Indizes λ, μ charakterisiert. Dies verallgemeinert die bekannten Faltungseigenschaften der Rieszschen Kerne R_λ, die die Faltungsgruppe des Laplace-Operators darstellen. In einem zweiten Abschnitt wird der Bernsteinsche Fortsetzungsprozeß für das Polynom P der Form $x_1{}^m + \cdots + x_n{}^m$ konstruktiv durchgeführt, und es wird seine Bedeutung für die Berechnung von Fundamentallösungen der Potenzen des zugehörigen Differentialoperators $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$ am Beispiel $\partial_1{}^4 + \partial_2{}^4$ illustriert.

Работа основана на методе Бернштейна аналитического продолжения дистрибутивнозначной функции P^λ (P — многочлен) относительно комплексного параметра λ. Для однородного эллиптического дифференциального оператора с частными производными $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$ характеризуется возможность свёртывания и достоверность отношения $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$ в „группе сверток" $\{T_\lambda\}$, соответствующей P^λ через трансформацию Фурье, посредством условия на индексы λ и μ. Это обобщает известные свойства свертки ядер Рисса R_λ, представляющих группу сверток оператора Лапласа. Во второй части процесс продолжения Бернштейна проводится конструктивно для полинома P вида $x_1{}^m + \cdots + x_n{}^m$ и иллюстрируется его значение для вычисления фундаментальных решений степеней соответствующего дифференциального оператора $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$ на примере $\partial_1{}^4 + \partial_2{}^4$.

This work relies on Bernstein's method of analytic continuation of the distribution-valued function P^λ (P a polynomial) with respect to the complex exponent λ. In the case of a homogeneous, elliptic partial differential operator $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$, the convolvability and the validity of the relation $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$ in the "convolution group" $\{T_\lambda\}$, which corresponds to P^λ through Fourier transform, is characterized by a condition on the indices λ, μ. In this way, we generalize the known convolution properties of the elliptic Riesz kernels R_λ, which represent the convolution group of the Laplacean operator. In a second part, Bernstein's process of analytic continuation is carried out in a constructive manner in the special case of the polynomial P being of the form $x_1{}^m + \cdots + x_n{}^m$. The importance of this process for the computation of fundamental solutions of the powers of the corresponding differential operator $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$ is illustrated in working out the example $\partial_1{}^4 + \partial_2{}^4$.

1. Einleitung

Diese Arbeit entstand aus dem Bestreben, zwei Verfahren für partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) auf Differentialoperatoren höherer Ordnung zu verallgemeinern. Zum einen war dies die Verwendung der sogenannten Rieszschen Kerne im Zusammenhang mit den Operatoren

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2}$$

(vgl. [12, 14, 22]), zum anderen eine Methode zur sukzessiven Gewinnung von Fundamentallösungen der Potenzen eines Operators zweiter Ordnung durch Multiplikation mit Polynomen (vgl. [23, p. 289], [20, p. 149]).

Der vorbereitende Abschnitt 3 enthält einige grundlegende Sätze über quasihomogene Distributionen. Anschließend erläutere ich die Bernsteinsche Methode der meromorphen Fortsetzung von P^λ bezüglich λ in $\mathbb{C}$, wobei P ein reelles Polynom ist (siehe etwa [1]). Für homogene, elliptische Differentialoperatoren wird eine Charakterisierung der Faltungseigenschaften derjenigen Distributionen, welche den Rieszschen Kernen entsprechen, bewiesen (Sätze 6, 7). Weiteres wird eine explizite Rekursionsformel zur Berechnung von Fundamentallösungen der Operatoren

$$\left(\frac{\partial^m}{\partial x_1{}^m} + \cdots + \frac{\partial^m}{\partial x_n{}^m}\right)^l, \qquad m = 2, 3, \ldots, \qquad l \in \mathbb{N},$$

abgeleitet (Sätze 5, 8). Dabei ergibt sich auch das Bernstein-Sato-Polynom von $x_1{}^m + \cdots + x_n{}^m$.

Gedankt sei an dieser Stelle Herrn Prof. J. Horváth, der 1985 eine Verallgemeinerung der M. Rieszschen Methode vorschlug und mit seinem Hinweis auf den Zusammenhang dieser Frage mit den Resultaten von I. N. Bernstein den Anstoß zur vorliegenden Arbeit gab.

2. Bezeichnungen

$\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen, 0 eingeschlossen, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wie üblich die Mengen der ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen. Der Buchstabe n bleibt für die Dimension des Raumes $\mathbb{R}^n$ reserviert. Der euklidische Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ vom Ursprung wird mit $|x|$ oder r bezeichnet. Das euklidische innere Produkt im $\mathbb{R}^n$ wird durch einen Multiplikationspunkt angezeigt. Wir schreiben $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ für die Oberfläche der Einheitskugel.

Es wird die übliche Multiindexschreibweise verwendet; für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist beispielsweise $x^\alpha = x_1{}^{\alpha_1} \cdots x_n{}^{\alpha_n}$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Weiters schreiben wir ∂_j für $\partial/\partial x_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ und ∂^α für $\partial_1{}^{\alpha_1} \cdots \partial_n{}^{\alpha_n}$. Y bezeichnet die Heaviside-Funktion: $Y(x) = 0$ für $x \leqq 0$ und $Y(x) = 1$ für $x > 0$. Die Signum-Funktion $-1 + 2Y(x)$ wird durch $\operatorname{sign}(x)$ abgekürzt. Für den natürlichen Logarithmus einer komplexen Zahl z wird $\log z$ geschrieben. Welcher Zweig des Logarithmus zu nehmen ist, wird dabei jeweils angegeben. $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ bezeichnen den Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl z, $\operatorname{gr} P$ den Grad eines Polynoms P.

Alle Räume der Distributionentheorie werden wie in [23] bezeichnet. Verwendet werden insbesondere $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'_{L^1}$ und $\mathcal{S}'$, d. h. die Räume aller Distributionen, der Distributionen mit kompakten Träger sowie der integrierbaren bzw. der temperierten Distributionen. Die Anwendung einer Distribution T auf eine Testfunktion φ wird in der Form $\langle \varphi, T \rangle$ geschrieben; δ bezeichnet das Dirac-Maß im Ursprung, d. h. $\langle \varphi, \delta \rangle = \varphi(0)$. Die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ wird wie in [23, Ch. VII] definiert, d. h. also $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x)\, dx$ für $\varphi \in L^1$. Die am Ursprung gespiegelte Distribution zu einer Distribution T wird mit $\check{T}$ bezeichnet. Die Faltbarkeit zweier Distributionen S und T sowie ihr Faltungsprodukt werden wie in [13] verstanden. Wenn $z \mapsto T_z$ eine distributionswertige, meromorphe Funktion ist, so schreiben wir $\operatorname*{Res}_{z=\lambda} T_z$ bzw. $\operatorname*{Res} T_z$ und $\operatorname*{Pf}_{z=\lambda} T_z$ bzw. $\operatorname{Pf} T_z$ für die Koeffizienten der Glieder $(z - \lambda)^{-1}$ und $(z - \lambda)^0$ der Laurent-Reihe von T_z um λ (hierbei steht Res für „Residuum" und Pf für „partie finie"). Eine zusammenfassende Darstellung der Eigenschaften vektorwertiger, meromorpher Funktionen wird in [12] gegeben.

3. Quasihomogene Distributionen

Im folgenden gebe ich eine kurze Zusammenfassung der von mir verwendeten Sätze über quasihomogene Distributionen. Dieser Begriff wird in [15] eingeführt und näher untersucht. Ausführliche Darstellungen für den hauptsächlich benötigten Spezialfall der homogenen Distributionen finden sich weiters in [7, 8, 16], [9, Ch. III, 3.], [11, 3.2 und 7.1]. Ich verzichte daher auf Beweise.

In diesem Abschnitt seien $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ vorgegeben; $a := (a_1, \ldots, a_n)$, $|a| := a_1 + \cdots + a_n$, $c^{\pm a} := (c^{\pm a_1}, \ldots, c^{\pm a_n}) \in \mathbb{R}^n$ für $c > 0$, $x \circ y := (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) \in \mathbb{R}^n$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ heißt *quasihomogen vom Grad* $\lambda \in \mathbb{C}$ *(zum Modul a)*, wenn $T(c^a \circ x) = c^\lambda T$ für $c > 0$ gilt. Falls $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ ist, nennt man T *homogen vom Grad* λ.

ϱ sei positiv, quasihomogen vom Grad 1 und unendlich oft differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus 0$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) \leq 1\}$, $\Gamma := \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) = 1\}$, $j : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ sei die kanonische Einbettung. Als *Leraysche Differentialform* auf Γ bezeichnet man die $(n-1)$-Form

$$j^*(a_1 x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - a_2 x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n + - \cdots).$$

$d\sigma$ sei das zugehörige (positive) Maß auf Γ. Wenn do das Oberflächenmaß und $\nu := \nabla\varrho/|\nabla\varrho|$ den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor auf der Fläche Γ bezeichnen, so gilt $d\sigma = (a \circ x) \cdot \nu do = do/|\nabla\varrho|$. Wenn wir $d\sigma$ als Distribution in $\mathbb{R}^n$ auffassen $\left(\langle \varphi, d\sigma\rangle = \oint\limits_\Gamma \varphi(x)\, d\sigma(x)\right)$, so gilt $d\sigma = \sum\limits_{i=1}^n a_i x_i \partial_i \chi_\Omega$, wobei $\chi_\Omega = Y\big(1 - \varrho(x)\big)$ ist.

