Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (5) 1989, S. 445–461

Lösungsapproximation und Fehlerabschätzungen für ein unendliches System linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanter Bandmatrix

E. WAGNER

Es wird ein unendliches System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen der Form

$$x_n'(t) = \delta_{n-1}x_{n-1}(t) - \alpha_n x_n(t) + \beta_{n+1}x_{n+1}(t) + \gamma_{n+2}x_{n+2}(t) + f_n(t)$$

$(0 \leqq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{R})$ mit homogenen Anfangsbedingungen $x_n(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ betrachtet. Unter gewissen Voraussetzungen an die nicht notwendig beschränkten Koeffizienten und die nichtnegativen Funktionen f_n wird bewiesen, daß die Lösungen $x^N = (x_0^N, x_1^N, \ldots, x_N^N)$ der auf übliche Weise verkürzten endlichen Systeme für $N \to \infty$ und jedes feste $t \geqq 0$ komponentenweise nichtfallend gegen eine Funktionenfolge $x = (x_0, x_1, \ldots)$ konvergieren, deren Glieder das gestellte Anfangswertproblem lösen. Für die nichtnegativen Abweichungen $x_n(t) - x_n^N(t)$ werden Abschätzungen nach oben hergeleitet.

Рассматривается счетная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений вида

$$x_n'(t) = \delta_{n-1}x_{n-1}(t) - \alpha_n x_n(t) + \beta_{n+1}x_{n+1}(t) + \gamma_{n+2}x_{n+2}(t) + f_n(t)$$

$(0 \leqq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{R})$ с однородными начальными условиями $x_n(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. При определенных условиях на необязательно ограниченные коэффициенты и на неотрицательные функции f_n доказывается, что решения $x^N = (x_0^N, x_1^N, \ldots, x_N^N)$ укороченных в известном смысле конечных систем для $N \to \infty$ и каждого постоянного $t \geqq 0$ покомпонентно неубывают и стремятся к последовательности функций $x = (x_0, x_1, \ldots)$, члены которой решают данную задачу Коши. Приведены оценки неотрицательных погрешностей $x_n(t) - x_n^N(t)$ сверху.

The infinite system of ordinary linear differential equations of the form

$$x_n'(t) = \delta_{n-1}x_{n-1}(t) - \alpha_n x_n(t) + \beta_{n+1}x_{n+1}(t) + \gamma_{n+2}x_{n+2}(t) + f_n(t)$$

$(0 \leqq \alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{R})$ with homogeneous initial conditions $x_n(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ is considered. Under certain assumptions on the not necessarily limited coefficients and on the nonnegative functions f_n it is proved that for $N \to \infty$ and every $t \geqq 0$ the solutions $x^N = (x_0^N, x_1^N, \ldots, x_N^N)$ of the in usual way truncated finite systems nondecreasingly converge componentwise to a sequence $x = (x_0, x_1, \ldots)$ of functions, the coordinates of which satisfy the considered initial problem. Explicit upper estimates for the nonnegative differences $x_n(t) - x_n^N(t)$ are derived.

1. Problemstellung und Voraussetzungen. Über unendliche Systeme gewöhnlicher, linearer und nichtlinearer, Differentialgleichungen $x_i'(t) = f_i(t; x_1, x_2, \ldots)$ $(i \geqq 1)$ ist bisher relativ wenig bekannt. Diesbezügliche Untersuchungen findet man z. B. in [1–5] und [8–20], insbesondere in den Monographien [4, 20], wobei aber in der vorliegenden Arbeit auf keine dieser Publikationen Bezug genommen wird. Bemerkenswert ist, daß bei allen dem Verfasser bekannten konstruktiven Lösungsverfahren, außer in trivialen Fällen, den rechten Seiten f_i gewisse (gleichmäßige) Beschränktheitsbedingungen auferlegt werden, die speziell bei linearen Systemen

$$x_i'(t) = \sum_j c_{ij} x_j(t) + f_i(t) \quad (i \geqq 1)$$

ein mit wachsenden Indizes i oder j unbegrenztes Anwachsen der Beträge $|c_{ij}|$ nicht zulassen. In der vorliegenden Arbeit wird ein unendliches System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten betrachtet, dessen Koeffizienten unter gewissen Einschränkungen beliebig große Werte annehmen können. Es hat die Gestalt

$$x_n'(t) = \delta_{n-1} x_{n-1}(t) - \alpha_n x_n(t) + \beta_{n+1} x_{n+1}(t) + \gamma_{n+2} x_{n+2}(t) + f_n(t) \quad (n \geqq 0). \tag{1.1}$$

Die Anfangsbedingungen seien homogen:

$$x_n(0) = 0 \quad (n \geqq 0). \tag{1.2}$$

Über die Koeffizienten wird folgendes vorausgesetzt:

$$0 =: \delta_{-1} \leqq \delta_n \quad (n \geqq 0), \delta = \sup \delta_n < \infty, \tag{1.3}$$

$$0 =: \beta_0 \leqq \beta_n \quad (n \geqq 1), \tag{1.4}$$

$$0 =: \gamma_0 =: \gamma_1 \leqq \gamma_n \quad (n \geqq 2), \tag{1.5}$$

$$\inf_{n \geqq 0} (\alpha_n - \beta_n - \gamma_n) = \alpha > -\infty, \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=0, \alpha_n > \alpha}^{\infty} 1/(\alpha_n - \alpha) = \sigma < \infty, \tag{1.7}$$

$$\sum_{n=0, \alpha_{n+1} > \alpha_n = \alpha}^{\infty} \delta_n = \varrho < \infty. \tag{1.8}$$

Von den Funktionen f_n wird folgendes gefordert:

$$f_n \in C[0, \infty), \tag{1.9}$$

$$f_n(t) \geqq 0 \quad \text{für} \quad t \geqq 0, \tag{1.10}$$

$$f_n(t) = 0 \text{ für } t \geqq 0 \text{ und } n > n_0 \; (n_0 \text{ feste natürliche Zahl}). \tag{1.11}$$

Systeme der Form (1.1) treten bei sogenannten Geburts-Todes-Prozessen auf, wobei in der Regel $\alpha_n = \beta_n + \gamma_n + \delta_n$ und damit $\alpha = \delta$ gilt. Als ein solcher kann auch das Anwendungsbeispiel in Abschnitt 9 (Radikalpopulation bei Polymerisationen) angesehen werden, wobei $x_n(t)$ die (relative oder absolute) Anzahl von Teilchen mit n freien Radikalen zum Zeitpunkt t und $\delta_n = \delta$ eine Wachstumskonstante bezeichnet; ferner ist $\alpha_n = \delta + \gamma_n$, $\gamma_n = n(n-1)\,c$ und $\beta_n = 0$ ($c > 0$ Abbruchkonstante). Die bei derartigen Prozessen durchaus üblichen Voraussetzungen (1.3)—(1.6) garantieren die Nichtnegativität und gewisse Monotonieeigenschaften der durch Abbruch des Systems (1.1) entstehenden Näherungslösungen, während (1.7), (1.8) hinreichend für deren Konvergenz sind.

Bemerkungen: Offenbar ist (1.8) erfüllt, wenn für nur jeweils höchstens endlich viele Indizes n gilt, daß $\delta_n > 0$ oder $\alpha_n > \alpha$ oder $\alpha_n = \alpha$ ist. Im letzten Fall zerfällt (1.1) in ein endliches und ein rekursiv lösbares unendliches System, denn aus $\alpha_n = \alpha$ folgt wegen (1.4)—(1.6) $\beta_n = \gamma_n = 0$. Ist dagegen $\alpha_n > \alpha$ für unendlich viele Indizes n, so muß die entsprechende Teilfolge von $\{\alpha_n\}$ wegen (1.7) hinreichend stark gegen unendlich streben.

Bricht man das System (1.1) nach der $(N+1)$-ten Gleichung ab und setzt $x_{N+1} = x_{N+2} = 0$, so erhält man ein endliches System, dessen (bei homogenen Anfangsbedingungen) eindeutig bestimmte Lösung wir mit $x^N = (x_0^N, x_1^N, \ldots, x_N^N)$ bezeichnen. Nachfolgend wird gezeigt, daß jede Folge $\{x_n^N\}_{N \geqq n}$ für jedes feste $t \geqq 0$ nichtfallend gegen eine Grenzfunktion $x_n = x_n(t)$ für $N \to \infty$ konvergiert $(n \geqq 0)$, wobei die Grenzfunktionen $x_0, x_1, \ldots$ das unendliche System (1.1) unter den Anfangsbedingungen (1.2) lösen. Für die (nichtnegativen) Abweichungen $x_n - x_n^N$ $(n \geqq 0)$ werden Abschätzungen nach oben angegeben.

