Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (5) 1989, S. 463–472

Variationscharakterisierungen für gewisse quasikonforme Abbildungen

E. Hoy

Die Arbeit befaßt sich mit der Konstruktion von Lösungen der Gleichung $f_{\bar z}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)}$ mit $\nu(z) = 0$ in einer Umgebung von ∞. In dieser Arbeit werden zwei Variationsmethoden beschrieben. Die erste Methode charakterisiert f im Fall einer beschränkten und meßbaren Funktion ν $(0 \leqq \nu(z) \leqq q = \text{const} < 1)$. Außerdem existiert eine einfachere Charakterisierung für f, wenn ν eine stückweise konstante Funktion ist.

Работа посвящена конструкции решений f уравнения $f_{\bar z}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)}$ при $\nu(z) = 0$ в окрестности ∞. Два вариационных метода описаны. Первый метод характеризует f в случае ограниченной и измеримой функции ν $(0 \leqq \nu(z) \leqq q = \text{const} < 1)$. Кроме того f можно более просто охарактеризовать в случае, если ν кусочно постоянна.

The paper deals with the construction of solutions f for the equation $f_{\bar z}(z) = \nu(z)\,\overline{f_z(z)}$ with $\nu(z) = 0$ in a neighbourhood of ∞. In the paper two variational methods are described. The first method characterizes f for a bounded and measurable function ν $(0 \leqq \nu(z) \leqq q = \text{const} < 1)$. If ν is a piecewise constant function, then there exists also a simpler characterization of f.

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Variationscharakterisierungen und damit verbundene Ritz-Verfahren für die Berechnung der folgenden quasikonformen Abbildung angegeben. Es sei $f = f(z)$ eine quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich, die in einer Umgebung von ∞ die Entwicklung

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots \tag{1}$$

besitzt und für alle $z \in \mathbb{C}$ der Differentialgleichung

$$f_{\bar z}(z) = \frac{p_0(z) - 1}{p_0(z) + 1}\,\overline{f_z(z)} \tag{2}$$

genügt. Dabei ist p_0 eine meßbare und beschränkte Funktion auf $\mathbb{C}$ mit $p_0(z) \geqq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $p_0(z) \equiv 1$ außerhalb eines hinreichend großen Kreises $K = \{z : |z| < R\}$ $(R > 0)$. Diese wird vorgegeben. Es existiert bekanntlich zu jeder solchen Funktion p_0 genau eine quasikonforme Abbildung f mit den Eigenschaften (1) und (2). Hierzu wird auf [10] und dort zitierte Literatur verwiesen. Diese Abbildung f spielt sowohl in der geometrischen Funktionentheorie als auch bei einigen Problemen der mathematischen Physik eine wichtige Rolle, wie es in [8–10] dargestellt wurde.

Im Abschnitt 2 dieser Arbeit wird gezeigt, daß sich die Variationscharakterisierung aus [12] (siehe auch [8: Zweiter Teil, Kap. IV, § 1]) für die Berechnung von Ritz-Näherungen für f eignet. Im Abschnitt 3 wird — in Verallgemeinerung der Vorgehensweise in [5] — für eine Klasse spezieller Funktionen p_0 eine andere Charakterisierung der Abbildung f angegeben. Diese Überlegungen weisen eine enge Beziehung zur Theorie der Hilbert-Räume mit einem reproduzierenden Kern auf (siehe dazu [2], [3: Kap. III und Kap. V, § 5], [4: Kap. I, § 5] und [13]). Auf solche Fragestellungen wird im Abschnitt 4 eingegangen.

2. Berechnung von Ritz-Näherungen im allgemeinen Fall

Zunächst wird die Variationscharakterisierung aus [12] für den Realteil von $f(z) - z$, (f aus (1) und (2)) genannt. Es gilt für alle reellwertigen, in der Vollebene (einschließlich ∞) stetigen Funktionen h, deren Sobolev-Ableitung h_z $\left(h_z(z) = \overline{h_{\bar z}(z)}\right)$ über die Vollebene quadratisch integrierbar ist, die Abschätzung

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} |h_z(z)|^2\, dx\, dy - \iint\limits_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, |h_z(z) + 2^{-1}|^2\, dx\, dy \geqq -\frac{\pi}{2} \operatorname{Re} \alpha_1 \tag{3}$$

(α_1 ist der Koeffizient bei z^{-1} in (1)). In (3) steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $h(z) = \operatorname{Re}[f(z) - z] + \text{const}$ gilt. Durch Minimierung des Terms auf der linken Seite von (3) können Funktionen $\tilde h$ berechnet werden, die — wie noch gezeigt wird — $\operatorname{Re}[f(z) - z]$ approximieren. Dazu benötigt man Ansatzfunktionen für die Darstellung von $\tilde h$. Man setzt für $|z| > R$ ($z = r\, e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$)

$$\tilde h(z) = \sum_{l=1}^{N} r^{-l}[c_l \sin(l\varphi) + d_l \cos(l\varphi)], \tag{4}$$

da $\operatorname{Re}[f(z) - z]$ für $|z| > R$ harmonisch ist und eine eindeutige konjugiert harmonische Funktion besitzt. Diese Eigenschaften von f sichern auch, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N und reelle Zahlen c_l^* und d_l^* ($l = 1, 2, \ldots, N$) existieren mit

$$\iint\limits_{|z|<R} \left| \left\{\operatorname{Re}[f(z) - z] - \sum_{l=1}^{N} r^{-l}\, [c_l^* \sin(l\varphi) + d_l^* \cos(l\varphi)]\right\}_z \right|^2 dx\, dy < \varepsilon \tag{5}$$

(siehe dazu [13: Satz IV 7] und dort zitierte Literatur).