Wir setzen $\mathcal{D}(\Gamma) := \mathcal{E}^\infty(\Gamma)$; $\mathcal{D}'(\Gamma)$ bezeichne den Dualraum. Wir können $L^1(\Gamma)$ vermöge der Einbettung

$$L^1(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Gamma) : f \mapsto \left(\varphi \mapsto \oint\limits_\Gamma f(x)\, \varphi(x)\, d\sigma(x)\right)$$

als Teilmenge von $\mathcal{D}'(\Gamma)$ auffassen. Für $f \in L^1(\Gamma)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > -|a|$ ist $f \cdot \varrho^\lambda : x \mapsto f\big(\varrho(x)^{-a} \circ x\big)\, \varrho(x)^\lambda$ eine lokalintegrable Funktion in $\mathbb{R}^n$, die quasihomogen vom Grad λ ist. Allgemeiner, wenn $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, so definieren wir eine Distribution $F \cdot \varrho^\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned}\langle \varphi, F \cdot \varrho^\lambda\rangle := & \int\limits_1^\infty t^{\lambda+|a|-1} \langle \varphi(t^a \circ x), F(x)\rangle\, dt \\ & + \int\limits_0^1 t^{\lambda+|a|-1} \Big\langle \Big(\varphi(t^a \circ x) - \sum \alpha!^{-1}\, \partial^\alpha \varphi(0)\, t^{a\cdot\alpha} x^\alpha\Big), F(x)\Big\rangle\, dt \\ & + \operatorname{Pf}\left(\sum \alpha!^{-1} \partial^\alpha \varphi(0)\, \langle x^\alpha, F\rangle \frac{1}{\lambda + |a| + a\cdot\alpha}\right),\end{aligned}$$

wobei die Summen über die $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $a \cdot \alpha < -|a| - c$ zu erstrecken sind und c mit $c < \operatorname{Re}\lambda$ beliebig gewählt werden kann. Daß sich damit für integrable Funktionen F und $\operatorname{Re}\lambda > -|a|$ wieder das ursprüngliche ergibt, ist eine Folge der Isomorphie von Maßräumen

$$(\mathbb{R}^n, dx) \to (\Gamma, d\sigma) \times \big((0, \infty), \varrho^{|a|-1} d\varrho\big), \quad x \mapsto \big(\varrho(x)^{-a} \circ x, \varrho(x)\big),$$

$$\varrho^a \circ x \leftarrow (x, \varrho)$$

$$\left(\text{d. h.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int\limits_0^\infty \varrho^{|a|-1} d\varrho \oint\limits_\Gamma f(\varrho^a \circ x)\, d\sigma(x)\right)$$

und der Art der Einbettung von $L^1(\Gamma)$ in $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

Satz 1: *Die im folgenden definierten Abbildungen A_λ und B_λ sind Isomorphismen von Vektorräumen.*

a) *λ sei eine beliebige komplexe Zahl;*

$$A_\lambda\colon \mathcal{D}'(\Gamma) \to \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus 0)\colon T \text{ quasihomogen vom Grad } \lambda\},$$
$$A_\lambda(F) := F \cdot \varrho^\lambda|_{\mathbb{R}^n\setminus 0}.$$

b) *Die komplexe Zahl λ sei nicht von der Form $-|a| - a \cdot \alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$;*

$$B_\lambda\colon \mathcal{D}'(\Gamma) \to \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\colon T \text{ quasihomogen vom Grad } \lambda\}, \quad B_\lambda(F) := F \cdot \varrho^\lambda.$$

c) *Es sei $\lambda = -|a| - p$ und $p = a \cdot \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}^n$;*

$$B_\lambda\colon \{F \in \mathcal{D}'(\Gamma)\colon \forall \alpha \text{ mit } a \cdot \alpha = p,\ \langle x^\alpha, F\rangle = 0\} \oplus \Big\{\sum_{a\cdot\alpha=p} c_\alpha \partial^\alpha \delta\colon c_\alpha \in \mathbb{C}\Big\}$$
$$\to \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\colon T \text{ quasihomogen vom Grad } \lambda\},$$
$$B_\lambda(F, T_0) := F \cdot \varrho^\lambda + T_0.$$

Satz 2: *Es sei $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$. Die Funktion $\mathbb{C} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\colon \lambda \mapsto F \cdot \varrho^\lambda$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{-|a| - a \cdot \alpha\colon \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ analytisch. Sie hat höchstens einfache Pole in den Punkten $\lambda_0 = -|a| - a \cdot \alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dort gilt*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} F \cdot \varrho^\lambda = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ \lambda_0=-|a|-a\cdot\alpha}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle x^\alpha, F\rangle\, \partial^\alpha\delta \quad \textit{und} \quad \operatorname*{Pf}_{\lambda=\lambda_0} F \cdot \varrho^\lambda = F \cdot \varrho^{\lambda_0}.$$

Bemerkung: Im homogenen Fall, d. h. für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, können wir die Formel für die Residuen kürzer so schreiben:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n-k} F \cdot \varrho^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!} \langle (x \cdot \partial_\xi)^k, F(x)\rangle\, \delta_\xi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Folgerung zu Satz 2: *Im Spezialfall $F = 1$ ergibt sich*

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} \varrho^\lambda = -\lambda_0 \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ \lambda_0=-|a|-a\cdot\alpha}} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_\Omega x^\alpha\, dx\, \partial^\alpha\delta.$$

Satz 3: *Es sei $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

a) *Für $-\lambda - n \notin \mathbb{N}$ gilt*

$$\langle \varphi, \mathcal{F}(F \cdot \varrho^\lambda)\rangle = \Gamma(\lambda + n)\, \langle\langle \varphi(\xi), (2\pi i x \cdot \xi)^{-\lambda-n}\rangle, F(x)\rangle.$$

b) *Wenn hingegen $-\lambda - n = k \in \mathbb{N}$ ist, so gilt*

$$\langle \varphi, \mathcal{F}(F \cdot \varrho^\lambda)\rangle = \frac{(-1)^k}{k!} \Big\langle\langle \varphi(\xi), (2\pi i x \cdot \xi)^k \big(\psi(k+1)$$
$$- \log(2\pi i x \cdot \xi)\big)\rangle, \quad F(x)\Big\rangle.$$

Bemerkung: Wie üblich wird $\psi(z) := \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ definiert; weiters wird für $x \neq 0$ die Distribution $(2\pi i x \cdot \xi)^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi{}^n)$ durch

$$\langle \varphi(\xi), (2\pi i x \cdot \xi)^\lambda\rangle = \left\langle \int_{x\cdot\xi=t} \varphi(\xi)\, do(\xi), (2\pi i t)^\lambda \right\rangle$$

definiert; do ist dabei das euklidische Oberflächenmaß auf der Hyperebene $x \cdot \xi = t$, $(2\pi i t)^\lambda = f \cdot |t|^\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t^1)$ mit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}_0) \simeq \mathbb{C}^2$, $f(1) = (2\pi)^\lambda e^{\pi i\lambda/2}$, $f(-1) = \overline{f(1)}$. (Aus Satz 2 folgt, daß $(2\pi i t)^\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ analytisch ist.)

Folgerung zu Satz 3: *Es gelte* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

a) *Für* $-\lambda - n \notin \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}\lambda < 1 - n$ *gilt*

$$(\mathcal{F}\varrho^\lambda)(\xi) = -\lambda\Gamma(\lambda + n)\int_\Omega (2\pi i x \cdot \xi)^{-\lambda-n}\,dx.$$

b) *Wenn hingegen* $-\lambda - n = k \in \mathbb{N}$ *ist, so gilt unter der Voraussetzung* $\varrho = \check{\varrho}$:

$$(\mathcal{F}\varrho^{-n-k})(\xi) = \begin{cases} (-1)^{k/2}\dfrac{n+k}{k!}\displaystyle\int_\Omega (2\pi x\cdot\xi)^k\left(\psi(k+1) - \log|2\pi x\cdot\xi|\right)dx & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ (-1)^{(k+1)/2}\dfrac{n+k}{k!}\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_\Omega |2\pi x\cdot\xi|^k\,dx & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade.}\end{cases}$$

Beispiel: Es seien $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \{2, 4, 6, \ldots\}$, $P = x_1^{m_1} + \cdots + x_n^{m_n}$. Wir setzen $c = m_1 \cdots m_n$, $\varrho = P^{1/c}$, $a_i = c/m_i$ für $i = 1, \ldots, n$. P^λ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \left\{-\sum_{i=1}^n (1 + \alpha_i)/m_i : \alpha_i \in \{0, 2, 4, \ldots\}\right\}$, da das Integral in der Folgerung zu Satz 2 für ein ungerades α_i aus Symmetriegründen verschwindet. Es sei λ_0 eine Polstelle von P^λ. Dann ist

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} P^\lambda = \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0} \varrho^{c\lambda} = \frac{1}{c}\operatorname*{Res}_{\lambda=c\lambda_0}\varrho^\lambda = -\lambda_0 \sum{}' \frac{1}{\alpha!} M_\alpha \partial^\alpha\delta,$$

wobei $\sum'$ Summation über diejenigen $\alpha \in (2\mathbb{N})^n$ bedeute, welche die Bedingung $-\sum_{i=1}^n (1 + \alpha_i)/m_i = \lambda_0$ erfüllen, und $M_\alpha = 2^n \int_V x^\alpha dx$, $V = \{x : x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, P(x) \leqq 1\}$. M_α wird in [4, Nr. 676, Beispiel 12] berechnet. Eine andere Möglichkeit der Auswertung von M_α ergäbe sich durch Einführung von Kugelkoordinaten nach der Transformation $y_i = x_i^{m_i/2}$. Man erhält

$$M_\alpha = -\frac{2^n}{m_1 \cdots m_n\lambda_0}\,\Gamma\left(\frac{\alpha_1 + 1}{m_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_n + 1}{m_n}\right)\Big/\Gamma(-\lambda_0)$$

und daraus

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_0}(x_1^{m_1} + \cdots + x_n^{m_n})^\lambda = \frac{2^n}{m_1 \cdots m_n\Gamma(-\lambda_0)}\sum{}' \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1 + 1}{m_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_n + 1}{m_n}\right)}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}\partial^\alpha\delta.$$

Man vergleiche [14, p. 178, (6)] für den Spezialfall $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 2$.