2. Lösungsdarstellungen der endlichen Systeme. Wir betrachten das durch Abbruch aus (1.1) hervorgehende endliche Anfangswertproblem

$$(x^N)' = A^N x^N + f^N, \qquad x^N(0) = 0 \qquad (N \geqq 0) \tag{2.1}$$

mit $x^N = (x_0^N, \ldots, x_N^N)^T$, $f^N = (f_0, f_1, \ldots, f_N)^T$ und der Koeffizientenmatrix

$$A^N = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & \beta_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \delta_0 & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \gamma_N \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_N \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & 0 \quad \delta_{N-1} & -\alpha_N \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Nehmen wir für den Augenblick an, daß die Laplace-Transformierten $\mathfrak{L}\{f_n\} = F_n(s)$ $(0 \leqq n \leqq N)$ existieren, so erhält man im Bildbereich die Lösungsdarstellung

$$X^N(s) = (sE - A^N)^{-1} F^N(s) \tag{2.3}$$

mit $X^N = (X_0^N, \ldots, X_N^N)^T$, $X_n^N = \mathfrak{L}\{x_n^N\}$, $F^N = (F_0, \ldots, F_N)^T$ und der Einheitsmatrix $(N + 1)$-ter Ordnung E. Wir setzen

$$(sE - A^N)^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{00}^N & \ldots & Q_{0N}^N \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{N0}^N & \ldots & Q_{NN}^N \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Elemente $Q_{nm}^N = Q_{nm}^N(s)$ echt gebrochen rationale Funktionen von s sind. Ihre stetigen Originalfunktionen bezeichnen wir mit

$$q_{nm}^N(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Q_{nm}^N(s)\}, \tag{2.5}$$

so daß aus (2.3) durch inverse Laplace-Transformation

$$x_n^N(t) = \sum_{m=0}^{N} \int_0^t q_{nm}^N(t - \tau) f_m(\tau) \, d\tau \qquad (0 \leqq n \leqq N) \tag{2.6}$$

folgt. Bekanntlich [7] läßt sich die Lösung des Systems (2.1) auch dann durch (2.6) darstellen, wenn nicht alle f_n Laplace-transformierbar sind, so daß unsere obige Annahme wieder fallengelassen werden kann. Außerdem ist bekannt [7], daß für jedes feste m $(0 \leqq m \leqq N)$ die Übergangsfunktionen q_{nm}^N $(0 \leqq n \leqq N)$ die Lösung des zu (2.1) gehörenden homogenen Systems mit den inhomogenen Anfangsbedingungen

$$q_{nm}^N(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases} \quad (0 \leqq n \leqq N) \tag{2.7}$$

bilden. Die folgenden Gleichungen sind also für alle $t \geqq 0$ und jedes feste m $(0 \leqq m \leqq N)$ erfüllt:

$$\begin{aligned} (q_{nm}^N)' &= \delta_{n-1} q_{n-1,m}^N - \alpha_n q_{nm}^N + \beta_{n+1} q_{n+1,m}^N + \gamma_{n+2} q_{n+2,m}^N \qquad (0 \leqq n \leqq N-2), \\ (q_{N-1,m}^N)' &= \delta_{N-2} q_{N-2,m}^N - \alpha_{N-1} q_{N-1,m}^N + \beta_N q_{Nm}^N, \\ (q_{Nm}^N)' &= \delta_{N-1} q_{N-1,m}^N - \alpha_N q_{Nm}^N. \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Lösungseigenschaften der endlichen Systeme. Die Resultate der vorliegenden Arbeit basieren wesentlich auf den folgenden beiden Sätzen.

Satz 1: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.5) *gelten für die Lösungen der Anfangswertprobleme* (2.7), (2.8) *die Abschätzungen*

$$q_{nm}^N(t) \geqq 0 \qquad (0 \leqq n, m \leqq N; t \geqq 0) \tag{3.1}$$

und

$$[\exp(\alpha_n t)\, q_{nm}^N(t)]' \geqq 0 \qquad (0 \leqq n, m \leqq N; t \geqq 0). \tag{3.2}$$

Beweis: Für jedes feste m $(0 \leqq m \leqq N)$ geht durch die Substitution

$$q_{nm}^N(t) = \exp(-\alpha_n t)\, y_n{}^N(t) \tag{3.3}$$

das Anfangswertproblem (2.7), (2.8) über in ein Anfangswertproblem

$$\left(y_n{}^N(t)\right)' = \sum_{k=0}^{N} c_{nk}(t)\, y_k{}^N(t) \qquad \text{mit} \quad y_n{}^N(0) \geqq 0, \tag{3.4}$$

$c_{nk} \in C[0, \infty)$ und

$$c_{nk}(t) \geqq 0 \qquad (t \geqq 0;\ 0 \leqq n, k \leqq N). \tag{3.5}$$

Hieraus folgt nach einem bekannten Vergleichssatz (s. z. B. [21: 12.IX]) $y_n{}^N(t) \geqq 0$ und damit auch $\left(y_n{}^N(t)\right)' \geqq 0$ für $t \geqq 0$, $0 \leqq n \leqq N$ ∎

Satz 2: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.5) *gelten für* $0 \leqq m, n \leqq N$ *und* $t \geqq 0$ *die Ungleichungen*

$$q_{nm}^{N+1}(t) \geqq q_{nm}^N(t) \tag{3.6}$$

und

$$[\exp(\alpha_n t)\, q_{nm}^{N+1}(t)]' \geqq [\exp(\alpha_n t)\, q_{nm}^N(t)]'. \tag{3.7}$$

Beweis: Aus (3.4) und (3.5) erhält man für $0 \leqq n \leqq N$

$$[y_n{}^{N+1}(t) - y_n{}^N(t)]' \geqq \sum_{k=0}^{N} c_{nk}(t)\, [y_k{}^{N+1}(t) - y_k{}^N(t)]. \tag{3.8}$$

Da wegen (2.7) $(y_n{}^{N+1} - y_n{}^N)(0) = 0$ ist, folgt aus dem oben zitierten Vergleichssatz $y_n{}^{N+1} \geqq y_n{}^N$ $(0 \leqq n \leqq N)$ und mit (3.8) schließlich (3.7) ∎

Im folgenden bezeichnen wir mit

$$\lambda_n = s + \alpha_n \tag{3.9}$$

die Hauptdiagonalelemente der Matrix $sE - A^N$, mit s_N den größten reellen Eigenwert der Matrix A^N und definieren für $p \in \mathbb{N}_0$

$$S_{N,p} = \max (s_N, s_{N+1}, \ldots, s_{N+p}). \tag{3.10}$$

Satz 3: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.5) *gelten für alle* $s > S_{N,p}$ *die Abschätzungen*

$$0 \leqq q_{nm}^{N+p}(t) - q_{nm}^N(t) \leqq \lambda_n e^{st}[Q_{nm}^{N+p}(s) - Q_{nm}^N(s)]$$
$$(t \geqq 0; 0 \leqq n, m \leqq N). \tag{3.11}$$

Beweis: Der linke Teil von (3.11) folgt unmittelbar aus (3.6). Offenbar stimmen die singulären Stellen der echt gebrochen rationalen Funktionen Q_{nm}^N mit den Eigenwerten der Matrix A^N überein. Wegen (3.1) gibt es unter diesen einen Eigenwert s_N mit größtem Realteil, der reell ist [6], so daß alle $\mathfrak{L}\{q_{nm}^N\}$ bei festem N für $\operatorname{Re} s > s_N$ existieren. Dann gilt für $s > \max (s_N, s_{N+1})$ wegen (2.7), (3.6) und (3.7) nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Laplace-Transformation die Relation

$$s[Q_{nm}^{N+1}(s - \alpha_n) - Q_{nm}^N(s - \alpha_n)]$$
$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} \frac{d}{d\tau} \{e^{\alpha_n\tau}[q_{nm}^{N+1}(\tau) - q_{nm}^N(\tau)]\} \, d\tau \geqq e^{-st+\alpha_n t}[q_{nm}^{N+1}(t) - q_{nm}^N(t)]; \tag{3.12}$$

woraus, wenn man s durch $s + \alpha_n$ ersetzt,

$$q_{nm}^{N+1}(t) - q_{nm}^N(t) \leqq \lambda_n e^{st}[Q_{nm}^{N+1}(s) - Q_{nm}^N(s)] \quad \left(t \geqq 0; s > \max (s_N, s_{N+1})\right), \tag{3.13}$$

und schließlich auf bekannte Weise der rechte Teil der Ungleichungen (3.11) folgt ∎

Satz 4: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.5) *und* (1.9)—(1.11) *gelten für die Lösungen zweier endlicher Systeme* (2.1) *unter homogenen Anfangsbedingungen die Ungleichungen*

$$0 \leqq x_n^{N+p}(t) - x_n^N(t) \leqq \lambda_n e^{st} \sum_{m=0}^{n_0} [Q_{nm}^{N+p}(s) - Q_{nm}^N(s)] \int_0^t e^{-s\tau} f_m(\tau) \, d\tau$$
$$(s > S_{N,p}; t \geqq 0; 0 \leqq n \leqq N, N \geqq n_0). \tag{3.14}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus (2.6) und (3.11) ∎

Bemerkungen: 1. Offenbar folgt aus (3.14) die Konvergenz der Folgen $\{x_n^N\}_{N \geqq n}$ für $N \to \infty$ bei festem $n \geqq 0$, falls in mindestens einem Punkt s alle Folgen $\{Q_{nm}^N(s)\}_N$ für $N \to \infty$ $(n \geqq 0; 0 \leqq m \leqq n_0)$ konvergieren. Das wird in den folgenden Abschnitten nachgewiesen. 2. Läßt man die Voraussetzung (1.11) fallen, so daß unendlich viele nicht identisch verschwindende Störfunktionen f_n auftreten können, so erhält man aus (2.6) und (3.11) statt (3.14) die Ungleichungen

$$0 \leqq x_n^{N+p}(t) - x_n^N(t) \leqq \lambda_n e^{st} \sum_{m=0}^{N} [Q_{nm}^{N+p}(s) - Q_{nm}^N(s)] \int_0^t e^{-s\tau} f_m(\tau) \, d\tau \tag{3.15}$$
$$+ \sum_{m=N+1}^{N+p} \int_0^t q_{nm}^{N+p}(t - \tau) f_m(\tau) \, d\tau \quad (s > S_{N,p}; t \geqq 0; 0 \leqq n \leqq N),$$

die unter geeigneten Voraussetzungen an die f_m ebenfalls Konvergenzaussagen über die $\{x_n^N\}$ ermöglichen, worauf in dieser Arbeit aber nicht näher eingegangen wird.