Für die Darstellung von h in $\{z: |z| \leqq R\}$ benötigt man noch weitere Ansatzfunktionen. Da die Funktionen $r^{-l} \sin(l\varphi)$ und $r^{-l} \cos(l\varphi)$ durch $(r/R^2)^l \sin(l\varphi)$ und $(r/R^2)^l \cos(l\varphi)$ für $l = 1, 2, \ldots, N$ stetig nach $\{z: |z| \leqq R\}$ fortgesetzt werden können, reichen hierfür Ansatzfunktionen zur Approximation einer Funktion mit auf $\{z: |z| = R\}$ verschwindenden Randwerten aus. Transformiert man die Kreisscheibe $K = \{z: |z| < R\}$ durch die quasikonforme Abbildung

$$\zeta = w(z) = \frac{\pi}{2}\, \frac{z}{R \max(|\cos\varphi|, |\sin\varphi|)} + \frac{\pi}{2}(1 + i) \qquad (z = r\, e^{i\varphi})$$

auf das Quadrat $\{\zeta: \zeta = \xi + i\eta,\ 0 < \xi,\ \eta < \pi\}$, so genügt es, dieses Quadrat im folgenden zu betrachten. Es gilt das

Lemma 1: *Es sei $S = S(\xi, \eta)$ eine in dem abgeschlossenen Quadrat $\{(\xi, \eta): 0 \leqq \xi, \eta \leqq \pi\}$ reellwertige und stetige Funktion, die auf dessen Rand verschwindet und integrierbare Sobolev-Ableitungen S_ξ und S_η besitzt mit* $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi [S_\xi^2(\xi, \eta) + S_\eta^2(\xi, \eta)]\, d\xi\, d\eta < \infty$.

Dann gilt

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi \{|[S(\xi,\eta) - S_M(\xi,\eta)]_\xi|^2 + |[S(\xi,\eta) - S_M(\xi,\eta)]_\eta|^2\}\, d\xi\, d\eta = 0 \tag{6}$$

mit

$$S_M(\xi,\eta) = \sum_{n,m=1}^{M} \gamma_{nm} \sin(n\xi)\sin(m\eta) \qquad (M \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

und

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi S(\xi,\eta) \sin(n\xi) \sin(m\, d\xi\eta)\, d\eta. \tag{8}$$

Beweis: Die Zahlen γ_{nm} $(n, m \in \mathbb{N})$ sind offenbar die Fourier-Koeffizienten von S. Es bleibt für (6) nur zu zeigen, daß $\gamma'_{nm} = n\gamma_{nm}$ und $\gamma''_{nm} = m\gamma_{nm}$ die Fourier-Koeffizienten von S_ξ bzw. S_η sind. Für erstere ergibt sich

$$\gamma'_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi S_\xi(\xi,\eta) \cos(n\xi) \sin(m\eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes geht dies über in

$$\frac{n}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi S(\xi,\eta) \sin(n\xi) \sin(m\eta)\, d\xi\, d\eta = n\gamma_{nm} \qquad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Die Überlegungen für S_η verlaufen völlig analog ∎

Zusammenfassend hat man für $|z| \leqq R$ die Darstellung

$$\tilde{h}(z) = \sum_{l=1}^{N} (r/R^2)^l [c_l \sin(l\varphi) + d_l \cos(l\varphi)]$$
$$+ \sum_{n,m=1}^{M} e_{nm} \sin\{n \operatorname{Re}[w(z)]\} \sin\{m \operatorname{Im}[w(z)]\},$$

wobei die Zahlen c_l, d_l und e_{nm} durch die Minimierung der linken Seite von (3) eindeutig bestimmt werden. Die eindeutige Bestimmtheit dieser Zahlen ergibt sich aus der linearen Unabhängigkeit der verwendeten Ansatzfunktionen. Nimmt man nämlich an, die Ansatzfunktionen wären linear abhängig, so würden reelle Zahlen c_l', d_l' $(l = 1, 2, \ldots, N)$ und e'_{nm} $(n, m = 1, 2, \ldots, M)$ existieren, die nicht sämtlich gleich Null sind und für die der Ausdruck