Anhang: Das in diesem Abschnitt behandelte Konzept der Quasihomogenität nach P. R. Krée ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig. Eine koordinateninvariante Definition wäre die folgende: $\mathbb{R}_+$ sei die Menge der positiven reellen Zahlen, als topologische Gruppe betrachtet, Gl_n bezeichne die Gruppe der invertierbaren, linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ in sich, $h: \mathbb{R}_+ \to \mathrm{Gl}_n$ sei ein stetiger Gruppenhomomorphismus, $\lambda \in \mathbb{C}$. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ bzw. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ heiße *quasihomogen vom Grad* λ (bezüglich h), wenn $T(h(c)x) = c^\lambda T$ für $c > 0$ gilt. Nach [28, Ch. IX] ist $h(c) = c^A$, wobei $A = h'(1): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear ist. Wenn wir A diagonalisierbar und mit positiven Eigenwerten voraussetzen, kommen wir durch geeignete

Koordinatenwahl zum oben behandelten Fall zurück:

$$UAU^{-1} = (\delta_{ij} a_i)_{i,j}, \quad U \in \mathrm{Gl}_n, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow h(c) = c^A = U^{-1} c^{UAU^{-1}} U \Rightarrow T(c^a \circ y) = c^\lambda T$$

im (nicht notwendig orthogonalen) Koordinatensystem $y = Ux$.

Es werde etwa $P(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2)^2 + x_2^6$ im $\mathbb{R}^2$ betrachtet. Sei $y_1 = 2x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$. $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = (3, 1)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} c^3 & (c - c^3)/2 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\lambda = 6$. Nach dem obigen Beispiel hat P^μ einfache Pole in $\mu = -(2 + k)/3$, $k \in \mathbb{N}$. Dies präzisiert das Ergebnis von Beispiel 1 in [29].

4. Über das Bernstein-Sato-Polynom eines reellen Polynoms und die Faltungsgruppen des zugehörigen Differentialoperators

P sei ein reelles Polynom. Im Gebiet $G := \{x: P(x) \neq 0\}$ werde eine Festlegung von $\log P$ als stetige Funktion getroffen. Dies bedeutet, daß für jede Zusammenhangskomponente U von G ein $m \in \mathbb{Z}$ fixiert wird, so daß $\log P = \log |P| + i\pi Y(-P) + 2\pi i m$ in U gilt. Für $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ist dann $P^\lambda(x) := e^{\lambda \log P(x)}$ eine lokalintegrable Funktion. Die Abbildung $\{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \lambda > 0\} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n): \lambda \mapsto P^\lambda$ ist analytisch. (Es läßt sich ohne Mühe die Ableitung nach λ angeben.) Eine von I. N. Bernstein gefundene Methode der analytischen Fortsetzung dieser Abbildung beruht auf der Existenz reeller Polynome $Q(\lambda, x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n)$ und $b(\lambda)$, so daß formal

$$Q(\lambda, x, \partial)\, P^{\lambda+1} = b(\lambda)\, P^\lambda \tag{$*$}$$

gilt (vgl. [1, Ch. 1, 5.7 und 5.8]). P^λ wird dabei als Symbol betrachtet, für das die Beziehungen $PP^\lambda = P^{\lambda+1}$ und $\partial_i P^\lambda = \lambda P^{\lambda-1} \partial_i P$ gelten. Aus der formalen Gültigkeit der Gleichung ($*$) folgt ihre Gültigkeit im klassischen Sinn im Gebiet G, da dort P^λ beliebig oft differenzierbar ist. Weiters gilt ($*$) im klassischen Sinn auch in ganz $\mathbb{R}^n$ für $\operatorname{Re} \lambda > \operatorname{gr} Q$, da $P^{\lambda+1}$ dann $(\operatorname{gr} Q)$-mal stetig differenzierbar ist. Aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung können wir daher folgern, daß ($*$) im distributionellen Sinn für $\operatorname{Re} \lambda > 0$ gilt.

Daß bei komplexwertigen Polynomen Schwierigkeiten entstehen, zeigt das folgende Beispiel. Es sei $P = x_1 + ix_2$ im $\mathbb{R}^2$, $Q = -i\, \partial_2$. Formal gilt $Q(\partial)\, P^{\lambda+1} = (\lambda + 1)\, P^\lambda$, distributionell hingegen $Q(\partial)\, P^{\lambda+1} = (\lambda + 1)\, P^\lambda + 2 \sin((\lambda + 1)\, \pi)\; Y(-x_1)\, |x_1|^{\lambda+1} \otimes \delta_{x_2}$. Hierbei wurde $-\pi < \operatorname{Im} \log P \leqq \pi$ angenommen.

Es sei nun wieder P ein reelles Polynom, Q und b so, daß ($*$) gilt. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > -k$, $k \in \mathbb{N}$, definieren wir

$$P^\lambda = \operatorname{Pf}\left[\frac{Q(\lambda, x, \partial)}{b(\lambda)} \frac{Q(\lambda + 1, x, \partial)}{b(\lambda + 1)} \cdots \frac{Q(\lambda + k - 1, x, \partial)}{b(\lambda + k - 1)}\, P^{\lambda+k}\right] \in \mathcal{S}'.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung hängt P^λ nicht von der speziellen Wahl von Q, b und k ab. Das normierte Polynom b kleinstmöglichen Grades, für das eine Gleichung ($*$) gilt, ist übrigens eindeutig und heißt *Bernstein-Sato-Polynom* von P. Das Polynom Q hingegen läßt sich im allgemeinen nicht eindeutig festlegen.

Die in λ meromorphe, distributionswertige Funktion $T_\lambda := \mathcal{F} P^\lambda$ nenne ich *Faltungsgruppe* des Differentialoperators $P(i\partial/2\pi)$. Offenbar hängt T_λ ebenso wie P^λ von der Festlegung von $\log P$ ab. Man beachte weiters, daß im allgemeinen T_λ, T_μ nicht für beliebige λ, μ faltbar sind. Die Benennung Faltungsgruppe ist also nicht wörtlich zu verstehen; sie erscheint mir jedoch in Anbetracht der folgenden Beispiele sowie von Satz 7 gerechtfertigt. Eine Charakterisierung der Menge der (λ, μ), für welche T_λ, T_μ faltbar sind und $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$ gilt, für weitere Polynomklassen, halte ich für ein interessantes, offenes Problem.

Die grundlegenden Eigenschaften von P^λ und T_λ sind im folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz 4: *Es seien P, P^λ, T_λ, Q und b wie oben. Dann gilt im distributionellen Sinn*

a) $P \cdot P^\lambda = P^{\lambda+1}$, $\mathrm{Pf}\left(Q(\lambda, x, \partial) P^{\lambda+1}\right) = \mathrm{Pf}\left(b(\lambda) P^\lambda\right)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$;

b) $P(\mathrm{i}\partial/2\pi) T_\lambda = T_{\lambda+1}$, $\mathrm{Pf}\left(Q(\lambda, \mathrm{i}\partial/2\pi, 2\pi\mathrm{i}x) T_{\lambda+1}\right) = \mathrm{Pf}\left(b(\lambda) T_\lambda\right)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$;

c) *es existieren* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Q}$ *mit* $\lambda_j < 0$, $b(\lambda_j) = 0$ *für* $j = 1, \ldots, k$, *so daß die Menge der Pole von* T_λ *bzw.* P^λ *die Gestalt* $\{\lambda_j - l \colon 1 \leqq j \leqq k, l \in \mathbb{N}\}$ *hat*;

d) T_{-l} *ist eine Fundamentallösung von* $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)^l$ *für* $l \in \mathbb{N}$.

Beweis: a), b) ergeben sich durch analytische Fortsetzung, d) folgt aus b). Zu c): Wenn λ_0 ein Pol von P^λ ist, so ist auch $\lambda_0 - 1$ ein Pol, da $P \cdot P^\lambda = P^{\lambda+1}$ ist. Es sei nun λ_0 ein Pol von P^λ, und P^λ sei analytisch in $\lambda_0 + 1$. Dann muß wegen a) auch $b(\lambda) P^\lambda$ in λ_0 analytisch sein, und folglich gilt $b(\lambda_0) = 0$. Wenn wir für b das Bernstein-Sato-Polynom von P nehmen, so ist nach M. Kashiwara $\lambda_0 < 0$ und $\lambda_0 \in \mathbb{Q}$ (vgl. [1, Ch. 6, 1.1]). Daraus ergibt sich die Aussage c) ∎

Bemerkung: T_{-1} heißt *Bernsteinsche Fundamentallösung* von $P(\mathrm{i}\partial/2\pi)$ (vgl. [1, Ch. 7, 1.3]).

Beispiel 1: Es sei $P(x) = 4\pi^2 r^2$, $\log P$ werde reell gewählt; dann gilt $Q(\partial) P^{\lambda+1} = b(\lambda) P^\lambda$ für $Q(\partial) = 2^{-4}\pi^{-2}\Delta$ und $b = (\lambda + 1)(\lambda + n/2)$. Weiters ist $P(\mathrm{i}\partial/2\pi) = -\Delta$ und $T_\lambda = \mathcal{F} P^\lambda = \mathrm{Pf}\left(\dfrac{\Gamma(\lambda + n/2)\, r^{-2\lambda-n}}{2^{-2\lambda}\pi^{n/2}\Gamma(-\lambda)}\right) = R_{-2\lambda}$, wobei R_λ wie in [14, p. 180] die elliptischen Kerne von Marcel Riesz bezeichnet, vgl. auch [9, p. 192] und [22, p. 16]. Alle übrigen Faltungsgruppen unterscheiden sich von T_λ nur durch einen multiplikativen Faktor der Form $e^{2\pi i m\lambda}$, $m \in \mathbb{Z}$. Eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Faltbarkeit von T_λ mit T_μ sowie ein Beweis von $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$ (für faltbare T_λ, T_μ) wurden zuerst in [21, Satz 6 und Satz 9] gegeben. Die Sätze 6 und 7 dieser Arbeit sind Verallgemeinerungen hiervon.