4. Eine Darstellung der Funktionen Q_{nm}^N. Wir setzen im folgenden

$$\Delta_i^j = \begin{cases} \begin{vmatrix} \lambda_i & -\beta_{i+1} & -\gamma_{i+2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\delta_i & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\gamma_j \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\beta_j \\ 0 & \cdots & 0 & & -\delta_{j-1} & \lambda_j \end{vmatrix} & \text{für} \quad 0 \leqq i \leqq j \leqq N, \\ 1 & \text{für} \quad i = j+1, \\ 0 & \text{für} \quad i \geqq j+2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Insbesondere ist also

$$\Delta_0^N(s) = \det(sE - A^N). \tag{4.2}$$

Ferner sei

$$B_i^j \leqq \begin{cases} \begin{vmatrix} \beta_i & \gamma_{i+1} & 0 & \cdots & & 0 \\ -\lambda_i & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \delta_i & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_j \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{j-2} & -\lambda_{j-1} & \beta_j \end{vmatrix} & \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq j \leqq N, \\ 1 & \text{für} \quad i = j+1, \\ 0 & \text{für} \quad i \geqq j+2. \end{cases} \tag{4.3}$$

Satz 5: *Für die Elemente Q_{nm}^N der Matrix $(sE - A^N)^{-1}$ gelten die Darstellungen*

$$\Delta_0^N Q_{nm}^N = \begin{cases} \Delta_0^{m-1} \Delta_{n+1}^N \prod_{\nu=m}^{n-1} \delta_\nu & \textit{für } 0 \leqq m \leqq n \leqq N, \\ (B_{n+1}^m \Delta_0^{n-1} + \delta_{n-1}\gamma_{n+1} B_{n+2}^m \Delta_0^{n-2})\, \Delta_{m+1}^N & \\ + \delta_m \gamma_{m+1} (B_{n+1}^{m-1} \Delta_0^{n-1} + \delta_{n-1}\gamma_{n+1} B_{n+2}^{m-1} \Delta_0^{n-2})\, \Delta_{m+2}^N & \textit{für } 0 \leqq n < m \leqq N. \end{cases} \tag{4.4}$$

Der Beweis wird durch Berechnung der entsprechenden Unterdeterminanten der Matrix A^N mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes geführt, wobei die Fälle $m \leqq n$ und $n < m$ zu unterscheiden sind ∎

Aus (4.4) ist ersichtlich, daß die Folgen $\{Q_{nm}^N\}$ für $N \to \infty$ konvergieren, falls für jedes feste $i \geqq 1$ und $N \to \infty$ die Folgen $\{\Delta_i^N/\Delta_0^N\}$ konvergieren. Letzteres wird in den folgenden Abschnitten nachgewiesen.

Satz 6: *Die durch* (4.3) *definierten Funktionen $B_i^j = B_i^j(s)$ sind Polynome in $s + \alpha$ höchstens $[(j - i + 1)/2]$-ten Grades, deren Koeffizienten unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.6) *nichtnegativ sind. Sie lassen sich mittels der Rekursionsgleichung*

$$B_i^j = \beta_j B_i^{j-1} + \lambda_{j-1}\gamma_j B_i^{j-2} + \delta_{j-2}\gamma_{j-1}\gamma_j B_i^{j-3} \qquad (j \geqq i \geqq 1) \tag{4.5}$$

berechnen.

Beweis: Die Rekursionsgleichung (4.5) prüft man für $j = i, i + 1, i + 2$ unmittelbar nach, für $j \geqq i + 3$ erhält man sie durch Entwicklung der Determinante in (4.3) nach der letzten Zeile und Spalte. Alle anderen Behauptungen des Satzes beweist man an Hand von (4.5) durch vollständige Induktion, wobei $\lambda_j = s + \alpha_j$ in der Gestalt $\lambda_j = s + \alpha + \alpha_j - \alpha$ darzustellen und $\alpha_j - \alpha \geqq 0$ zu beachten ist ∎

5. Eigenschaften der Determinanten Δ_i^j. Im folgenden zerlegen wir $\lambda_i = s + \alpha_i = s + \alpha + \alpha_i - \alpha$ und setzen

$$\mu_i = \begin{cases} \delta_i/(s + \alpha) & \text{für } s + \alpha \geqq \delta > 0, \\ 0 & \text{für } s + \alpha > \delta = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Jede Summe, deren obere Summationsgrenze kleiner als die untere ist, wird wie üblich gleich null gesetzt.

Satz 7: *Die Determinanten Δ_i^j erfüllen die Rekursionsgleichung*

$$\Delta_i^j = \lambda_j \Delta_i^{j-1} - \mu_{j-1}\beta_j(s + \alpha)\,\Delta_i^{j-2} - \mu_{j-2}\mu_{j-1}\gamma_j(s + \alpha)^2\,\Delta_i^{j-3} \tag{5.2}$$

$(0 \leqq i \leqq j)$ *und besitzen für $s > -\alpha$ die Darstellungen*

$$\Delta_i^j = (s + \alpha)^{j-i+1} \sum_{\nu=0}^{j-i+1} C_{i\nu}^j (s + \alpha)^{-\nu} \tag{5.3}$$

mit

$$C_{i\nu}^j = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 0, \\ C_{i\nu}^j(\alpha_i - \alpha, \alpha_{i+1} - \alpha, \ldots, \alpha_j - \alpha, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_j, & \\ \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_j, \mu_i, \ldots, \mu_{j-1}) & \text{für } \nu > 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Beweis: Für $j = i, i + 1, i + 2$ folgt (5.2) unmittelbar aus (4.1), für $j \geqq i + 3$ durch Entwicklung der Determinante Δ_i^j nach der letzten Spalte. Die Darstellung (5.3) ergibt sich ebenfalls direkt aus (4.1) ∎

Satz 8: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.6) *gelten für $s + \alpha \geqq \delta > 0$ oder $s + \alpha > \delta = 0$ die Beziehungen*

$$0 \leqq C_{i\nu}^{i+\nu-1} \leqq C_{i\nu}^{i+\nu} \leqq \cdots \leqq C_{i\nu}^{j-1} \leqq C_{i\nu}^j \leqq \cdots \qquad (\nu \geqq 1;\ i \geqq 0) \tag{5.5}$$

und folglich

$$1 \leqq \Delta_i^j/(s + \alpha)^{j-i+1} \leqq \Delta_i^{j+1}/(s + \alpha)^{j-i+2} \qquad (0 \leqq i \leqq j). \tag{5.6}$$

Beweis: Setzt man (5.3) in (5.2) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich sowie unter Berücksichtigung der Voraussetzungen (1.3)—(1.6) und der Ungleichungen $0 \leqq \mu_i \leqq 1$ folgendes:
für $j = i$:

$$C_{i1}^{i} = \alpha_i - \alpha \geqq 0; \tag{5.7}$$

für $j = i + 1$:

$$C_{i1}^{i+1} = C_{i1}^{i} + \alpha_{i+1} - \alpha - \mu_i \beta_{i+1} \geqq C_{i1}^{i}, \tag{5.8}$$

$$C_{i2}^{i+1} = (\alpha_{i+1} - \alpha)\, C_{i1}^{i} \geqq 0; \tag{5.9}$$

für $j = i + 2$:

$$C_{i1}^{i+2} = C_{i1}^{i+1} + \alpha_{i+2} - \alpha - \mu_{i+1}\beta_{i+2} - \mu_i \mu_{i+1} \gamma_{i+2} \geqq C_{i1}^{i+1}, \tag{5.10}$$

$$C_{i2}^{i+2} = C_{i2}^{i+1} + (\alpha_{i+2} - \alpha)\, C_{i1}^{i+1} - \mu_{i+1}\beta_{i+2} C_{i1}^{i} \geqq C_{i2}^{i+1}, \tag{5.11}$$

$$C_{i3}^{i+2} = (\alpha_{i+2} - \alpha)\, C_{i2}^{i+1} \geqq 0; \tag{5.12}$$

für $j \geqq i + 3$:

$$C_{i1}^{j} = C_{i1}^{j-1} + \alpha_j - \alpha - \mu_{j-1}\beta_j - \mu_{j-2}\mu_{j-1}\gamma_j \geqq C_{i1}^{j-1}, \tag{5.13}$$

$$C_{i\nu}^{j} = C_{i\nu}^{j-1} + (\alpha_j - \alpha)\, C_{i,\nu-1}^{j-1} - \mu_{j-1}\beta_j C_{i,\nu-1}^{j-2} - \mu_{j-2}\mu_{j-1}\gamma_j C_{i,\nu-1}^{j-3}$$
$$(2 \leqq \nu \leqq j - i + 1), \tag{5.14}$$

$$C_{i,j-i}^{j} = C_{i,j-i}^{j-1} + (\alpha_j - \alpha)\, C_{i,j-i-1}^{j-1} - \mu_{j-1}\beta_j C_{i,j-i-1}^{j-2}, \tag{5.15}$$

$$C_{i,j-i+1}^{j} = (\alpha_j - \alpha)\, C_{i,j-i}^{j-1}. \tag{5.16}$$

Aus (5.7), (5.8), (5.10) und (5.13) folgt die Behauptung (5.5) für $\nu = 1$. Daraus, sowie aus (5.9), (5.11) und (5.14) folgt (5.5) für $\nu = 2$, so daß schließlich wegen (5.12) und (5.14) auf die Gültigkeit von (5.5) für $\nu = 3$ geschlossen werden kann. In entsprechender Weise kann der Beweis von (5.5) durch vollständige Induktion bezüglich ν mittels der Formeln (5.13)—(5.16) erbracht werden. Aus (5.3)—(5.5) folgt schließlich (5.6). ∎

Satz 9: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.6) *liegen alle Eigenwerte der Matrizen* A^N *in der Halbebene* $\operatorname{Re} s < \delta - \alpha$ (*für* $\delta > 0$) *bzw. in der Halbebene* $\operatorname{Re} s \leqq -\alpha$ (*für* $\delta = 0$), *es gilt die Abschätzung*

$$\sup S_{N,p} \leqq \delta - \alpha, \tag{5.17}$$

und die Abschätzungen (3.11) *können zu*

$$0 \leqq q_{nm}^{N+p}(t) - q_{nm}^{N}(t) \leqq \inf_{s > \delta - \alpha} \{\lambda_n e^{st} [Q_{nm}^{N+p}(s) - Q_{nm}^{N}(s)]\}$$
$$(t \geqq 0;\ 0 \leqq n, m \leqq N) \tag{5.18}$$

verschärft werden. Sind außerdem die Bedingungen (1.9)—(1.11) *erfüllt, so gilt die Abschätzung*

$$0 \leqq x_n{}^{N+p}(t) - x_n{}^{N}(t) \leqq \inf_{s > \delta - \alpha} \left\{ \lambda_n e^{st} \sum_{m=0}^{n_0} [Q_{nm}^{N+p}(s) - Q_{nm}^{N}(s)] \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s\tau}}\, d\tau \right\}$$
$$(N \geqq n_0,\ 0 \leqq n \leqq N). \tag{5.19}$$

Beweis: Aus Satz 8 folgt, daß alle reellen Eigenwerte der Matrizen A^N kleiner als $\delta - \alpha$ (für $\delta > 0$) bzw. höchstens gleich $-\alpha$ (für $\delta = 0$) sind. Daraus folgen (5.17) bis (5.19). Daß auch alle anderen (nichtreellen) Eigenwerte der Matrizen A^N in den Halbebenen $\operatorname{Re} s < \delta - \alpha$ bzw. $\operatorname{Re} s \leqq -\alpha$ liegen, wurde bereits im Beweis zu Satz 3 begründet ∎

Satz 10: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)–(1.6) *gelten für* $s > \delta - \alpha$ *die Abschätzungen*

$$\Delta_i^j \geqq (s + \alpha)^{k_i^j} \prod_{\substack{\nu=i \\ \alpha_\nu > \alpha}}^{j} (\alpha_\nu - \alpha - \mu_{i,\nu-1}\beta_\nu - \mu_{i,\nu-2}\mu_{i,\nu-1}\gamma_\nu) > 0$$

$$(0 \leqq i \leqq j) \tag{5.20}$$

mit

$$\mu_{i\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < i, \\ 0 & \text{für } \nu \geqq i,\ \alpha_\nu > \alpha, \\ \mu_\nu & \text{für } \nu \geqq i,\ \alpha_\nu = \alpha \end{cases} \tag{5.21}$$

und

$$k_i^j = \text{Anzahl der } \nu \text{ mit } \alpha_\nu = \alpha \text{ und } i \leqq \nu \leqq j. \tag{5.22}$$

Bemerkungen: Für $j < i$ oder $\alpha_\nu = \alpha$ $(i \leqq \nu \leqq j)$ wird das Produkt $\prod$ in (5.20) wie üblich gleich 1 gesetzt. Aus $\alpha_\nu = \alpha$ folgt wegen (1.4)–(1.6) $\beta_\nu = \gamma_\nu = 0$.

Beweis: Da nach (5.5) alle Koeffizienten $C_{i\nu}^j$ nichtnegativ sind, erhält man aus (5.3) eine Abschätzung von $\Delta_i^j(s)$ nach unten, indem man alle Summanden mit Ausnahme der höchsten auftretenden Potenz von $(s + \alpha)^{-1}$ wegläßt. Der übrigbleibende (für $s > \delta - \alpha$ von null verschiedene) Ausdruck kann, wenn man für den Augenblick annimmt, daß $\mu_i, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_{j-1}$ von s unabhängige Konstanten aus dem Intervall $[0, 1)$ sind, als asymptotische Darstellung von Δ_i^j für $s \to -\alpha$ aufgefaßt werden. Mithin ist Satz 10 bewiesen, wenn gezeigt wird, daß für konstante $\mu_i, \mu_{i+1}, \ldots, \mu_{j-1} \in [0, 1)$ gilt

$$\Delta_i^j(s) \sim (s + \alpha)^{k_i^j} \prod_{\substack{\nu=i \\ \alpha_\nu > \alpha}}^{j} (\alpha_\nu - \alpha - \mu_{i,\nu-1}\beta_\nu - \mu_{i,\nu-2}\mu_{i,\nu-1}\gamma_\nu) > 0 \tag{5.23}$$

$$(s \to -\alpha).$$

Die Positivität des Produkts auf der rechten Seite folgt aus $0 \leqq \mu_{i\nu} \leqq \mu_\nu < 1$ (wegen $s > \delta - \alpha$) und der Voraussetzung (1.6). Die Gültigkeit der asymptotischen Gleichheit (5.23) erhält man für $j = i,\ i + 1,\ i + 2$ direkt aus den expliziten Darstellungen der Determinanten (4.1) (mit $\lambda_i = s + \alpha + \alpha_i'$, $\alpha_i' = \alpha_i - \alpha$)

$$\Delta_i^i(s) = s + \alpha_i = (s + \alpha)\,[1 + \alpha_i'/(s + \alpha)],$$

$$\Delta_i^{i+1} = (s + \alpha)^2 + [\alpha_i' + \alpha_{i+1}' - \mu_i\beta_{i+1}]\,(s + \alpha) + \alpha_i'\alpha_{i+1}',$$

$$\Delta_i^{i+2} = (s + \alpha)^3 + [\alpha_i' + \alpha_{i+1}' - \mu_i\beta_{i+1} + \alpha_{i+2}' - \mu_{i+1}\beta_{i+2} - \mu_i\mu_{i+1}\gamma_{i+2}]\,(s + \alpha)^2$$
$$+ [\alpha_i'(\alpha_{i+2}' - \mu_i\beta_{i+2}) + \alpha_{i+2}'(\alpha_{i+1}' - \mu_i\beta_{i+1}) + \alpha_i'\alpha_{i+1}']\,(s + \alpha) + \alpha_i'\alpha_{i+1}'\alpha_{i+2}'.$$

Unter der Annahme, daß die asymptotische Gleichheit (5.23) für alle Indizes j mit $i \leqq j \leqq J$, $J \geqq i + 2$ gilt, kann man mit Hilfe der Rekursionsformel (5.2) auf ihre Gültigkeit für $j = J + 1$ schließen. Das ist unmittelbar klar im Fall $\alpha_{J+1} = \alpha$, denn dann ist nach (1.6) $\beta_{J+1} = \gamma_{J+1} = 0$. Ist dagegen $\alpha_{J+1} > \alpha$ und damit $k_i^{J+1} = k_i^J$, so unterscheide man die vier Teilfälle (i) $\alpha_{J-1} = \alpha_J = \alpha$, (ii) $\alpha_J > \alpha_{J-1} = \alpha$, (iii) $\alpha_{J-1} > \alpha_J = \alpha$, (iv) $\alpha_{J-1} > \alpha$, $\alpha_J > \alpha$. Im Fall (i) ist $k_i^J = k_i^{J-1} + 1 = k_i^{J-2} + 2$ und (unter Weglassen der aus (5.20) zu entnehmenden Faktoren) $\prod\limits_{\substack{\nu=i\\ \alpha_\nu>\alpha}}^{J} (\ldots) = \prod\limits_{\ldots}^{J-1} (\ldots) = \prod\limits_{\ldots}^{J-2} (\ldots)$, so daß man aus (5.2) mit $j = J + 1$ die Gültigkeit von (5.25) für $j = J + 1$ erhält. Ähnlich dazu verläuft der Nachweis in den übrigen Fällen (ii)—(iv) ∎