$$\iint_{|z|>R} \left| \left\{ \sum_{l=1}^{N} r^{-l} [c_l' \sin(l\varphi) + d_l' \cos(l\varphi)] \right\}_z \right|^2 dx\, dy$$
$$+ \iint_{|z|\leqq R} \left| \left(\sum_{l=1}^{N} (r/R^2)^l [c_l' \sin(l\varphi) + d_l' \cos(l\varphi)] \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{n,m=1}^{M} e'_{nm} \sin\{n \operatorname{Re}[w(z)]\} \sin\{m \operatorname{Im}[w(z)]\} \right)_z \right|^2 \frac{dx\, dy}{p_0(z)}$$

verschwindet. Demnach müssen beide Integrale gleich Null sein. Das Verschwinden des ersten Integrals zieht $c_l' = d_l' = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$ nach sich, wie eine Berechnung dieses Integrals zeigt. Das zweite Integral ist deshalb genau dann gleich Null, wenn auch $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \left| \left[\sum\limits_{n,m=1}^{M} e'_{nm} \sin(n\xi) \sin(m\eta) \right]_\zeta \right|^2 d\xi\, d\eta$ verschwindet. Dieser Sachverhalt ergibt sich nach Anwendung der Transformation $\zeta = \xi + i\eta = w(z)$. Insgesamt erhält man so einen Widerspruch zur obigen Annahme.

Diese so ermittelte Funktion $\bar{h}$ besitzt noch eine zweite Extremaleigenschaft. Formt man nämlich die linke Seite von (3) für $h(z) = \operatorname{Re}[f(z) - z] = \{\operatorname{Re}[f(z) - z] - h^*(z)\} + h^*(z)$ um, so folgt

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathbb{C}} |\{\operatorname{Re}[f(z) - z]\}_z|^2\, dx\, dy - \iint\limits_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)] |\{\operatorname{Re}[f(z)]\}_z|^2\, dx\, dy \\
&= \iint\limits_{\mathbb{C}} |\{\operatorname{Re}[f(z) - z] - h^*(z)\}_z|^2\, dx\, dy \\
&\quad - \iint\limits_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, |\{\operatorname{Re}[f(z) - z] - h^*(z)\}_z|^2\, dx\, dy \\
&\quad - \iint\limits_{\mathbb{C}} |h_z^*(z)|^2\, dx\, dy - \iint\limits_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, |h_z^*(z) + 2^{-1}|^2\, dx\, dy \\
&\quad + 2 \operatorname{Re} \left\langle \iint\limits_{\mathbb{C}} \{\operatorname{Re}[f(z) - z]\}_z\, \overline{h_z^*(z)}\, dx\, dy \right\rangle \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \left\langle \iint\limits_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, \{\operatorname{Re}[f(z)]\}_z\, \overline{[h_z^*(z) + 2^{-1}]}\, dx\, dy \right\rangle. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Dabei ist h^* eine in der Vollebene stetige reellwertige Funktion mit quadratisch integrierbarer Sobolev-Ableitung. Aufgrund der Minimaleigenschaft von $\operatorname{Re}[f(z) - z]$ ergibt sich die Gleichung

$$\operatorname{Re} \left\langle \iint\limits_{\mathbb{C}} \{\operatorname{Re}[f(z) - z]\}_z\, \overline{h_z^*(z)}\, dx\, dy - \iint\limits_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, \{\operatorname{Re}[f(z)]\}_z\, \overline{h_z^*(z)}\, dx\, dy \right\rangle = 0.$$

Damit folgt aus (10), daß auch $\iint\limits_{\mathbb{C}} p_0^{-1}(z)\, |\{\operatorname{Re}[f(z) - z] - \bar{h}(z)\}_z|^2\, dx\, dy$ minimal wird. Aus dieser Eigenschaft von $\bar{h}$ folgt wegen (5) und (6) der

Satz 1: *Der Realteil der gesuchten quasikonformen Abbildung f aus* (1) *und* (2) *kann durch Funktionen $u_{N,M}$ mit*

$$u_{N,M}(r\, e^{i\varphi}) = \begin{cases} r \cos\varphi + \sum\limits_{l=1}^{N} r^{-l} [c_l \sin(l\varphi) + d_l \cos(l\varphi)] & \text{für } |z| = r > R, \\[2ex] r \cos\varphi + \sum\limits_{l=1}^{N} (r/R^2)^l\, [c_l \sin(l\varphi) + d_l \cos(l\varphi)] & \\ \quad + \sum\limits_{n,m=1}^{M} e_{nm} \sin\{n \operatorname{Re}[w(z)]\} \sin\{m \operatorname{Im}[w(z)]\} & \text{für } |z| = r \leq R \end{cases} \qquad (11)$$

approximiert werden, wobei

$$\lim_{N,M \to \infty} \iint\limits_{\mathbb{C}} |\{\operatorname{Re}[f(z)] - u_{N,M}(z)\}_z|^2\, dx\, dy = 0 \qquad (12)$$