Die Pole von P^λ und T_λ liegen bei $\lambda = -n/2, -n/2 - 1, \ldots$ Für ungerades n ist es daher in der zweiten Gleichung von Satz 4/b) für $\lambda = -l \leqq -2$, $l \in \mathbb{N}$, nicht nötig, den partie finie Pf zu nehmen, d. h.

$$Q(-l, \mathrm{i}\partial/2\pi, 2\pi\mathrm{i}x)\, T_{-l+1} = b(-l)\, T_{-l}, \qquad T_{-l} = -\frac{r^2}{2(l-1)(2l-n)}\, T_{-l+1}.$$

Bemerkung: Die letzte Gleichung des obigen Beispiels besagt, daß sich T_{-l} aus T_{-1} durch Multiplikation mit Polynomen rekursiv berechnen läßt. Rekursionsformeln dieser Art für homogene Differentialoperatoren zweiter Ordnung wurden in [20, p. 149] angegeben. Die zweite Formel in Satz 4/b) kann, abgesehen vom partie finie Pf, als Verallgemeinerung dieser Rekursionsformeln auf Operatoren beliebiger Ordnung aufgefaßt werden. (In Satz 5 wird gezeigt, daß es für quasihomogene Operatoren mit positivem Spektrum (im Sinn von [17]) möglich ist, die partie-finie-Bildung zu unterlassen.) Im allgemeinen treten nun neben Multiplikationen mit Polynomen allerdings auch Differentiationen auf. Da sich eine Fundamentallösung eines Produktes von Differentialoperatoren von der Form $\prod_{i=1}^{m} \left(P_1(\partial) + a_i P_2(\partial)\right)$, $a_i \in \mathbb{C}$, in vielen

Fällen durch eine Summe von sogenannten Parameterintegralen über den Parameter λ einer geeignet gewählten Fundamentallösung des iterierten Operators $(P_1(\partial) + \lambda P_2(\partial))^m$ darstellen läßt (vgl. [25]), sind Rekursionsformeln der oben beschriebenen Art von Bedeutung.

Beispiel 2: Nun sei $P(x) = 4\pi^2(-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$, und zunächst werde $\log P$ durch $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \log P(x_1 + i\varepsilon, x_2, \dots, x_n)$ definiert, wobei unter dem Limes-Zeichen jener Zweig des Logarithmus genommen werde, dessen Imaginärteil im Intervall $(-\pi, \pi)$ liegt. Das ergibt $\operatorname{Im}(\log P) = -Y(-P)\operatorname{sign}(x_1)\, i\pi$. Es gilt

$$Q(\partial)\, P^{\lambda+1} = b(\lambda)\, P^\lambda \quad \text{mit} \quad Q = \frac{1}{2^4\pi^2}(-\partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2),$$

$$b = (\lambda + 1)\left(\lambda + \frac{n}{2}\right),$$

$$P\left(\frac{i\partial}{2\pi}\right) = \partial_1^2 - \partial_2^2 - \dots - \partial_n^2, \quad T_\lambda = \operatorname{Pf}\left(\frac{2^{2\lambda+1} s_+^{-2\lambda-n}}{\pi^{-1+n/2}\Gamma(-\lambda)\,\Gamma(1 - \lambda - n/2)}\right)$$
$$= Z_{-2\lambda},$$

wobei Z_λ die hyperbolischen Rieszschen Kerne bezeichnet und

$$s_+(x) = Y(x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)\sqrt{x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$$

ist (vgl. [22], [23, p. 49 und p. 263], [12, p. 48–54]). T_λ, T_μ sind für alle λ, μ faltbar, und es ist $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$. Weiters sind P^λ und T_λ in ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Satz 4/b) liefert

$$T_{-l} = \frac{x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}{2(l-1)(2l-n)}\, T_{-l+1} \quad \text{für} \quad l \in \mathbb{N},\ l \geqq 2,\ l \neq n/2.$$

Bei Wahl von $\log P := \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \log P(x_1 - i\varepsilon, x_2, \dots, x_n)$ erhält man $T_\lambda = \bar{Z}_{-2\lambda}$. Eine weitere mögliche Festlegung des Logarithmus wäre $\log P := \log |P| + i\pi Y(-P)$. Dann stimmt P^λ mit $(P + i0)^\lambda$ in [9, p. 274] überein, und es gilt

$$T_\lambda = -i2^{4\lambda+n}\pi^{2\lambda+n/2}\frac{\Gamma(\lambda + n/2)}{\Gamma(-\lambda)}(P - i0)^{-\lambda-n/2}.$$

Satz 5: *P sei ein quasihomogenes Polynom vom Grad $c > 0$ zum Modul $a = (a_1, \dots, a_n)$ mit $P(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$; b sei das zugehörige Bernstein-Sato-Polynom. Dann gilt:*

a) *P^λ, T_λ sind in $\mathbb{C} \setminus \{-(|a| + a\cdot\alpha)/c : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ analytisch und haben einfache Pole in $\lambda = -(|a| + a\cdot\alpha)/c$ für $\alpha \in (2\mathbb{N})^n$;*

b) *es existiert ein Polynom $Q = Q(\lambda, x, \partial)$ der Gestalt $Q(\lambda, x, \partial) = \sum\limits_{a\cdot\alpha\geqq c} a_\alpha(\lambda, x)\,\partial_x^\alpha$, wobei $a_\alpha(\lambda, x)$ reelle Polynome in λ und x und quasihomogene in x vom Grad $a\cdot\alpha - c$ sind, so daß $\operatorname{Pf}(QP^{\lambda+1}) = \operatorname{Pf}(b(\lambda)\,P^\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt;*

c) *für $\alpha \in (2\mathbb{N})^n$ mit $a\cdot\alpha < c$ ist $b(-(|a| + a\cdot\alpha)/c) = 0$;*

d) *für $l \in \mathbb{N}$, $l \geqq 2$, $b(-l) \neq 0$ ist $\dfrac{1}{b(-l)}\, Q(-l, i\partial/2\pi, 2\pi i x)\, T_{1-l}$ eine Fundamentallösung von $P(i\partial/2\pi)^l$ und unterscheidet sich von T_{-l} höchstens um ein quasihomogenes Polynom vom Grad $cl - |a|$.*

Beweis: a) folgt aus Satz 2. Zu b): $Q(\lambda, x, \delta) = \sum a_\alpha(\lambda, x)\,\partial_x^\alpha$ sei zunächst ein beliebiges reelles Polynom mit $QP^{\lambda+1} = bP^\lambda$. Da P^λ außerhalb der Pole quasihomogen vom Grad $c \cdot \lambda$ ist, gilt dies auch für $QP^{\lambda+1}$. Daher können wir Q in der speziellen Gestalt des Satzes wählen. c) ergibt sich aus a) mit Hilfe von Satz 4/c). Zu d): Nach Satz 2 ist T_λ in $\lambda = -l$, $l \in \mathbb{N}$, entweder analytisch oder besitzt dort einen einfachen Pol, dessen Residuum ein quasihomogenes Polynom R_{-l} vom Grad $cl - |a|$ ist. Wenn wir im ersten Fall $R_{-l} = 0$ setzen, so ergibt die Gleichung $\mathrm{Pf}\left(Q(\lambda, \mathrm{i}\partial/2\pi, 2\pi\mathrm{i}x)\, T_{\lambda+1}\right) = \mathrm{Pf}\,(bT_\lambda)$ für $\lambda = -l$, $l \geqq 2$ die Beziehung

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\left(-l, \frac{\mathrm{i}\partial}{2\pi}, 2\pi\,\mathrm{i}x\right) R_{-l+1} + Q\left(-l, \frac{\mathrm{i}\partial}{2\pi}, 2\pi\mathrm{i}x\right) T_{-l+1}$$

$$= b'(-l)\, R_{-l} + b(-l)\, T_{-l}.$$

Falls $b(-l) \neq 0$ ist, erhalten wir somit $T_{-l} = \dfrac{1}{b(-l)}\, Q(-l, \mathrm{i}\partial/2\pi, 2\pi\mathrm{i}x)\, T_{-l+1} + S$, wobei S ein quasihomogenes Polynom vom Grad $cl - |a|$ ist ∎

Die folgenden zwei Sätze rechtfertigen in gewissem Sinn den Namen Faltungsgruppe für die distributionswertige Funktion T_λ.