6. Die Folgen $\{\Delta_i^j/(\lambda_i \ldots \lambda_j)\}_{j\ge i}$. Wir betrachten die Funktionenfolgen $\{d_i^j\}_{j\ge i}$ $(i \geqq 0)$ mit

$$d_i^j(s) = \Delta_i^j(s)/(\lambda_i \ldots \lambda_j) \quad (0 \leqq i \leqq j). \tag{6.1}$$

Ihre ersten Glieder sind

$$\begin{aligned} &d_i^i = 1, \quad d_i^{i+1} = 1 - \delta_i\beta_{i+1}/(\lambda_i\lambda_{i+1}), \\ &d_i^{i+2} = 1 - (\delta_i\delta_{i+1}\gamma_{i+2} + \delta_i\beta_{i+1}\lambda_{i+2} + \lambda_i\delta_{i+1}\beta_{i+2})/(\lambda_i\lambda_{i+1}\lambda_{i+2}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Satz 11: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.6) *ist* $\{d_i^j\}_{j\ge i}$ *für jedes feste* $i \geqq 0$ *und alle* $s > \delta - \alpha$ *eine monoton fallende Folge positiver Funktionen mit einer Grenzfunktion* d_i,

$$d_i(s) = \lim_{j\to\infty} d_i^j(s) \quad (s > \delta - \alpha;\ i \geqq 0). \tag{6.3}$$

Beweis: Für $s > \delta - \alpha$ sind $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots$ und nach (5.6) alle Δ_i^j positiv, woraus $d_i^j(s) > 0$ für $j \geqq i$ folgt. Aus (6.2) erkennt man $1 = d_i^i \geqq d_i^{i+1} \geqq d_i^{i+2}$. Setzt man (6.1) in (5.2) ein, so erhält man unter Beachtung von (5.1) für $0 \leqq i \leqq j - 3$

$$d_i^j = d_i^{j-1} - \left\{\delta_{j-1}\beta_j \frac{d_i^{j-2}}{\lambda_{j-1}\lambda_j} + \delta_{j-2}\delta_{j-1}\gamma_j \frac{d_i^{j-3}}{\lambda_{j-2}\lambda_{j-1}\lambda_j}\right\}, \tag{6.4}$$

woraus $d_i^j \leqq d_i^{j-1}$ für $j \geqq i + 3$ folgt ∎

Satz 12: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.8) *gelten für die Grenzfunktionen* (6.3) *die bezüglich i gleichmäßigen Abschätzungen*

$$0 < d(s) \leqq d_i(s) \leqq 1 \quad (s > \delta - \alpha;\ i \geqq 0) \tag{6.5}$$

mit

$$d(s) = \begin{cases} \left(\dfrac{s+\alpha-\delta}{s+\alpha}\right)^l \exp\{-\sigma(s+\alpha)\}, & \textit{falls } \alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha \textit{ für genau } l \textit{ natürliche Zahlen } \nu \textit{ gilt,} \\ \exp\left\{-\dfrac{\varrho}{s+\alpha-\delta} - \sigma(s+\alpha)\right\}, & \textit{falls } \alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha \textit{ für unendlich viele natürliche Zahlen } \nu \textit{ gilt.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Beweis: *Die Abschätzung* $d_i \leqq 1$ *ist nach* (6.2) *und Satz* 11 *klar. Aus* (6.1) *und* (5.20) *ergibt sich die Abschätzung*

$$d_i^j \geqq \prod_{\substack{\nu=i\\ \alpha_\nu>\alpha}}^{j} (\alpha_\nu - \alpha - \mu_{i,\nu-1}\beta_\nu - \mu_{i,\nu-2}\mu_{i,\nu-1}\gamma_\nu) \Bigg/ \prod_{\substack{\nu=0\\ \alpha_\nu>\alpha}}^{j} (s + \alpha_\nu), \tag{6.7}$$

woraus wegen $0 \leqq \mu_{i,\nu} \leqq \mu_{0\nu} \leqq \mu_\nu < 1$ und (1.6) folgt

$$d_i^j \geqq \prod_{\substack{\nu=0\\ \alpha_\nu>\alpha}}^{j} \left(1 - \frac{\mu_{0,\nu-1}\beta_\nu}{\alpha_\nu - \alpha} - \frac{\mu_{0,\nu-2}\mu_{0,\nu-1}\gamma_\nu}{\alpha_\nu - \alpha)}\right) \Bigg/ \prod_{\substack{\nu=0\\ \alpha_\nu>\alpha}}^{j} \left(1 + \frac{s+\alpha}{\alpha_\nu - \alpha}\right). \tag{6.8}$$

Wegen (1.6) und (5.21) gilt für die Faktoren im Zähler der rechten Seite von (6.8)

$$1 - \frac{\mu_{0,\nu-1}\beta_\nu}{\alpha_\nu - \alpha} - \frac{\mu_{0,\nu-2}\mu_{0,\nu-1}\gamma_\nu}{\alpha_\nu - \alpha} \begin{cases} = 1 & \text{für } \nu = 0, \\ = 1 & \text{für } \nu \geqq 1,\ \alpha_{\nu-1} > \alpha, \\ \geqq 1 - \mu_{0,\nu-1} = 1 - \mu_{\nu-1} & \text{für } \nu \geqq 1,\ \alpha_{\nu-1} = \alpha. \end{cases} \tag{6.9}$$

Das Produkt im Nenner der rechten Seite von (6.8) kann unter der Voraussetzung (1.7) wie folgt nach oben abgeschätzt werden:

$$\prod_{\substack{\nu=0\\ \alpha_\nu > \alpha}}^{j} \left(1 + \frac{s+\alpha}{\alpha_\nu - \alpha}\right) = \exp\left\{\sum_{\cdots} \ln\left(1 + \frac{s+\alpha}{\alpha_\nu - \alpha}\right)\right\}$$

$$\leqq \exp\left\{\sum_{\cdots} \frac{s+\alpha}{\alpha_\nu - \alpha}\right\} = \exp\{(s+\alpha)\,\sigma\}. \tag{6.10}$$

Aus (6.8)—(6.10) erhält man die Abschätzung

$$d_i^{\,j}(s) \geqq \left\{\prod_{\substack{\nu=1\\ \alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha}}^{j} (1 - \mu_{\nu-1})\right\} \exp\{-\sigma(s+\alpha)\}. \tag{6.11}$$

Gibt es genau l ($0 \leqq l < \infty$) natürliche Zahlen ν mit $\alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha$, so gilt wegen $\mu_\nu = \delta_\nu/(s+\alpha) < \delta/(s+\alpha)$ die Abschätzung

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha}}^{j} (1 - \mu_{\nu-1}) \geqq \left(1 - \frac{\delta}{s+\alpha}\right)^l = \left(\frac{s+\alpha-\delta}{s+\alpha}\right)^l$$

$$(s > \delta - \alpha;\ j \geqq 0). \tag{6.12}$$

Aus (6.11) und (6.12) erhält man den ersten Teil der Behauptung (6.6). Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen ν mit $\alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha$, so gilt unter Berücksichtigung der Voraussetzung (1.8) und der bekannten Ungleichung $\ln(1 - t) \geqq -t/(1 - t)$ $(0 \leqq t < 1)$ die Abschätzung

$$\prod_{\substack{\nu=1\\ \alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} = \alpha}}^{j} (1 - \mu_{\nu-1}) = \exp\left\{\sum_{\cdots} \ln(1 - \mu_{\nu-1})\right\}$$

$$\geqq \exp\left\{-\sum_{\cdots} \frac{\delta_{\nu-1}}{s+\alpha-\delta_{\nu-1}}\right\} \geqq \exp\left\{\frac{-\varrho}{s+\alpha-\delta}\right\}. \tag{6.13}$$

Aus (6.11) und (6.13) folgt der zweite Teil der Behauptung (6.6) ∎

Zur Beschreibung der Konvergenzgeschwindigkeit in (6.3) definieren wir für $s > \delta - \alpha$ die Größen

$$r_n^N = d_n^N/d_n - 1, \tag{6.14}$$

$$\varepsilon_\beta^N = \sum_{k=N,\beta_{k+1}>0}^{\infty} \delta_k/\bar{\alpha}_k, \tag{6.15}$$

$$\varepsilon_\gamma^N = \sum_{k=N,\gamma_{k+1}>0}^{\infty} (\delta_{k-1}\delta_k)/(\bar{\alpha}_{k-1}\bar{\alpha}_k) \tag{6.16}$$

mit

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \alpha_k - \alpha & \text{für } \alpha_k > \alpha, \\ s + \alpha & \text{für } \alpha_k = \alpha. \end{cases} \tag{6.17}$$