gilt. Die Funktionen $u_{N,M}$ *werden für jedes* $N, M \in \mathbb{N}$ *durch*

$$\iint_{\mathbb{C}} |[u_{N,M}(z)]_z - 2^{-1}|^2\, dx\, dy - \iint_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, |[u_{N,M}(z)]_z|^2\, dx\, dy = \mathrm{Min} \tag{13}$$

eindeutig bestimmt. Des weiteren gilt für den Koeffizienten α_1 *aus* (1)

$$\mathrm{Re}\, \alpha_1 \geqq -\frac{2}{\pi}\left\{\iint_{\mathbb{C}} |[u_{N,M}(z)]_z - 2^{-1}|^2\, dx\, dy - \iint_{\mathbb{C}} [1 - p_0^{-1}(z)]\, |[u_{N,M}(z)]_z|^2\, dx\, dy\right\}. \tag{14}$$

Mit Hilfe der Variationscharakterisierung für den Imaginärteil von f aus [12] (siehe auch [8: Zweiter Teil, Kap. IV, § 1]) folgt analog der

Satz 2: *Der Imaginärteil der gesuchten Abbildung* f *aus* (1) *und* (2) *kann durch Funktionen* $v_{N,M}$ *mit*

$$v_{N,M}(r\, e^{i\varphi}) = \begin{cases} r \sin \varphi + \sum\limits_{l=1}^{N} r^{-l}[c_l^* \sin(l\varphi) + d_l^* \cos(l\varphi)] & \text{für } |z| = r > R, \\ r \sin \varphi + \sum\limits_{l=1}^{N} (r/R^2)^l\, [c_l^* \sin(l\varphi) + d_l^* \cos(l\varphi)] & \\ \quad + \sum\limits_{n,m=1}^{M} e_{nm}^* \sin\{n\, \mathrm{Re}\,[w(z)]\} \sin\{m\, \mathrm{Im}\,[w(z)]\} & \text{für } |z| = r \leqq R \end{cases} \tag{15}$$

approximiert werden, wobei

$$\lim_{N,M \to \infty} \iint_{\mathbb{C}} |\{\mathrm{Im}\,[f(z)] - v_{N,M}(z)\}_z|^2\, dx\, dy = 0 \tag{16}$$

gilt. Die Funktionen $v_{N,M}$ *werden für jedes* $N, M \in \mathbb{N}$ *durch*

$$\iint_{\mathbb{C}} |[v_{N,M}(z)]_z + 2^{-1}\, i|^2\, dx\, dy - \iint_{\mathbb{C}} [1 - p_0(z)]\, |v_{N,M}(z)]_z|^2\, dx\, dy = \mathrm{Min} \tag{17}$$

eindeutig bestimmt. Des weiteren gilt für den Koeffizienten α_1 *aus* (1)

$$\mathrm{Re}\, \alpha_1 \leqq \frac{2}{\pi}\left\{\iint_{\mathbb{C}} |[v_{N,M}(z)]_z + 2^{-1}\, i|^2\, dx\, dy - \iint_{\mathbb{C}} [1 - p_0(z)]\, |[v_{N,M}(z)]_z|^2\, dx\, dy\right\}. \tag{18}$$

Bemerkung: Satz 1 läßt sich — im Unterschied zu Satz 2 — auch dann noch anwenden, wenn f eine quasikonforme Abbildung eines von endlich vielen analytischen Jordan-Kurven berandeten Gebietes $\mathfrak{G}_0$ ($\infty \in \mathfrak{G}_0$) ist, wobei der Imaginärteil von f auf jeder dieser Jordan-Kurven konstant sein möge. In $\mathfrak{G}_0$ sei (2) erfüllt, und außerdem sei in einer Umgebung von ∞ auch (1) gültig. In Satz 1 stehen dann in (12) und (13) nur noch Integrale über $\mathfrak{G}_0$ anstatt über $\mathbb{C}$. In (14) ist außerdem α_1 durch $\alpha_1 - a_1$ zu ersetzen, wobei a_1 der Koeffizient bei z^{-1} in der Laurent-Entwicklung bei ∞ der konformen Horizontalschlitzabbildung (mit der Entwicklung (1)) von $\mathfrak{G}_0$ ist (siehe dazu wieder [12] und [8: Zweiter Teil, Kap. IV, § 1]).

3. Ein Spezialfall

Es sei $\mathfrak{G}_0$ wiederum ein von endlich vielen analytischen Jordan-Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_{k'}$ berandetes Gebiet mit $\infty \in \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_0$ mit $\infty \in \mathfrak{G}$ ein Teilgebiet von $\mathfrak{G}_0$. Der Rand von $\mathfrak{G}$ möge aus endlich vielen rektifizierbaren und quasikonformen Jordankurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_k$ $(k > k')$ bestehen; d. h., $\mathfrak{G}$ entsteht aus $\mathfrak{G}_0$ durch das „Ausstanzen weiterer Löcher", wobei die Randkomponenten von $\mathfrak{G}_0$ nicht „beschädigt" werden (der Begriff der quasikonformen Jordan-Kurve wird beispielsweise in [1, 15] erklärt). Für die Funktion p_0 gelte hier