Satz 6: *P sei ein homogenes Polynom vom Grad m mit $P(x) > 0$ für $x \neq 0$; $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Das Polynom P lasse sich nicht als Potenz eines anderen Polynoms ausdrücken. Dann sind äquivalent:*

i) *T_λ, T_μ sind faltbar;*

ii) *$\lambda \in \mathbb{N}$ oder $\mu \in \mathbb{N}$ oder $\mathrm{Re}\,(\lambda + \mu) > -n/m$.*

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ i): Da $T_\lambda \in \mathscr{E}'$ für $\lambda \in \mathbb{N}$ ist, können wir uns auf die Voraussetzung $\mathrm{Re}\,(\lambda + \mu) > -n/m$ beschränken. Es gelte zunächst $\lambda, \mu \neq -(n + k)/m$ für $k = 0$, 2, 4, ... Dann sind T_λ und T_μ homogen vom Grad $-n - m\lambda$ bzw. $-n - m\mu$. Ihre Charakteristiken sind nach [26, Lemma, p. 481] unendlich oft differenzierbar. Daher folgt die Faltbarkeit aus [14, Corollary, p. 189]. Wenn hingegen $\lambda = -(n + k)/m$, $k \in \{0, 2, 4, \ldots\}$, und $\mathrm{Re}\,(\lambda + \mu) > -n/m$ gilt, so ist $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ und T_μ homogen mit $\mathscr{E}^\infty$-Charakteristik. Weiters ist dann $(1 + r^2)^{-(n+m\mathrm{Re}\mu)/2}\, T_\lambda \in \mathscr{E}' + L^1 \subset \mathscr{D}'_{L^1}$ aufgrund der expliziten Darstellung von T_λ in der Folgerung zu Satz 3. Daraus ergibt sich die Faltbarkeit von T_λ und T_μ nach [14, Th. 3, p. 185].

i) $\Rightarrow$ ii): Da sich P nach Voraussetzung nicht als Potenz eines anderen Polynoms schreiben läßt, ist P^λ nur für $\lambda \in \mathbb{N}$ im Ursprung beliebig oft differenzierbar und liegt T_λ nur für $\lambda \in \mathbb{N}$ in $\mathscr{E}'$. Im folgenden seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ und T_λ, T_μ faltbar vorausgesetzt. Weiters gelte zunächst $\lambda, \mu \neq -(n + k)/m$ für $k = 0, 2, 4, \ldots$ Dann sind, wie schon oben verwendet, T_λ und T_μ homogen mit $\mathscr{E}^\infty$-Charakteristik. Außerhalb des Ursprungs sind T_λ, T_μ sogar nach [11, Theorem 8.4. 18, (8.4. 23)] analytisch, da das Entsprechende auch für P^λ, P^μ gilt. Nach [26, Satz 10, p. 482] folgt aus der Faltbarkeit von T_λ und T_μ, daß entweder der Realteil der Summe der Homogenitätsgrade kleiner als $-n$ ist oder daß das Produkt der Charakteristiken von T_λ, T_μ verschwindet. Aufgrund der Analytizität ist letzteres ausgeschlossen und folgt also $\mathrm{Re}\,(\lambda + \mu) > -n/m$.

Als nächstes werde der Fall $\lambda = -(n + k)/m$, $k \in \{0, 2, 4, \ldots\}$, und $\mu \neq -(n + l)/m$, $l = 0, 2, 4, \ldots$, betrachtet. Für $c > 0$ ist nach der Folgerung zu Satz 3

$$T_\lambda(c\xi) - c^k T_\lambda(\xi) = -(-1)^{k/2}\, \frac{n + k}{k!} \log c \int\limits_{P(x) \leq 1} (2\pi x \cdot \xi)^k\, dx =: P_1(\xi).$$

Wenn T_λ, T_μ faltbar sind, so auch $T_\lambda(cx)$ und $T_\mu(cx) = c^{-n-m\mu} T_\mu$ und folglich auch P_1 und T_μ. Da P_1 homogen ist, läßt sich dieser Fall daher wie oben weiterbehandeln. (Wegen $P_1(\xi) \neq 0$ für $\xi \neq 0$ ließe sich hier auch [21, Lemma 2 kombiniert mit Satz 4, p. 29] anwenden.)

Als letztes wollen wir annehmen, daß $\lambda = -(n+k)/m$, $\mu = -(n+l)/m$, $k, l \in \{0, 2, 4, \ldots\}$ gilt. In diesem Fall ist zu zeigen, daß T_λ und T_μ nicht faltbar sind. Nach der expliziten Darstellung in der Folgerung zu Satz 3 gilt $T_\lambda(\xi) = (-1)^{k/2} |\xi|^k \cdot \times \big(f_1(\xi/|\xi|) - \log(|\xi|) f_2(\xi/|\xi|)\big)$ mit $f_i \in \mathscr{E}^\infty(\mathbb{S}_{n-1})$, $i = 1, 2$, und

$$f_2(\omega) = \frac{n+k}{k!} \int\limits_{P(x)\leq 1} (2\pi x \cdot \omega)^k \, dx > 0 \qquad \text{für } \omega \in \mathbb{S}_{n-1}.$$

Für genügend großes R und $|\xi| > R$ hat T_λ daher das Vorzeichen von $(-1)^{1+k/2}$, und es gilt $|T_\lambda(\xi)| > |\xi|^k$. Ebenso ist, wenn R groß genug gewählt wird, $|T_\mu(\xi)| > |\xi|^l$ für $|\xi| > R$. Wären T_λ, T_μ faltbar, so auch $Y(|\xi| - R) \, |T_\lambda(\xi)|$ und $Y(|\xi| - R) \, |T_\mu(\xi)|$. Diese positiven Maße wären nach [3, p. 63] sogar als Maße faltbar, was aufgrund der obigen Abschätzungen offenbar nicht möglich ist. Damit ist der Satz bewiesen ∎

Satz 7: *P sei ein homogenes Polynom mit $P(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, und T_λ, T_μ seien faltbar. Dann gilt $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu}$.*

Beweis: Wenn $P = Q^k$ ist, $k \geq 2$ und Q ein positives, homogenes Polynom, so sind die Faltungsgruppen T_λ von P und S_λ von Q durch die Beziehung $T_\lambda = S_{k\lambda}$ verknüpft. Wir können daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sich P nicht als Potenz eines Polynoms ausdrücken läßt. Wenn $\lambda \in \mathbb{N}$ oder $\mu \in \mathbb{N}$ ist, so folgt die Aussage des Satzes schon aus Satz 4/b) und d). Als nächstes werde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) > -n/m$ und $\lambda, \mu \neq -(n+k)/m$, $k = 0, 2, 4, \ldots$, vorausgesetzt. Dann sind T_λ, T_μ homogen und daher $\mathscr{S}'$-faltbar nach [26, Satz 8, p. 479]. Der Austauschsatz [10, Theorem, p. 151] ergibt $T_\lambda * T_\mu = \mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}T_\lambda \cdot \mathscr{F}^{-1}T_\mu) = \mathscr{F}(P^\lambda \cdot P^\mu)$, wobei das Produkt im Sinn von [10] zu verstehen ist. Außerhalb des Ursprungs ist offenbar $P^\lambda \cdot P^\mu = P^{\lambda+\mu}$ und somit $T_\lambda * T_\mu = T_{\lambda+\mu} + P_1$, wobei P_1 ein Polynom ist. Da $T_\lambda * T_\mu$ und $T_{\lambda+\mu}$ beide homogen vom Grad $-n - m(\lambda+\mu)$ sind und $\operatorname{Re}\big(-n - m(\lambda+\mu)\big) < 0$ ist, folgt $P_1 = 0$.

Schließlich ist noch der Fall $\lambda = -(n+k)/m$, $k \in \{0, 2, 4, \ldots\}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\lambda + \mu) > -n/m$, d. h. $\operatorname{Re}\mu > k/m$ zu behandeln. Um $T_\lambda * T_\mu$ als Grenzwert von $T_\nu * T_\mu = T_{\nu+\mu}$, $\nu \to \lambda$, darzustellen, benützen wir die Tatsache, daß die Abbildung

$$\mathscr{D}'_{L^1,\sigma} = \{S \in \mathscr{D}' : (1 + r^2)^{\sigma/2} S \in \mathscr{D}_{L^1}\} \to \mathscr{S}' : S \mapsto T_\mu * S$$

für $\sigma = -n - m \operatorname{Re}\mu$ wohldefiniert und stetig ist (vgl. [21, Satz 2, p. 25]). Hiebei wird die Topologie auf $\mathscr{D}'_{L^1,\sigma}$ durch die Bijektion $\mathscr{D}'_{L^1,\sigma} \to \mathscr{D}'_{L^1} : S \mapsto (1 + r^2)^{\sigma/2} S$ von $\mathscr{D}'_{L^1}$ übertragen. Nach Satz 2 gilt $T_\lambda = \lim\limits_{\nu\to\lambda} \big(T_\nu - R/(\nu - \lambda)\big)$, wobei $R = \operatorname{Res}\limits_{\nu=\lambda} T_\nu$ ein homogenes Polynom vom Grad k ist. Dieser Grenzwert gilt nicht nur in $\mathscr{D}'$, sondern auch in $\mathscr{D}'_{L^1,\sigma}$, da T_ν eine in $\{\nu : \operatorname{Re}\nu > \sigma/m\}$ meromorphe Funktion mit Werten in $\mathscr{D}'_{L^1,\sigma}$ ist. Daher folgt

$$T_\lambda * T_\mu = \lim_{\nu\to\lambda} \left(T_\nu * T_\mu - \frac{R * T_\mu}{\nu - \lambda}\right) = T_{\lambda+\mu} - \lim_{\nu\to\lambda} \frac{R * T_\mu}{\nu - \lambda}.$$

Hieraus ist zu sehen, daß $R * T_\mu = 0$ gilt. Dies ließe sich auch daraus ableiten, daß $R * T_\mu$ nach [26, Satz 1, p. 468] ein Polynom ist und andererseits homogen vom Grad $k - m\mu$ ist. Damit ist der Satz bewiesen ∎

5. Über das Bernstein-Sato-Polynom von $x_1^m + \cdots + x_n^m$

In [18, Th. (5.4), p. 115] zeigte B. Malgrange, daß das Bernstein-Sato-Polynom eines analytischen Keimes f bei $z_0 \in \mathbb{C}^n$ durch die Monodromie von f bestimmt wird, wenn z_0 ein isolierter singulärer Punkt von f ist, d. h., wenn $\nabla f(z) \neq 0$ für z bei

$z_0, z \neq z_0$, mit $f(z) = f(z_0) = 0$ ist. Ein Programm zur Berechnung dieser Monodromie wird in [2, 3.5, p. 46] angegeben. Speziell für $P = x_1^m + \cdots + x_n^m$ ergibt sich daraus, daß das in Satz 8 angegebene $b(\lambda)$ mit dem Bernstein-Sato-Polynom von P übereinstimmt (vgl. [2, Beispiel, p. 10, p. 49]). Ein Polynom, das $Q(\lambda, x, \partial)$ in Satz 8 entspricht, wurde meines Wissens bisher noch nicht angegeben.