Da, wie nachfolgend gezeigt wird, die Reihen in (6.15) und (6.16) im Falle $N = 1$ für $s > \delta - \alpha$ konvergieren, gilt

$$\varepsilon_\beta^N(s) = o(1) \quad \text{und} \quad \varepsilon_\gamma^N(s) = o(1) \qquad (N \to \infty; s > \delta - \alpha). \tag{6.18}$$

Die Konvergenz der ersten Reihe folgt mit (1.7) und (1.8) aus

$$\sum_{\substack{k=1\\ \beta_{k+1}>0}}^{\infty} \frac{\delta_k}{\bar{\alpha}_k} = \sum_{\substack{\cdots\\ \alpha_k=\alpha}} \frac{\delta_k}{s+\alpha} + \sum_{\substack{\cdots\\ \alpha_k>\alpha}} \frac{\delta_k}{\alpha_k - \alpha}$$

$$\leqq \frac{1}{s+\alpha} \sum_{\substack{k=1\\ \alpha_{k+1}>\alpha_k=\alpha}}^{\infty} \delta_k + \delta \sum_{\substack{k=1\\ \alpha_k>\alpha}}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k - \alpha} \leqq \frac{\varrho}{s+\alpha} + \delta\sigma < \infty. \tag{6.19}$$

Wenn man beachtet, daß wegen (1.7) die Folge der α_n mit $\alpha_n > \alpha$ gegen Unendlich strebt und demnach $\alpha^* = \inf\limits_{\alpha_n>\alpha} (\alpha_n - \alpha)$ positiv ist, so erhält man den Konvergenznachweis der zweiten Reihe aus den Abschätzungen

$$\sum_{\substack{k=1\\ \gamma_{k+1}>0}}^{\infty} \frac{\delta_{k-1}\delta_k}{\bar{\alpha}_{k-1}\bar{\alpha}_k} \leqq \frac{\delta}{\min(s+\alpha, \alpha^*)} \left\{ \sum_{\substack{\cdots\\ \alpha_k>0}} \frac{\delta_k}{\alpha_k - \alpha} + \frac{1}{s+\alpha} \sum_{\substack{\cdots\\ \alpha_k=\alpha}} \delta_k \right\}$$

$$\leqq \cdots \left\{ \delta\sigma + \frac{\varrho}{s+\alpha} \right\} \blacksquare \tag{6.20}$$

Satz 13: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.8) *gelten für alle* $s > \delta - \alpha$ *und jedes feste* $n \geqq 0$ *die Abschätzungen*

$$0 \leqq r_n^{N+1} \leqq r_n^N \leqq (\varepsilon_\beta^N + \varepsilon_\gamma^N)\left(1 + \frac{\varepsilon_\beta^{N-2} + \varepsilon_\gamma^{N-2}}{d}\right) \qquad (N \geqq n+2). \tag{6.21}$$

Beweis: Aus Satz 11 folgt, daß $\{r_n^N\}_{N\geqq n}$ für jedes feste n eine monoton fallend gegen null strebende Folge nichtnegativer Funktionen ist. Setzt man noch $d_n^N = (1 + r_n^N) d_n$ in (6.4) ein, so erhält man für $N \geqq n + 2$, $s > \delta - \alpha$

$$0 \leqq r_n^N - r_n^{N+1} = (r_n^{N-1} + 1) \frac{\delta_N \beta_{N+1}}{\lambda_N \lambda_{N+1}} + (r_n^{N-2} + 1) \frac{\delta_{N-1}\delta_N\gamma_{N+1}}{\lambda_{N-1}\lambda_N\lambda_{N+1}}. \tag{6.22}$$

Ersetzt man hier N nacheinander durch $N, N+1, \ldots, N+p$ mit irgendeiner natürlichen Zahl p und addiert die entsprechenden Relationen, so erhält man unter Beachtung der Monotonie der Folge $\{r_n^N\}_{N\geqq n}$ die Abschätzung

$$0 \leqq r_n^N - r_n^{N+p+1} \leqq (1 + r_n^{N-2}) \sum_{k=N}^{N+p} \left\{ \frac{\delta_k \beta_{k+1}}{\lambda_k \lambda_{k+1}} + \frac{\delta_{k-1}\delta_k\gamma_{k+1}}{\lambda_{k-1}\lambda_k\lambda_{k+1}} \right\}$$

$$(s > \delta - \alpha; 0 \leqq n \leqq N - 2) \tag{6.23}$$

und hieraus für $p \to \infty$ wegen $\lim\limits_{p\to\infty} r_n^{N+p} = 0$, $0 \leqq \beta_k/\lambda_k \leqq 1$, $0 \leqq \gamma_k/\lambda_k \leqq 1$, $\lambda_k \geqq \bar{\alpha}_k$

$$0 \leqq r_n^N \leqq (1 + r_n^{N-2})(\varepsilon_\beta^N + \varepsilon_\gamma^N) \qquad (0 \leqq n \leqq N-2). \tag{6.24}$$

Andererseits ist nach (6.14) und wegen $1 \geqq d_n^N \geqq d_n \geqq d > 0$

$$1 + r_n^{N-2} = d_n^{N-2}/d_n \leqq 1/d. \tag{6.25}$$

Aus (6.24) und (6.25) folgt nun der rechte Teil der Behauptung (6.21) ∎

7. Konvergenz der Näherungslösungen. Zunächst führen wir die abkürzenden Bezeichnungen

$$P_{nm} = \begin{cases} \Delta_0{}^{m-1} \prod_{\nu=m}^{n-1} \delta_\nu & \text{für } 0 \leqq m \leqq n, \\ \lambda_{m+1}(B_{n+1}^m \Delta_0{}^{n-1} + \delta_{n-1}\gamma_{n+1} B_{n+2}^m \Delta_0{}^{n-2}) & \\ \quad + \delta_m \gamma_{m+1}(B_{n+1}^{m-1} \Delta_0{}^{n-1} + \delta_{n-1}\gamma_{n+1} B_{n+2}^{m-1} \Delta_0{}^{n-2}) & \text{für } 0 \leqq n < m, \end{cases} \tag{7.1}$$

$$L_{nm} = \begin{cases} \prod_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu & \text{für } 0 \leqq m \leqq n, \\ \prod_{\nu=0}^{m+1} \lambda_\nu & \text{für } 0 \leqq n < m, \end{cases} \tag{7.2}$$

$$R_{nm} = P_{nm}/L_{nm} \tag{7.3}$$

ein.

Satz 14: *Unter den Voraussetzungen* (1.3)—(1.11) *konvergieren für jedes feste* $n \geqq 0$ *und alle* $t \geqq 0$ *die Folgen* $\{x_n{}^N\}_{N \geqq n}$ *monoton wachsend gegen Grenzfunktionen* x_n,

$$x_n(t) = \lim_{N\to\infty} x_n{}^N(t), \tag{7.4}$$

die das unendliche System (1.1) *und die homogenen Anfangsbedingungen* (1.2) *erfüllen. Es gelten die Fehlerabschätzungen* $(0 \leqq n \leqq N,\ N \geqq n_0)$

$$0 \leqq x_n(t) - x_n{}^N(t)$$

$$\leqq \sum_{m=0}^{n_0} \inf_{s>\delta-\alpha} \left\{ \lambda_n e^{st} \frac{\varepsilon_\beta{}^N + \varepsilon_\gamma{}^N}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_\beta{}^{N-2} + \varepsilon_\gamma{}^{N-2}}{d}\right) R_{nm}(s) \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s\tau}}\, d\tau \right\} \tag{7.5}$$

$$\leqq \inf_{s>\delta-\alpha} \left\{ \lambda_n e^{st} \frac{\varepsilon_\beta{}^N + \varepsilon_\gamma{}^N}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_\beta{}^{N-2} + \varepsilon_\gamma{}^{N-2}}{d}\right) \sum_{m=0}^{n_0} R_{nm}(s) \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s\tau}}\, d\tau \right\}. \tag{7.6}$$