$$p_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \in \mathfrak{G}, \\ (1 + q_j)/(1 - q_j) & \text{für } z \text{ innerhalb von } \mathfrak{C}_j \quad (k' + 1 \leqq j \leqq k), \end{cases} \tag{19}$$

wobei die Zahlen $q_j \in (0, 1)$ vorgegeben werden. f sei eine quasikonforme Abbildung von $\mathfrak{G}_0$, die auf den Randkomponenten von $\mathfrak{G}_0$ konstanten Imaginärteil besitzt und für die (1) und (2) gültig ist. Für

$$r(z) = f(z) - z \tag{20}$$

ergibt sich dann (siehe [5: Abschnitt 2] oder [7: Abschnitt 2]) für $z \in \mathfrak{G}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} r(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} q_j \int_{\mathfrak{C}_j} \frac{\overline{r(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta - b(z) \qquad \text{mit} \\ b(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} q_j \int_{\mathfrak{C}_j} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta, \end{aligned} \tag{20}$$

wobei $q_j = 1$ für $j = 1, 2, \ldots, k'$ gesetzt wird. Führt man noch den Operator A durch

$$A[X(z)] = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} q_j \int_{\mathfrak{C}_j} \overline{X(\zeta)}/(\zeta - z)\, d\zeta \tag{22}$$

für $z \in \mathfrak{G}$ ein, so ist die Charakterisierung

$$\iint_{\mathfrak{G}} |\{(I - A)[h(z)] - b(z)\}'|^2\, dx\, dy = \text{Min}, \tag{23}$$

für r naheliegend, wobei I den identischen Operator bezeichnet. Zur Begründung sind noch verschiedene Überlegungen notwendig. Die Funktion h in (23) soll aus dem Hilbert-Raum

$$H(\mathfrak{G}) = \left\{ h: h \text{ in } \mathfrak{G} \text{ analytisch}, h(\infty) = 0 \text{ und } \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy < \infty \right\}$$

sein; in ihm wird das Skalarprodukt $\langle h_1, h_2 \rangle = \iint_{\mathfrak{G}} h_1'(z)\, \overline{h_2'(z)}\, dx\, dy$ $(h_1, h_2 \in H(\mathfrak{G}))$ und die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erzeugte Norm $\|\cdot\|$ eingeführt ($H(\mathfrak{G})$ wird in [3: Kap. V, § 5] und [13: Kap. IV, § 2] untersucht). Für den Operator A ergibt sich (siehe [5: Abschnitt 4]) die Abschätzung

$$\iint_{\mathfrak{G}} |\{A[h(z)]\}'|^2\, dx\, dy \leqq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy \tag{24}$$

für alle $h \in H(\mathfrak{G})$. Dabei bezeichnet $\lambda > 1$ den kleinsten nichttrivialen Fredholmschen Eigenwert des $\mathfrak{G}$ berandenden Kurvensystems. Insbesondere ergibt sich für jede Funktion $h \in H(\mathfrak{G})$, die auf dem Rand von $\mathfrak{G}$ noch stetig ist, die Abschätzung

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \leqq \iint_{\mathfrak{G}^C} [|h_z(z)|^2 + |h_{\bar{z}}(z)|^2] \, dx \, dy \Big/ \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2 \, dx \, dy \leqq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \tag{25}$$

wobei h nach $\mathfrak{G}^C$ (Komplement von $\mathfrak{G}$) durch Lösung des Dirichlet-Problems für $h_{z\bar{z}}(z) = 0$ (harmonisch) fortgesetzt wird ((25) kann nach [15] auch als Definition von λ verwendet werden). Dabei ist $\lambda > 1$ genau dann, wenn die Kurven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_k$ sämtlich quasikonform sind.

Für den Beweis, daß (23) in $H(\mathfrak{G})$ nur die Funktion $r(z) = f(z) - z$ als Lösung besitzt, benötigt man das

Lemma 2: *Für alle Funktionen $h \in H(\mathfrak{G})$ gilt*

$$\|(I - A) h\| \geqq \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}} \|h\|. \tag{26}$$

Beweis: Es genügt, (26) für auf dem Rand von $\mathfrak{G}$ analytische Funktionen h aus $H(\mathfrak{G})$ zu zeigen. Diese Teilmenge von $H(\mathfrak{G})$ ist in $H(\mathfrak{G})$ bezüglich $\|\cdot\|$ überall dicht (siehe beispielsweise [3: S. 244], [4: Kap. I, § 3, Satz 1] und [13: Satz IV 6]). Setzt man für $z \in \mathfrak{G}$ nun $g(z) = (I - A)[h(z)]$, so gilt bei geeigneter Fortsetzung h^* von h nach $\mathfrak{G}^C$

$$h(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{k} q_j \iint_{\mathfrak{B}_j} \overline{h_\zeta^*(\zeta)}/(\zeta - z) \, d\xi \, d\eta = g(z) \text{ für } z \in \mathfrak{G}, \tag{27}$$