Satz 8: *Es sei $n \geqq 2, m \in \mathbb{N}, m \geqq 2, P(x) = x_1^m + \cdots + x_n^m, \lambda \in \mathbb{C}, b(\lambda) = (\lambda + 1) \prod_{j=n}^{n(m-1)} \left(\lambda + \frac{j}{m}\right)$ und*

$$Q(\lambda, x, \partial) = \frac{1}{m^m} \sum_{k=1}^{n} \partial_k^m \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) \\ 0 \leq \beta_i \leq m-2}} \left(\prod_{j=m-1}^{m+|\beta|-2} \frac{j}{m}\right) \left(\prod_{j=m+|\beta|+n-1}^{n(m-1)} \left(\lambda + \frac{j}{m}\right)\right)$$
$$\times \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\beta_i!} \partial_{i+k}^{\beta_i} x_{i+k}^{\beta_i}\right).$$

Hierbei wird $x_{n+i} = x_i, \partial_{n+i} = \partial_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gesetzt. Unter diesen Voraussetzungen gilt formal $QP^{\lambda+1} = b(\lambda) P^\lambda$. Wenn weiters $P^\lambda \in \mathcal{S}'$ wie in Abschnitt 4 definiert ist, so gilt $\mathrm{Pf}\,(QP^{\lambda+1}) = \mathrm{Pf}\,\big(b(\lambda)\,P^\lambda\big)$ *im distributionellen Sinn.*

Beweis: Es gelte zunächst $\lambda > 0$. Mit den Bezeichnungen

$$\alpha^* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda - |\alpha|), \qquad \binom{\lambda}{\alpha^*} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-|\alpha|+1)}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!}$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$ liefert die Multinomialformel im Gebiet $G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1^m + \cdots + x_{n-1}^m| < x_n^m\}$ die konvergente Reihendarstellung

$$P(x)^\lambda = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})} \binom{\lambda}{\alpha^*} x^{m\alpha^*}.$$

Zur Abkürzung sei ferner definiert für $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$: $a_\beta(\lambda) = 0$, falls ein $\beta_i \geqq m-1$ ist, und ansonsten

$$a_\beta(\lambda) = \frac{1}{m^m \beta_1! \cdots \beta_{n-1}!} \left(\prod_{j=m-1}^{m+|\beta|-2} \frac{j}{m}\right) \left(\prod_{j=m+|\beta|+n-1}^{n(m-1)} \left(\lambda + \frac{j}{m}\right)\right).$$

Durch gliedweises Differenzieren der entsprechenden Reihe für $P^{\lambda+1}$ erhält man in G im klassischen Sinn:

$$QP^{\lambda+1} = m!(\lambda+1) \sum_\alpha \binom{\lambda}{\alpha^*} x^{m\alpha^*} \sum_{k=1}^{n} \binom{m\alpha_k^* + m - 1}{m-1} \sum_\beta a_\beta(\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i! \binom{m\alpha_{i+k}^* + \beta_i}{\beta_i},$$

wobei $\alpha_{n+i}^* := \alpha_i^*$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Wenn wir $\tilde{b}(\lambda) = (\lambda+1)^{-1} b(\lambda)$ setzen, so ist die Gültigkeit von $QP^{\lambda+1} = bP^\lambda$ für $\lambda > 0$ und $x \in G$ wegen $\alpha_1^* + \cdots + \alpha_n^* = \lambda$ auf den Beweis der Polynomidentität

$$\tilde{b}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = m! \sum_{k=1}^{n} \binom{mx_k + m - 1}{m-1} \sum_\beta a_\beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i! \binom{mx_{i+k} + \beta_i}{\beta_i}$$

zurückgeführt. Dies ist Inhalt des nachfolgenden Lemmas. Aus der Gültigkeit von $QP^{\lambda+1} = bP^\lambda$ in G für $\lambda > 0$ können wir auf die formale Gültigkeit dieser Gleichung schließen. Dies impliziert nach Abschnitt 4, daß $\mathrm{Pf}\,(QP^{\lambda+1}) = \mathrm{Pf}\,\big(b(\lambda)\,P^\lambda\big)$ im distributionellen Sinn gilt ∎

Bemerkung: Um das Polynom Q in Satz 8 deduktiv zu bestimmen, hat man den Ansatz

$$Q = \sum_{k=1}^{n} \partial_k{}^m \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})\\ 0\leqq\beta_i\leqq m-2}} a_\beta(k,\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} \partial_{i+k}^{\beta_i} x_{i+k}^{\beta_i}$$

zu machen und $\operatorname{gr}_\lambda a_\beta(k,\lambda) \leqq (n-1)(m-2) - |\beta|$ vorauszusetzen. Durch Verwendung von $\binom{mx_k + m - 1}{m-1} = 0$ für $x_k = -1/m, -2/m, \dots, (1-m)/m$ ergeben sich dann aus der obigen Polynomidentität die angegebenen Ausdrücke für a_β. Aufgrund der Symmetrie von P sind die a_β von k unabhängig. Im Fall $n = 2$ führt auch der Ansatz

$$Q = \sum_{j=0}^{m-2} c_j(\lambda)\,(x_1{}^j\partial_1{}^{m+j} + x_2{}^j\partial_2{}^{m+j})$$

zum Ziel. Man erhält

$$c_j(\lambda) = \frac{(2m-2)!\,(-1)^j}{2m^{2m-3}m!\,(m+j-1)\,j!}\binom{m\lambda + m - j - 1}{m-j-2}.$$

Daß Q nicht eindeutig bestimmt werden kann, zeigt schon die Eulersche Gleichung

$$Pf\left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\partial_k - m\lambda\right)P^\lambda\right) = 0.$$

Lemma: *Es sei* $n \geqq 2$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda := \sum_{k=1}^{n} x_k$, $l \in \mathbb{N}$, $l \geqq 1$, $N := n(l-1) + 1$. *Dann gilt*

$$\binom{\lambda + nl}{N} = \sum_{k=1}^{n}\binom{x_k + l}{l} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{n-1}\\ 0\leqq\beta_i\leqq l-1}} \frac{\binom{\lambda + nl}{N - l - |\beta|}}{\binom{N}{N - l - |\beta|}} \frac{l}{l + |\beta|} \prod_{i=1}^{n-1}\binom{x_{i+k} + \beta_i}{\beta_i}.$$

Hierbei sei wieder $x_{n+i} = x_i$ *für* $i = 1, \dots, n$.

Beweis: a) $(-1)^N\binom{\lambda + nl}{N}$ ist der Koeffizient von t^N in der Taylorreihe von $f(t) := (1+t)^{-\lambda-n}$ um $t = 0$. Wegen $(1+t)^{-\lambda-n} = \prod_{m=1}^{n}(1+t)^{-x_m-1}$ folgt

$$\binom{\lambda + nl}{N} = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^n,|\gamma|=N}\ \prod_{m=1}^{n}\binom{x_m + \gamma_m}{\gamma_m}.$$

b) Card bezeichne die Mächtigkeit einer endlichen Menge, $\dot\cup$ die disjunkte Vereinigung von Mengen. Für $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| = N$, ist $\binom{N}{\gamma} = \frac{N!}{\gamma_1!\cdots\gamma_n!}$ die Anzahl der Anordnungen der N Variablen

$$\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{\gamma_1}, \underbrace{x_2,\dots,x_2}_{\gamma_2}, \dots, \underbrace{x_n,\dots,x_n}_{\gamma_n}.$$

Daher gilt

$$N!\binom{\lambda + nl}{N} = \prod_{|\gamma|=N}\binom{N}{\gamma}\prod_{m=1}^{n}\prod_{j=1}^{\gamma_m}(x_m + j) = \sum_{\alpha\in\{1,\dots,n\}^N}\ \prod_{i=1}^{N}\left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right),$$

wobei $g(\alpha, i) = \operatorname{Card}\{j\colon 1 \leqq j \leqq i, \alpha_j = \alpha_i\}$ ist.

c) Es gilt $\{1,\dots,n\}^N = \dot\bigcup\{B_{k,c}\colon 1 \leqq k \leqq n, l \leqq c \leqq N\}$, wobei

$$B_{k,c} = \{\alpha \in \{1,\dots,n\}^N\colon \operatorname{Card}\{i\colon 1 \leqq i < c, \alpha_i = m\} \leqq l - 1$$
$$\text{für } m = 1,\dots,n \text{ und } \operatorname{Card}\{i\colon 1 \leqq i \leqq c, \alpha_i = k\} = l\}$$

ist. α liegt also in $B_{k,c}$, wenn die Zahl k als erste unter den Zahlen $m = 1, \ldots, n$ zum l-ten mal in der Reihe $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ vorkommt und dies beim Index $i = c$ passiert. Für $\alpha \in B_{k,c}$ gilt

$$\prod_{i=1}^{c} \left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right) = \prod_{m=1}^{n} \prod_{j=1}^{\gamma_m^c(\alpha)} (x_m + j),$$

wobei $\gamma_m^c(\alpha) := \max\{g(\alpha, i) : 1 \leqq i \leqq c, \alpha_i = m\}$, $\max\{\ldots\} := 0$ im Falle $\{\ldots\} = \emptyset$, $\prod_{j=1}^{0} (x_m + j) := 1$ ist. Für $\alpha \in B_{k,c}$ erfüllen die Zahlen γ_m^c offenbar die folgenden Bedingungen: $\gamma_k^c = l$, $\gamma_m^c \leqq l - 1$ für $m \neq k$ und $\sum_{m=1}^{n} \gamma_m^c = c$. Setzen wir zur Abkürzung $\gamma_{n+i}^c := \gamma_i^c$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\beta_r := \gamma_{k+r}^c(\alpha)$, so gilt für $\alpha \in B_{k,c}$ die Beziehung

$$\prod_{i=1}^{c} \left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right) = l! \binom{x_k + l}{l} \prod_{r=1}^{n-1} \beta_r! \binom{x_{r+k} + \beta_r}{\beta_r}.$$

d) Für $\alpha \in B_{k,c}$ gilt weiters

$$\prod_{i=c+1}^{N} \left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right) = \prod_{m=1}^{n} \prod_{j=\gamma_m^c(\alpha)+1}^{\gamma_m^N(\alpha)} (x_m + j),$$

wobei γ_m^N ähnlich wie γ_m^c definiert wird. Es sei $B'_{k,c} := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_c) : \alpha \in B_{k,c}\}$ und $\alpha' \in B'_{k,c}$; dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha \in B_{k,c} \\ \alpha_i = \alpha_i', 1 \leqq i \leqq c}} \prod_{i=c+1}^{N} \left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right) &= \sum_{\substack{\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \\ |\eta| = N - c}} \binom{N-c}{\eta} \prod_{m=1}^{n} \prod_{j=\gamma_m^c(\alpha')+1}^{\gamma_m^c(\alpha')+\eta_m} (x_m + j) \\ &= (N-c)! \binom{\lambda + nl}{N - c}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhält man ähnlich wie in a) aus der Taylorschen Reihenentwicklung von $(1 + t)^{-\lambda - c - n} = \prod_{m=1}^{n} (1 + t)^{-x_m - \gamma_m^c(\alpha') - 1}$.