Beweis: Nach den Sätzen 11 und 12 sind die Folgen $\{d_i{}^j(s)/d_0{}^j(s)\}_{j \geqq i}$, für feste $i \geqq 0$ und $s > \delta - \alpha$, bei $j \to \infty$ konvergent gegen $d_i(s)/d_0(s)$. Deshalb existieren für alle $s > \delta - \alpha$ nach (6.1) die Grenzwerte

$$\lim_{j\to\infty} (\Delta_i{}^j/\Delta_0{}^j) = (d_i/d_0) \prod_{\nu=0}^{i-1} (1/\lambda_\nu) \quad (i \geqq 0), \tag{7.7}$$

nach Satz 5 die Grenzwerte

$$\lim_{N\to\infty} Q_{nm}^N(s) = Q_{nm}(s), \tag{7.8}$$

und schließlich nach (5.19) die Funktionen (7.4). Aus (2.1) erhält man für jedes feste $n \geqq 0$, jedes feste p und alle $N \geqq n + 2$

$$(x_n{}^{N+p})' - (x_n{}^N)' = \delta_{n-1}(x_{n-1}^{N+p} - x_{n-1}^N) - \alpha_n(x_n{}^{N+p} - x_n{}^N)$$
$$+ \beta_{n+1}(x_{n+1}^{N+p} - x_{n+1}^N) + \gamma_{n+2}(x_{n+2}^{N+p} - x_{n+2}^N), \tag{7.9}$$

so daß auch die Folge der Ableitungen $\{(x_n^N)'\}_{N\geqq n+2}$ konvergiert. Aus (5.19) ist ersichtlich, daß diese Konvergenz bezüglich t in jedem endlichen Intervall $[0, T]$ gleichmäßig ist und folglich

$$\lim_{N\to\infty} \frac{d}{dt} x_n^N(t) = x_n'(t) \qquad (t \geqq 0; n \geqq 0) \tag{7.10}$$

gilt. Läßt man in irgendeiner Differentialgleichung des Systems (2.1) N gegen unendlich streben, so erkennt man, daß die Grenzfunktionen x_n die entsprechende Differentialgleichung des unendlichen Systems (1.1) erfüllen. Offenbar ist wegen $x_n^N(0) = 0$ auch $x_n(0) = 0$ $(n \geqq 0)$. Zum Beweis der Fehlerabschätzungen lassen wir in (5.19) p gegen unendlich streben und erhalten

$$0 \leqq x_n(t) - x_n^N(t) \leqq \inf_{s>\delta-\alpha} \left\{\lambda_n e^{st} \sum_{m=0}^{n_0} [Q_{nm}(s) - Q_{nm}^N(s)] \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s\tau}} d\tau\right\}$$
$$(0 \leqq n \leqq N, N \geqq n_0). \tag{7.11}$$

Sind in (1.1) alle Störfunktionen mit Ausnahme einer einzigen f_m $(0 \leqq m \leqq n_0)$ für $t \geqq 0$ identisch gleich null und bezeichnen wir die zugehörigen Lösungen von (1.1) und (2.1) mit x_{nm} bzw. x_{nm}^N, so gilt insbesondere

$$0 \leqq x_{nm}(t) - x_{nm}^N(t) \leqq \inf_{s>\delta-\alpha} \left\{\lambda_n e^{st} [Q_{nm}(s) - Q_{nm}^N(s)] \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s\tau}} d\tau\right\}, \tag{7.12}$$

woraus

$$Q_{nm}(s) - Q_{nm}^N(s) \geqq 0 \qquad (s > \delta - \alpha) \tag{7.13}$$

und wegen $x_n^N = \sum_{m=0}^{n_0} x_{nm}^N$, $x_n = \sum_{m=0}^{n_0} x_{nm}$ die im Vergleich zu (7.11) schärfere Abschätzung

$$0 \leqq x_n(t) - x_n^N(t) \leqq \sum_{m=0}^{n_0} \inf_{s>\delta-\alpha} \left\{\lambda_n e^{st} [Q_{nm}(s) - Q_{nm}^N(s)] \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s\tau}} d\tau\right\} \tag{7.14}$$

folgt. Nach (4.4), (7.7), (7.8) und (7.13) gilt für $s > \delta - \alpha$ die Darstellung

$$0 \leqq Q_{nm} - Q_{nm}^N$$
$$= \begin{cases} P_{nm} \prod\limits_{\nu=0}^{n} \dfrac{1}{\lambda_\nu} \left(\dfrac{d_{n+1}}{d_0} - \dfrac{d_{n+1}^N}{d_0^N}\right) & \text{für } 0 \leqq m \leqq n \leqq N, \\ (B_{n+1}^m \Delta_0^{n-1} + \delta_{n-1}\gamma_{n+1} B_{n+2}^m \Delta_0^{n-2}) \prod\limits_{\nu=0}^{m} \dfrac{1}{\lambda_\nu} \left(\dfrac{d_{m+1}}{d_0} - \dfrac{d_{m+1}^N}{d_0^N}\right) & \\ \quad + \delta_m \gamma_{m+1} (B_{n+1}^{m-1} \Delta_0^{n-1} + \delta_{n-1}\gamma_{n+1} B_{n+2}^{m-1} \Delta_0^{n-2}) & \\ \quad \times \prod\limits_{\nu=0}^{m+1} \dfrac{1}{\lambda_\nu} \left(\dfrac{d_{m+2}}{d_0} - \dfrac{d_{m+2}^N}{d_0^N}\right) & \text{für } 0 \leqq n < m \leqq N. \end{cases} \tag{7.15}$$

Aus (6.5), (6.14) und (6.21) ergeben sich die bezüglich i gleichmäßigen Abschätzungen

$$\frac{d_i}{d_0} - \frac{d_i^N}{d_0^N} = \frac{d_i}{d_0} \frac{r_0^N - r_i^N}{1 + r_0^N} \leqq \frac{1}{d} r_0^N \leqq \frac{\varepsilon_\beta^N + \varepsilon_\gamma^N}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_\beta^{N-2} + \varepsilon_\gamma^{N-2}}{d}\right), \tag{7.16}$$

so daß aus (7.11) und (7.14)—(7.16) die Ungleichungen (7.5) und (7.6) folgen ∎

8. Ergänzungen und Bemerkungen. 1. Für numerische Zwecke können die Infima auf den rechten Seiten von (7.5) und (7.6) durch Näherungswerte ersetzt werden, indem man z. B. in die zu minimierenden Funktionen für s die Funktion s_0,

$$s_0(t) = \begin{cases} \delta - \alpha + l/(t+\sigma) & \text{für } 0 \leqq l < \infty, \\ \delta - \alpha + \sqrt{\varrho/(t+\sigma)} & \text{für } l = \infty, \end{cases} \tag{8.1}$$

einsetzt, wobei s_0 die in $[\delta - \alpha, \infty)$ eindeutig bestimmte Minimalstelle der in den rechten Seiten von (7.5) und (7.6) als maßgeblicher Faktor enthaltenen Funktion g (t als Parameter),

$$g(s) = \begin{cases} \exp\{s(t+\sigma)\}/(s+\alpha-\delta)^l & \text{für } 0 \leqq l < \infty, \\ \exp\{s(t+\sigma) + \varrho/(s+\alpha-\delta)\} & \text{für } l = \infty, \end{cases} \tag{8.2}$$

ist. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 \leqq x_n(t) - x_n^N(t) \leqq \lambda_n(s_0)\, e^{\delta\sigma + (\delta-\alpha)t}\, M(t)\, [\varepsilon_\beta^N(s_0) + \varepsilon_\gamma^N(s_0)] \\ \times \left[1 + \frac{\varepsilon_\beta^{N-2}(s_0) + \varepsilon_\gamma^{N-2}(s_0)}{d(s_0)}\right] \sum_{m=0}^{n_0} R_{nm}(s_0) \int_0^t \frac{f_m(\tau)}{e^{s_0\tau}}\, d\tau \\ (0 \leqq n \leqq N,\ N \geqq n_0) \end{aligned} \tag{8.3}$$

mit

$$M(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } l = 0, \\ e^l[1 + \delta(t+\sigma)/l]^l & \text{für } 0 < l < \infty, \\ \exp\left\{2\sqrt{\varrho(t+\sigma)}\right\} & \text{für } l = \infty. \end{cases} \tag{8.4}$$

Natürlich kann man zur weiteren Vereinfachung statt s_0 auch irgendeinen oberhalb $\delta - \alpha$ gelegenen Näherungswert von s_0 in die zu minimierenden Funktionen einsetzen, insbesondere für große Werte t die asymptotischen Darstellungen $\delta - \alpha + l/t$ $(0 \leqq l < \infty)$ bzw. $\delta - \alpha + \sqrt{\varrho/t}$ $(l = \infty)$ von s_0 für $t \to \infty$. Man kann sich noch leicht überlegen, daß wegen der Nichtnegativität der Koeffizienten der Polynome L_{nm} und P_{nm} (s. Satz 6) für alle nicht identisch verschwindenden R_{nm} die Beziehung $R_{nm}(s_0) \sim R_{nm}(\delta)$ $(t \to \infty)$ gilt.

2. Ist $\sigma > 0$, so gilt $\delta - \alpha \leqq s_0 \leqq \delta - \alpha + O(1)$ $(0 \leqq t < \infty)$ und folglich $0 < \delta + \alpha_n - \alpha \leqq \lambda_n(s_0) \leqq \delta + \alpha_n - \alpha + O(1)$, so daß $\lambda_n(s_0)$ für alle $t \geqq 0$ in der Größenordnung von α_n liegt.

3. Aus (6.15) und (6.16) erhält man in Anlehnung an (6.19) bzw. (6.20) im Fall $\delta > 0$ die für alle $t \geqq 0$ gleichmäßig geltenden Abschätzungen

$$\varepsilon_\beta^N(s_0) \leqq (1/\delta) \sum_{\substack{k=N \\ \beta_{k+1}>0,\, \alpha_k=\alpha}}^{\infty} \delta_k + \delta \sum_{\substack{k=N \\ \beta_{k+1}>0,\, \alpha_k>\alpha}}^{\infty} 1/(\alpha_k - \alpha), \tag{8.5}$$

$$\varepsilon_\gamma^N(s_0) \leqq \frac{\delta}{\min\limits_{\substack{n \geqq N \\ \alpha_n > \alpha}} (\delta, \alpha_n - \alpha)} \left\{\delta \sum_{\substack{k=N \\ \gamma_{k+1}>0,\, \alpha_k>\alpha}}^{\infty} 1/(\alpha_k - \alpha) + (1/\delta) \sum_{\substack{k=N \\ \gamma_{k+1}>0,\, \alpha_k=\alpha}}^{\infty} \delta_k\right\}. \tag{8.6}$$

4. Existiert $\mathfrak{L}\{f_m\} = F_m(s)$ für $s = \delta - \alpha$, so kann das entsprechende Integral in (7.5) und (7.6) durch den Funktionswert $F_m(\delta - \alpha)$ nach oben abgeschätzt werden.