wobei $\mathfrak{B}_j$ das Innere von $\mathfrak{C}_j$ und $\zeta = \xi + i\eta$ ist; h^* kann so gewählt werden, daß h_z^* in all den Punkten von $\mathfrak{G}^C$ stetig ist, die hinreichend nahe am Rand von $\mathfrak{G}$ liegen. Wegen (27) läßt sich g dann noch auf den Rand von $\mathfrak{G}$ stetig fortsetzen (siehe [14: 0. Kap., Satz 4.3]), und es existiert eine in $\mathfrak{G}^C$ stetige und im Inneren von $\mathfrak{G}^C$ analytische Funktion Φ mit

$$h(z) - q_j \overline{h(z)} - g(z) = \Phi(z) \text{ für } z \in \mathfrak{C}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{28}$$

Setzt man h und g durch Lösung des Dirichlet-Problems für $h_{z\bar{z}} = g_{z\bar{z}} = 0$ (harmonisch) nach $\mathfrak{G}^C$ fort, so gilt (28) auch innerhalb der $\mathfrak{C}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Aus (28) folgt dann für $z \in \mathfrak{B}_j$

$$h_{\bar{z}}(z) = q_j \overline{h_z(z)} + g_{\bar{z}}(z) \text{ für } z \in \mathfrak{B}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{29}$$

Des weiteren gilt für die Funktion h die Beziehung

$$-\iint_{\mathfrak{G}^C} [|h_z(z)|^2 - |h_{\bar{z}}(z)|^2] \, dx \, dy = \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2 \, dx \, dy \tag{30}$$

(s. [14: 0. Kap. (4.14)] und beachte die für alle $z \in \mathbb{C}$ gültige Darstellung $h_z(z) = -\pi^{-1} \times \iint_{\mathfrak{G}^C} h_{\bar{\zeta}}(\zeta)/(\zeta - z)^2 \, d\xi \, d\eta$). Mittels (29) ergibt sich nun wegen $0 < q_j \leqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ für $z \in \mathfrak{G}^C$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |h_z(z)|^2 - |h_{\bar{z}}(z)|^2 &= [|h_z(z)| + |h_{\bar{z}}(z)|] [|h_z(z)| - |h_{\bar{z}}(z)|] \\ &\geqq -[|h_z(z)| + |h_{\bar{z}}(z)|] \, |g_{\bar{z}}(z)| \\ &\geqq -\{2[|h_z(z)|^2 + |h_{\bar{z}}(z)|^2] [|g_z(z)|^2 + |g_{\bar{z}}(z)|^2]\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit folgt wegen (30) die Abschätzung

$$\left[\iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\,dx\,dy\right]^2 \leqq 2 \iint_{\mathfrak{G}^c} [|h_z(z)|^2 + |h_{\bar z}(z)|^2]\,dx\,dy \iint_{\mathfrak{G}^c} [|g_z(z)|^2 + |g_{\bar z}(z)|^2]\,dx\,dy.$$

Wendet man (25) für h und g an, so folgt die Behauptung ∎

Damit ist auch bewiesen, daß r die einzige Funktion aus $H(\mathfrak{G})$ ist, für die das Integral in (23) minimal ausfällt. Es sei nun $\{\psi_\nu\}_{\nu\geq 1} \subset H(\mathfrak{G})$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N und komplexe Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_N$ existieren mit

$$\left\| r - \sum_{\nu=1}^{N} b_\nu \psi_\nu \right\| < \varepsilon \tag{31}$$

(in [7: Abschnitt 3] sind solche Funktionensysteme $\{\psi_\nu\}$ angegeben worden). Dann kann man Ritz-Näherungen r_N ($N = 1, 2, \ldots$) für r durch

$$\|(I - A)\, r_N - b\| = \text{Min} \quad \text{mit } r_N = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu^{(N)} \psi_\nu \quad (a_\nu \in \mathbb{C}) \tag{32}$$

gewinnen. (31) führt dann auf ein lineares Gleichungssystem in $\operatorname{Re} a_\nu^{(N)}$ und $\operatorname{Im} a_\nu^{(N)}$, das wegen (26) eindeutig lösbar ist. Zusammenfassend ergibt sich wie in [7] der

Satz 3: *Das Funktionensystem $\{\psi_\nu\}_{\nu\geq 1}$ möge die Eigenschaft (31) haben. Dann läßt sich die gesuchte quasikonforme Abbildung f von $\mathfrak{G}_0$ durch eine Folge $\{f_N\}_{N\geq 1}$ approximieren, wobei $\|f_N - f\| \to 0$ für $N \to \infty$ gilt. Dabei wird*

$$f_N(z) = z + \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu^{(N)} \psi_\nu(z) \tag{33}$$

durch $\left\| (I - A) \left(\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu^{(N)} \psi_\nu \right) - b \right\| = \text{Min}$ *eindeutig für jedes $N \in \mathbb{N}$ festgelegt. Des weiteren gilt*

$$M \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}}\right)^{-1} \leqq \|f_N - f\| \leqq M \sqrt{2}\, \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \tag{34}$$

mit $M = \left\| b - \sum_{\nu=1}^{N} [a_\nu^{(N)} \psi_\nu - \overline{a_\nu^{(N)}} A(\psi_\nu)] \right\|$.