e) Aus dem bisherigen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \binom{\lambda + nl}{N} &= \frac{1}{N!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{c=l}^{N} \sum_{\alpha \in B_{k,c}} \prod_{i=1}^{c} \left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right) \prod_{i=c+1}^{N} \left(x_{\alpha_i} + g(\alpha, i)\right) \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{k=1}^{n} \sum_{c=l}^{N} (N-c)! \binom{\lambda + nl}{N - c} \sum_{\alpha' \in B'_{k,c}} \prod_{i=1}^{c} \left(x_{\alpha_i'} + g(\alpha', i)\right) \\ &= \frac{l!}{N!} \sum_{k=1}^{n} \binom{x_k + l}{l} \sum_{\substack{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \\ 0 \leqq \beta_r \leqq l-1}} (N - l - |\beta|)! \binom{\lambda + nl}{N - l - |\beta|} \\ &\quad \times \binom{l + |\beta| - 1}{l - 1} \binom{|\beta|}{\beta} \prod_{r=1}^{n-1} \beta_r! \binom{x_{r+k} + \beta_r}{\beta_r}. \end{aligned}$$

Der Faktor $\binom{l + |\beta| - 1}{l - 1} \binom{|\beta|}{\beta}$ gibt dabei die Anzahl derjenigen $\alpha' \in B'_{k,l+|\beta|}$ an, für die $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ mit einem vorgegebenen Multiindex übereinstimmen. Aus der letzten Formel folgt unmittelbar die Aussage des Lemmas ∎

Bemerkung: Als Vorstufe des Lemmas könnte man die folgende ähnliche, wenn auch einfacher zu beweisende Identität betrachten:

$$\lambda^N = \sum_{k=1}^{N} x_k^l \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})\\ 0\le\beta_i\le l-1}} \lambda^{N-l-|\beta|} \binom{l+|\beta|-1}{|\beta|} \prod_{i=1}^{n-1} x_{i+k}^{\beta_i}/\beta_i!.$$

Diese Gleichung kann leicht auf den Fall verschiedener $l_1, \ldots, l_n$ verallgemeinert werden: Mit $N = 1 + \sum_{k=1}^{n} (l_k - 1)$ gilt

$$\lambda^N = \sum_{k=1}^{N} x_k^{l_k} \sum_{\substack{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})\\ 0\le\beta_i\le l_{i+k}-1}} \lambda^{N-l_k-|\beta|} \binom{l_k+|\beta|-1}{|\beta|} \prod_{i=1}^{n-1}{}' x_{i+k}^{\beta_i}/\beta_i!.$$

Aber eine Verallgemeinerung des Lemmas und damit von Satz 8 auf $P = x_1^{m_1} + \cdots + x_n^{m_n}$ ist mir noch nicht gelungen. Einen Schritt in diese Richtung stellt Beispiel 2 unten dar.

Beispiel 1: Zur Abkürzung wird hier $x = x_1$, $y = x_2$, $\partial_x = \partial_1$, $\partial_y = \partial_2$ gesetzt. Es sei $P = 16\pi^4(x^4 + y^4)$, $\log P$ werde reell gewählt. P^λ und T_λ sind nach Abschnitt 3 in λ analytisch, abgesehen von einfachen Polen in $\lambda = -(1 + j)/2$, $j \in \mathbb{N}$, mit den Residuen

$$\frac{1}{4(2\pi)^{2j+2}(2j)!} \sum_{i=0}^{j} \binom{2j}{2i} B\left(\frac{2i+1}{4}, \frac{2j-2i+1}{4}\right) \partial_x^{2i} \partial_y^{2j-2i} \delta$$

bzw.

$$\frac{(-1)^j}{16\pi^2(2j)!} \sum_{i=0}^{j} \binom{2j}{2i} B\left(\frac{2i+1}{4}, \frac{2j-2i+1}{4}\right) x^{2i} y^{2j-2i}.$$

Satz 8 ergibt $QP^{\lambda+1} = bP^\lambda$ mit

$$Q = R(\lambda, x, y, \partial_x, \partial_y) + R(\lambda, y, x, \partial_y, \partial_x),$$

$$R = 2^{-15}\pi^{-4}\{3\partial_x^4\partial_y^2 y^2 + 3(2\lambda + 3)\,\partial_x^4\partial_y y + (2\lambda + 3)\,(4\lambda + 5)\,\partial_x^4\},$$

$$b(\lambda) = (\lambda + 1/2)\,(\lambda + 3/4)\,(\lambda + 1)^2\,(\lambda + 5/4)\,(\lambda + 3/2).$$

Eine Fundamentallösung E von $P(\mathrm{i}\partial/2\pi) = \partial_x^4 + \partial_y^4$, dem Operator der orthotropen, drillweichen Platte, ist bekannt (vgl. etwa [20, p. 161] oder [25, p. 44]):

$$E = \frac{1}{16\sqrt{2}\pi}\left\{(x^2 + y^2)\log(x^4 + y^4) + 2\sqrt{2}\,xy\log\frac{x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2}{x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2}\right.$$
$$\left. + 2(x^2 - y^2)\arctan\frac{x^2}{y^2}\right\}.$$

E ist bis auf ein Polynom in $\mathscr{S}'$ eindeutig bestimmt. Da E und T_{-1} beide zugeordnet homogen vom Grad 2 sind (im Sinn von [9, Ch. I, 4.]), unterscheiden sie sich höchstens durch ein Polynom zweiten Grades. Mit Satz 5/d) erhält man aus E durch Differentiation und Multiplikation mit Polynomen eine Fundamentallösung F des Operators $(\partial_x^4 + \partial_y^4)^2$. Es ergibt sich

$$F = b(-2)^{-1}\,Q(-2, \mathrm{i}\partial_x/2\pi, \mathrm{i}\partial_y/2\pi, 2\pi\mathrm{i}x, 2\pi\mathrm{i}y)\,E$$
$$= \frac{1}{2^9\sqrt{2}\,15\pi}\left\{(x^6 + 5x^4y^2 + 5x^2y^4 + y^6)\log(x^4 + y^4) + 4\sqrt{2}\,xy(x^4 + y^4)\right.$$
$$\left.\times\log\frac{x^2 + \sqrt{2}\,xy + y^2}{x^2 - \sqrt{2}\,xy + y^2} + 2(x^2 - y^2)(x^4 - 4x^2y^2 + y^4)\arctan\frac{x^2}{y^2} + 16(x^4y^2 + x^2y^4)\right\}.$$

Bemerkung: Abgesehen vom letzten Term, einem Polynom sechsten Grades, ist F ein Spezialfall der in [6, p. 71] für den Operator $(\partial_x^4 + 2(1-\varepsilon^2)\,\partial_x^2\partial_y^2 + \partial_y^4)^2$, $0 < \varepsilon < 1$, angegebenen Fundamentallösung. Ganz allgemein läßt sich eine Fundamentallösung E des homogenen Operators in der Ebene $\prod_{j=1}^{l} (\partial_x + a_j\partial_y)^{m_j}$ $(m_j \in \mathbb{N}, m_j \geqq 1, m = \sum_{j=1}^{l} m_j, m \geqq 2, a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ paarweise verschieden) explizit angeben:

$$E = -\frac{1}{2\pi i(m-2)!} \sum_{j=1}^{l} \frac{\operatorname{sign}(\operatorname{Im} a_j)}{(m_j-1)!} \log(y - a_jx) \frac{d^{m_j-1}}{da_j^{m_j-1}} \left[(a_jx - y)^{m-2} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{l} (a_j - a_k)^{-m_k}\right],$$

wobei $-\pi \leqq \operatorname{Im} \log(y - a_jx) < \pi$ gesetzt wird. Man vergleiche zum Fall $m_1 = m_2 = \cdots = m_l = 1$ [25, Satz 4, p. 40]; den allgemeinen Fall erhält man daraus durch Grenzübergang. Für reelle a_j ist ebenfalls ein Grenzübergang vorzunehmen, vgl. [25, Bemerkung 4, p. 42]. Der historische Ursprung dieser Formel dürfte wohl [24] sein. Als derzeit beste Formulierung im elliptischen Fall erscheint mir [6, Satz (4.1), p. 14].

$$\text{Im } \mathbb{R}^3 \text{ gilt } b(-2) = 0 \quad \text{für} \quad P(x) = x_1^m + x_2^m + x_3^m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geqq 3.$$

Daher läßt sich Satz 5 nicht zur Herleitung einer Fundamentallösung von $(\partial_1^m + \partial_2^m + \partial_3^m)^2$ aus der für $m = 3, 4$ in [27, 5] berechneten Fundamentallösung von $\partial_1^m + \partial_2^m + \partial_3^m$ verwenden.