5. Gibt es ein N_0, so daß für alle natürlichen Zahlen $k \geqq N_0$ sowohl $\delta_k\beta_{k+1} = 0$ als auch $\delta_{k-1}\delta_k\gamma_{k+1} = 0$ ist, so sind nach (6.15) und (6.16) $\varepsilon_\beta^N = \varepsilon_\gamma^N = 0$ für $N \geqq N_0$, also nach (7.6) $x_n^N = x_n$ für $0 \leqq n \leqq N$, $N \geqq \max(n_0, N_0)$. Diese Aussage kann auch unmittelbar aus (1.1) und (2.1) erhalten werden. Sie trifft insbesondere in den unter den Punkten 2 und 3 ausgeschlossenen Fällen $\sigma = 0$ bzw. $\delta = 0$ zu, denn $\sigma = 0$ ist nach (1.7) äquivalent zu $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha$, woraus nach (1.4)–(1.6) $\beta_n = \gamma_n = 0$ $(n \geqq 0)$ folgt, so daß (1.1) ein rekursiv lösbares

System ist, also sogar gilt $x_n^N = x_n$ für $0 \leqq n \leqq N$; im Fall $\delta = 0$ besitzt (1.1) die Gestalt $x_n' = -\alpha_n x_n + \beta_{n+1} x_{n+1} + \gamma_{n+2} x_{n+2} + f_n$ $(n \geqq 0)$ mit $f_n = 0$ für $n > n_0$, so daß $x_n^N = x_n = 0$ für $n_0 < n \leqq N$ und demzufolge auch $x_n^N = x_n$ für $0 \leqq n \leqq n_0 \leqq N$ gilt.

9. Ein Anwendungsbeispiel. Die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit wurden durch ein mathematisches Modell zur Berechnung der Radikalpopulation bei gewissen Polymerisationsprozessen angeregt. Dieses Modell hat die Form (1.1), (1.2) mit $\delta_n' = \delta > 0$ $(n \geqq 1)$, $\beta_n = 0$, $\gamma_n = n(n-1)c$ und $\alpha_n = \delta + \gamma_n$ $(n \geqq 0)$, $f_n = 0$ $(n = 0, 2, 3, \ldots)$, wobei c und δ positive Konstanten bedeuten. Mit $\alpha = \delta$, $\sigma = 1/c$ und $\varrho = \delta$ sind alle Bedingungen (1.3) bis (1.11) erfüllt. Wegen $\alpha = \alpha_0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots$ ist nach (6.6) $l = 1$ und $d = (1 + \delta/s)^{-1} \times \exp[-(s+\delta)/c]$. Aus (4.1), (4.3) und (7.1) erhält man wegen $\Delta_0^0 = \lambda_0 = s + \delta$, $B_1^1 = \beta_1 = 0$

$$P_{n1} = \begin{cases} (s+\delta)\,\delta^{n-1} & \text{für } n \geqq 1, \\ 2c\delta & \text{für } n = 0, \end{cases} \tag{9.1}$$

und nach (7.2) ist

$$L_{n1} = \begin{cases} \prod\limits_{\nu=0}^{n} [s + \delta + \nu(\nu-1)\,c] & \text{für } n \geqq 1, \\ (s+\delta)^2\,(s + \delta + 2c) & \text{für } n = 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Nach (6.15) und (6.16) sind alle $\varepsilon_\beta^N = 0$ bzw. für $N \geqq 4$

$$\varepsilon_\gamma^N = (\delta/c)^2 \sum_{k=N}^{\infty} [(k-2)\,(k-1)^2\,k]^{-1} \leqq (\delta/c)^2\,[3(N-3)\,(N-2)^2]^{-1}. \tag{9.3}$$

Nach (8.1) ist $s_0 = 1/(t + 1/c) \sim 1/t$ $(t \to \infty)$. Ersetzt man in den Abschätzungen (7.5) und (7.6) das Infimum durch den Funktionswert für $s = 1/t$, so bekommt man die für nicht zu kleine t geeignete Abschätzung

$$0 \leqq x_n(t) - x_n^N(t) \leqq K_n(t)\,\frac{t\exp(\delta/c + 1 + 1/tc)}{(N-3)\,(N-2)^2}\,[1 + \varepsilon_N^*(t)] \int\limits_0^t \frac{f_1(\tau)}{e^{\tau/t}}\,d\tau \tag{9.4}$$

mit

$$K_n(t) = \begin{cases} 2\delta^3/[3c(\delta + 2c + 1/t)] & \text{für } n = 0, \\ \delta^{n+1}(\delta + 1/t)^2 \Big/ \left\{3c^2 \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} [\delta + \nu(\nu-1)\,c + 1/t]\right\} & \text{für } n \geqq 1 \end{cases} \tag{9.5}$$

und

$$\varepsilon_N^*(t) = \frac{\delta^2(\delta + 1/t)\exp[(\delta + 1/t)/c]}{3c^2(N-5)\,(N-4)^2}\,t. \tag{9.6}$$

Daraus geht hervor, daß für festes n und große Werte von t und N die Abweichung der Näherung $x_n^N(t)$ vom Grenzwert $x_n(t)$, abgesehen von dem Integralfaktor, von der Größenordnung t/N^3 ist. Der Integralfaktor bleibt offenbar beschränkt, wenn $f_1 \in L(0, \infty)$ ist. Für kleine Werte von t kann man $s_0 = c$ setzen.

LITERATUR

[1] Arley, N., and V. Borchsenius: On the theory of infinite systems of differential equations and their application to the theory of stochastic processes and the perturbation theory of quantum mechanics. Acta math. **76** (1945), 261–322.

[2] Bellman, R.: The boundedness of solutions of infinite systems of linear differential equations. Duke Math. J. **14** (1947), 695–706.

[3] Chew, K. H., Shivakumar, P. N., and J. J. Williams: Error bounds for the truncation of infinite linear differential systems. J. Inst. Math. Appl. **25** (1980), 37–51.

[4] Deimling, K.: Ordinary differential equations in Banach spaces. Lect. Notes Math. 596, Berlin—New York: Springer-Verlag 1977.

[5] Deimling, K.: Countable systems of ordinary differential equations. Recent advances in differential equations, Meet. Miramare (Trieste)/Italy 1978 (1981), 101—110.

[6] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 1, Basel—Stuttgart 1950 (Nachdruck 1971).

[7] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 2. Basel—Stuttgart 1955 (Nachdruck 1972).

[8] Hart, W. L.: Linear differential equations in infinitely many variables. Amer. J. 39 (1917), 407—424.

[9] Hille, E.: Pathology of infinite systems of linear first order differential equations with constant coefficients. Ann. Mat. Pura Appl. 55 (1961), 133—148.

[10] Inaba, M.: On the theory of differential equations in coordinated spaces. Kumamoto J. Sci. Ser. A5 (1961), 119—136.

[11] v. Koch, H.: Sur les systèmes d'ordre infini d'équations differentielles. Stockh. Öfv. 56 (1899), 395—411.

[12] Кузнецов, Ю. В.: К аналитической теории бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений. Дифф. ур-ия 5 (1969), 1018—1028.

[13] Нурекенов, Т. К.: О решениях счетных систем дифференциальных уравнений. Дифф. ур-ия 20 (1984), 1640—1642.

[14] Oguztörely, M. N.: On an infinite system of differential equations occurring in the degradations of polymers I. Utilitas Math. 1 (1972), 141—155.

[15] Персидский, К. П.: Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решения. Ч. 2: Основные свойства счетных систем линейных дифференциальных уравнений. Изв. Акад. Наук КазССР, сер. мат. и мех. 8 (1959), 45—64.

[16] Shaw, L.: Existence and approximation of solutions to an infinite set of linear time-invariant differential equations. SIAM J. Appl. Math. 22 (1972), 266—279.

[17] Shaw, L.: Solutions for infinite matrix differential equations. J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 373—383.

[18] Шиндерманн, И. Д.: О бесконечных системах линейных дифференциальных уравнений. Дифф. ур-ия 4 (1968), 276—282.

[19] Sternberg, W.: Über Systeme unendlich vieler gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1920, 10. Abh., 1—21.

[20] Валеев, К. Г.; О. А. Жаутыков: Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: изд-во Наука 1974.

[21] Walter, W.: Differential and Integral Inequalities. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1970.

Manuskripteingang: 13. 11. 1987

VERFASSER:

Dr. Eberhard Wagner,
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Universitätsplatz 6
DDR-4020 Halle