Bemerkung: In [7] ist der Fall eines zur reellen Achse symmetrischen Gebietes $\mathfrak{G}$ behandelt worden. Dort läßt sich f_N durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit nur halb so großer Dimension wie das sich aus Satz 3 der vorliegenden Arbeit ergebende Gleichungssystem bestimmen. Der in [7] zugrunde liegende Fall des Gebietes $\mathfrak{G}$ kann auch analog zu den Überlegungen in [3: Kap. V, § 5.1], [5, 6, 11], [13: Kap. VII] durch Einführung des reellen Skalarprodukts

$$\langle h_1, h_2 \rangle_3 = \iint_{\mathfrak{G}} \{(I - A)\,[h_1(z)]\}' \,\overline{\{(I - A)\,[h_2(z)]\}'}\,dx\,dy \tag{35}$$

abgehandelt werden (siehe auch [7: Abschnitt 4/Bem. 2]). Im nächsten Abschnitt wird sich einer damit verbundenen Fragestellung zugewandt.

4. Reihenentwicklungen und Darstellung durch einen Kern für f

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Reihenentwicklung für f betrachtet. In [5] sind solche Entwicklungen bereits betrachtet worden. Dort wurde allerdings der

Operator A^2 verwendet. Für gewisse symmetrische Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_0$ und der Funktion p_0 aus (19) genügt es jedoch, nur den Operator A zu benutzen.

Es sei $\mathfrak{G}$ zur reellen Achse symmetrisch, d. h., aus $z \in \mathfrak{G}$ folge auch $\bar{z} \in \mathfrak{G}$. In Verallgemeinerung von [7] ist hier nicht jede Randkomponente von $\mathfrak{G}$ für sich zur reellen Achse symmetrisch. Dafür gelte noch

$$p_0(z) = p_0(\bar{z}) \tag{36}$$

für alle $z \in \mathfrak{G}_0$, wobei $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}$ sonst wie im vorigen Abschnitt erklärt sind und $\mathfrak{G}_0$ außerdem auch zur reellen Achse symmetrisch sein soll. Man betrachtet dann den Hilbertraum $H_s(\mathfrak{G}) = \{h: h \in H(\mathfrak{G}), \overline{h(\bar{z})} = h(z)$ für alle $z \in \mathfrak{G}\}$ mit dem Skalarprodukt (35) über dem Körper der reellen Zahlen. In $H_s(\mathfrak{G})$ existiert auch ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_\nu\}_{\nu \geq 1}$ mit der Eigenschaft, daß jede Funktion $h \in H_s(\mathfrak{G})$ durch reelle Linearkombinationen der φ_ν bezüglich der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ erzeugten Norm approximiert werden kann (siehe auch [6: Abschnitt 3.5]).

Satz 4: *Für die Funktion r aus* (21) *ergibt sich im Fall der oben beschriebenen symmetrischen Gebiete $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_0$ und der Funktion p_0 aus* (19) *und* (36)

$$r = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\langle \iint_{\mathfrak{G}} b'(z) \,\overline{\{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\}'}\, dx\, dy \right\rangle \varphi_\nu \tag{37}$$

und

$$r(\zeta) = \iint_{\mathfrak{G}} b'(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{\{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\}'}\, \varphi_\nu(\zeta)\, dx\, dy \tag{38}$$

für alle $\zeta \in \mathfrak{G}$, wobei $\{\varphi_\nu\}_{\nu \geq 1}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $H_s(\mathfrak{G})$ bezüglich des reellen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ aus (35) *ist und der Kern $\sum \{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\} \overline{\varphi_\nu(\zeta)}$ für jedes $\zeta \in \mathfrak{G}$ eine Funktion (in z) aus $H(\mathfrak{G})$ darstellt.*

Beweis: Die Gültigkeit von (37) folgt sofort aus der Identität $r = \sum \langle r, \varphi_\nu \rangle_3 \varphi_\nu$, da (21) die Beziehung

$$\langle r, \varphi_\nu \rangle_3 = \iint_{\mathfrak{G}} \{(I - A) [r(z)]\}' \,\overline{\{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\}'}\, dx\, dy = \iint_{\mathfrak{G}} b'(z) \,\overline{\{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\}'}\, dx\, dy$$

nach sich zieht. Für den Beweis von (38) benötigt man den Satz von Riesz über die Darstellung von linearen stetigen Funktionalen in einem Hilbert-Raum (siehe beispielsweise [13: Satz II 13]). Geht man von der Gleichung