Beispiel 2: Es sei $P(x) = 16\pi^4x_1^4 + 4\pi^2(x_2^2 + x_3^2)$, und $\log P$ werde reell angenommen. Nach Abschnitt 3 sind P^λ und T_λ analytisch mit Ausnahme von einfachen Polen in den Punkten $\lambda = -5/4 - j/2$, $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 5/c) verschwindet das Bernstein-Sato-Polynom $b(\lambda)$ daher in $\lambda = -5/4$ und in $\lambda = -7/4$. Wenn man Q in der Gestalt von Satz 5/b) voraussetzt, so ist $0 = Q \cdot 1 = QP^0 = b(-1)\,P^{-1}$ und folglich $b(-1) = 0$. Aufgrund dieser Überlegungen setzen wir $b(\lambda)$ in der Form $\prod_{j=4}^{7} (\lambda + j/4)$ an. Für Q wird, inspiriert durch den Beweis von Satz 8, der folgende Ansatz gewählt:

$$Q = a(2\pi)^{-4}\,\partial_1^4 + (2\pi)^{-2}\,(\partial_2^2 + \partial_3^2)\,(c_2 + c_1\partial_1x_1 + c_0\partial_1^2x_1^2),$$

wobei $a \in \mathbb{C}$ und c_i Polynome in λ vom Grad i sind $(i = 0, 1, 2)$. Wie im Beweis von Satz 8 wird die Gültigkeit von $QP^{\lambda+1} = bP^\lambda$ auf die Polynomidentität

$$\prod_{j=5}^{7}\left(\lambda + \frac{j}{4}\right) = a \cdot 4!\binom{4x_1+3}{3} + 2\left[\binom{2x_2+1}{1} + \binom{2x_3+1}{1}\right]\left(\sum_{j=0}^{2} c_j j!\binom{4x_1+j}{j}\right),$$

$\lambda = x_1 + x_2 + x_3$, zurückgeführt. Dies ergibt

$$a = 2^{-8}, \quad c_0 = 2^{-6}, \quad c_1 = 2^{-4}(\lambda + 7/4), \quad c_2 = 2^{-2}(\lambda + 7/4)\,(\lambda + 3/2),$$
$$Q(\lambda, x, \partial) = 2^{-8}\{(2\pi)^{-4}\,\partial_1^4 + 4(2\pi)^{-2}\,(\partial_2^2 + \partial_3^2)\,[(4\lambda + 7)\,(4\lambda + 6) + (4\lambda + 7)\,\partial_1x_1 + \partial_1^2x_1^2]\}.$$

Die Bernsteinsche Fundamentallösung $T_{-1} = \mathcal{F}P^{-1}$ von $P(i\partial/2\pi) = \partial_1^4 - \partial_2^2 - \partial_3^2$ kann durch partielle Fourier-Transformation berechnet werden. Wenn $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_{2,3}$ die Fourier-Transformation nach den Variablen x_1 bzw. x_2 und x_3 bezeichnen, so gilt

$$T_{-1} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_{2,3}\big(16\pi^4x_1^4 + 4\pi^2(x_2^2 + x_3^2)\big)^{-1} = \mathcal{F}_1\Big((2\pi)^{-1}\,K_0\big(4\pi^2x_1^2\sqrt{x_2^2 + x_3^2}\big)\Big)$$
$$= \frac{u}{2\pi\,|x_1|}\,K_{1/4}(u)\,\big(I_{1/4}(u) + I_{-1/4}(u)\big),$$

wobei $u = x_1^2/\big(8\sqrt{x_2^2 + x_3^2}\big)$ ist. Hierbei wurden [9, p. 288, (4)] und [19, p. 90] verwendet. K und I bezeichnen, wie üblich, modifizierte Bessel-Funktionen. Nach

Satz 4 erhält man T_{-k}, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$, aus T_{-1} durch Anwendung von $b(\lambda)^{-1} Q(\lambda, i\partial/2\pi, 2\pi i x)$ für $\lambda = -2, -3, \ldots$ Es ergibt sich beispielsweise:

$$T_{-2} = \frac{1}{b(-2)} Q\left(-2, \frac{i\partial}{2\pi}, 2\pi i x\right) T_{-1}$$

$$= \frac{1}{2^3 3} [x_1^4 - 4(x_2^2 + x_3^2)(2 + x_1\partial_1 + x_1^2\partial_1^2)] T_{-1},$$

$$x_1\partial_1 T_{-1} = \frac{u^2}{\pi |x_1|} \{K_{1/4}(u) [I_{3/4}(u) + I_{-3/4}(u)] - K_{3/4}(u) [I_{1/4}(u) + I_{-1/4}(u)]\},$$

$$x_1^2\partial_1^2 T_{-1} = \frac{4u^3}{\pi |x_1|} \{K_{1/4}(u) [I_{1/4}(u) + I_{-1/4}(u)] - K_{3/4}(u) [I_{3/4}(u) + I_{-3/4}(u)]\}$$

und endlich

$$T_{-2} = \frac{|x_1| \sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{48\pi} \Big\{[(4u^2 - 1) K_{1/4}(u) + uK_{3/4}(u)] \big(I_{1/4}(u) + I_{-1/4}(u)\big) - [4u^2 K_{3/4}(u) + uK_{1/4}(u)] \big(I_{3/4}(u) + I_{-3/4}(u)\big)\Big\}.$$

Bemerkung: Aus der Polynomgleichung des obigen Beispiels lassen sich b und Q für das Polynom $P(x) = x_1^4 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, $n \geqq 2$, ableiten:

$$b(\lambda) = (\lambda + 1) \prod_{j=2n-1}^{2n+1} \left(\lambda + \frac{j}{4}\right),$$

$$Q(\lambda, x, \partial) = 2^{-8}\{\partial_1^4 + 4(\partial_2^2 + \cdots + \partial_n^2) [(4\lambda + 2n + 1)(4\lambda + 2n) + (4\lambda + 2n + 1) \partial_1 x_1 + \partial_1^2 x_1^2]\}.$$

LITERATUR

[1] Björk, J.-E.: Rings of differential operators. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1979.
[2] Brieskorn, E.: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Man. Math. 2 (1970), 103–161.
[3] Dierolf, P.: Zwei Räume regulärer, temperierter Distributionen. Habilitationsschrift. München: Ludwig-Maximilians-Universität 1978.
[4] Fichtenholz, G. M.: Differential- und Integralrechnung III. Elfte Auflage. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1987.
[5] Fredholm, I.: Sur l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants. Rend. Circ. Mat. Palermo 25 (1908), 346–351.
[6] Galler, M.: Fundamentallösungen von homogenen Differentialoperatoren. Dissertation. Innsbruck: Leopold-Franzens-Universität 1985.
[7] Gårding, L.: Transformation de Fourier des distributions homogènes. Bull. Soc. Math. Fr. 89 (1961), 381–428.
[8] Gel'fand, I. M., und Z. Ya. Shapiro: Homogene Funktionen und ihre Anwendungen (in russisch). Uspekhi Mat. Nauk 10 (1955) 3, 3–70. Engl. Übers.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 8 (1958), 21–85.
[9] Gel'fand, I. M., and G. E. Shilov: Generalized functions. Vol. I. New York: Academic Press 1964.
[10] Hirata, Y., and H. Ogata: On the exchange formula for distributions. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 22 (1958), 147–152.
[11] Hörmander, L.: The analysis of linear partial operators. Vol. I. Berlin: Springer-Verlag 1983.

[12] Horváth, J.: Distribuciones definidas por prolongación analítica. Rev. Colomb. Mat. 8 (1974), 47—95.
[13] Horváth, J.: Sur la convolution des distributions. Bull. Sci. Math. 98 (1974), 183—192.
[14] Horváth, J.: Composition of hypersingular integral operators. Appl. Anal. 7 (1978), 171—190.
[15] Krée, P. R.: Distributions quasihomogènes et intégrales singulières. Bull. Soc. Math. Fr., Mém. 20 (1969), 1—47.
[16] Lemoine, C.: Fourier transforms of homogeneous distributions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 26 (1972), 117—149.
[17] Louhivaara, I. S., und C. G. Simader: Über nichtelliptische lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A I 513 (1972), 1—22.
[18] Malgrange, B.: Le polynome de Bernstein d'une singularité isolée. Lect. Notes Math. 459 (1975), 98—119.
[19] Oberhettinger, F.: Tabellen zur Fourier-Transformation (Grundlehren der math. Wiss. 90). Berlin: Springer-Verlag 1957.
[20] Ortner, N.: Regularisierte Faltung von Distributionen. ZAMP 31 (1980), 133—173.
[21] Ortner, N.: Faltung hypersingulärer Integraloperatoren. Math. Ann. 248 (1980), 19—46.
[22] Riesz, M.: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta Math. 81 (1949), 1—223.
[23] Schwartz, L.: Théorie des distributions. Nouvelle édition. Paris: Hermann 1966.
[24] Somigliana, C.: Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali. Ann. Mat. Pura. Appl. (2) 22 (1894), 143—156.
[25] Wagner, P.: Parameterintegration zur Berechnung von Fundamentallösungen. Diss. Math. 230 (1984), 1—50.
[26] Wagner, P.: Zur Faltung von Distributionen. Math. Ann. 276 (1987), 467—485.
[27] Zeilon, N.: Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristique réelle de la Physique Mathématique. Ark. Mat. Astr. Fys. 9 (1913), 18, 1—70.
[28] Yosida, K.: Functional Analysis (Grundlehren der math. Wiss. 123). 5th ed., Berlin: Springer-Verlag 1978.
[29] Fedorjuk, M. V.: Nichthomogene verallgemeinerte Funktionen von zwei Variablen (in russisch). Mat. Sb. (N. S.) 49 (1959), 431—446. Engl. Übers.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 34, 223—240.

Manuskripteingang: 11. 03. 1988; in revidierter Fassung 17. 08. 1988

VERFASSER:

Dr. Peter Wagner
Institut für Mathematik und Geometrie der Universität
Technikerstr. 13
A-6020 Innsbruck