$$(I - A)\, h = g \qquad (g, h \in H_s(\mathfrak{G})) \tag{39}$$

aus, so ist für fixiertes $\zeta \in \mathfrak{G}$ das Funktional $\operatorname{Re}[h(\zeta)]$ bezüglich $g \in H_s(\mathfrak{G})$ linear und stetig (siehe dazu auch [13: Beweise von Satz IV 1 und Satz IV 2]). Damit existiert eine Funktion $K_1 = K_1(z, \zeta)$, für die $K_1(\cdot, \zeta) \in H_s(\mathfrak{G})$ für jedes fixierte $\zeta \in \mathfrak{G}$ ist und

$$\operatorname{Re}[h(\zeta)] = \iint_{\mathfrak{G}} g'(z) \,\overline{K_1'(z, \zeta)}\, dx\, dy \tag{40}$$

gilt. Ist in (39) speziell $h = \varphi_\nu$, so folgt wegen der Orthonormiertheit und Vollständigkeit von $\{\varphi_\nu\}_{\nu \geq 1}$ aus (40) die Darstellung $K_1(z, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re}[\varphi_\nu(\zeta)] \{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\}$. Analog ergibt sich $\operatorname{Im}[h(\zeta)] = \iint_{\mathfrak{G}} g'(z) \,\overline{K_2'(z, \zeta)}\, dx\, dy$ für alle $h, g \in H_s(\mathfrak{G})$, die (39) erfüllen, und $K_2(z, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Im}[\varphi_\nu(\zeta)] \{(I - A) [\varphi_\nu(z)]\}$. Zusammenfassend erhält man damit (38), wenn in (39) nun $h = r$ gesetzt wird ∎

Bemerkungen: 1. Die Darstellung von r mit Hilfe eines Kerns weist eine enge Verbindung zur Theorie der Bergmanschen Kernfunktion auf. Solche Darstellungen von konformen oder quasikonformen Normalabbildungen sind in [2, 3, 5, 6, 11, 13] gegeben worden. 2. Auch für die Abbildung f aus Abschnitt 2 ist zumindest eine Reihenentwicklung möglich. Orthonormiert man die in (11) benutzten Ansatzfunktionen bezüglich der Bilinearform $\mathrm{Re} \iint\limits_{\mathbb{C}} h_{1z}(z)\, \overline{h_{2z}(z)} / p_0(z)\, dx\, dy$, so ergibt sich aus (13) für jedes $\zeta \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$\mathrm{Re}\,[f(\zeta) - \zeta] = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \iint\limits_{\mathbb{C}} \left[1 - \frac{1}{p_0(z)} \right] \mathrm{Re}\,[\varkappa_{\nu z}(z)]\, dx\, dy \right\} \varkappa_\nu(\zeta),$$

wobei das Funktionensystem $\{\varkappa_\nu\}_{\nu \geq 1}$ durch die oben beschriebene Orthonormierung erhalten wird. Eine analoge Formel ergibt sich auch für den Imaginärteil von f. Die Frage, ob eine Darstellung mit Hilfe eines Kerns wie in (38) möglich ist, soll hier nicht beantwortet werden.

LITERATUR

[1] Ahlfors, L. V.: Remarks on the Neumann-Poincaré integral equation. Pacific J. Math. 2 (1952), 271–280.

[2] Bergman, S.: The kernel function and conformal mapping (2nd ed.). Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1970.

[3] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1964.

[4] Gaier, D.: Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Basel—Boston—Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1980.

[5] Hoy, E.: Orthonormalreihenentwicklungen für gewisse quasikonforme Normalabbildungen. Z. Anal. Anw. 3 (1984), 503–521.

[6] Hoy, E.: Orthonormalreihen für quasikonform fortsetzbare konforme Abbildungen. Dissertation. Halle: Martin-Luther-Universität 1984.

[7] Hoy, E.: Charakterisierung und Berechnung von quasikonformen Abbildungen mittels Ritz-Verfahren. Math. Nachr. 141 (1989), 203–216.

[8] Kruschkal, S. L., und R. Kühnau: Quasikonforme Abbildungen — neue Methoden und Anwendungen (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 54). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1983. In russ. Sprache: Nowosibirsk: Verlag „Nauka“ 1984.

[9] Kühnau, R.: Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien. J. reine u. angew. Math. 231 (1968), 101–113.

[10] Kühnau, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. Math. Nachr. 40 (1969), 1–11.

[11] Kühnau, R.: Eine Kernfunktion zur Konstruktion gewisser quasikonformer Normalabbildungen. Math. Nachr. 95 (1980), 229–235.

[12] Kühnau, R.: Funktionalabschätzungen bei quasikonformen Abbildungen mit Fredholmschen Eigenwerten. Comm. Math. Helv. 56 (1981), 297–306.

[13] Meschkowski, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1962.

[14] Renelt, H.: Quasikonforme Abbildungen und elliptische Systeme erster Ordnung in der Ebene (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 46). Leipzig: B. G. Teubner-Verlagsges. 1982.

[15] Springer, G.: Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping. Acta Math. 111 (1964), 121–142.

Manuskripteingang: 2. 12. 1987

VERFASSER:

Dr. Erich Hoy
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle