Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (5) 1989, S. 473–477

Über die Halbierung der Ordnung bei reziproken Polynomen und Anwendungen

S. Filippi und F. Schöne

Es wird ein Satz über die Halbierung der Ordnung bei reziproken Polynomen hergeleitet und dessen Anwendung in der Praxis aufgezeigt.

Доказывается одна теорема о делении пополам степени полинома с обратными нулями и указывается её применения.

A theorem for halving the order of reciprocal polynomials is derived and numerical applications are given.

1. Einleitung. Man nennt ein Polynom *reziprok*, wenn mit jeder Nullstelle z_0 auch deren Reziprokwert $1/z_0$ eine Nullstelle des Polynoms ist. Da reziproke Polynome ungeraden Grades stets die Nullstelle -1 besitzen, entsteht durch Division dieses reziproken Polynoms durch $z + 1$ ein reziprokes Polynom geraden Grades (siehe [3: S. 120]). Man kann sich daher auf die Behandlung von reziproken Polynomen geraden Grades beschränken. Vor dem Computer-Einsatz in der Numerischen Mathematik hat man die Wurzeln von reziproken Polynomen bis 8. Grades einschließlich exakt berechnet. Durch den Computer-Einsatz wurden diese Methoden leider vernachlässigt, obwohl sie wegen der Halbierung der Ordnung des Polynomgrades große Vorteile bieten. In der Praxis führt zum Beispiel die Untersuchung der Dahlquist-Stabilität von verallgemeinerten Mehrschrittverfahren mit variabler Schrittweite zur numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf reziproke Polynome hohen Grades (siehe [4]). Diese Polynome haben ganzzahlige Koeffizienten, so daß man deren Funktionswerte mit Hilfe des Horner-Schemas ohne Rundungsfehler berechnen kann. Im dritten Abschnitt dieser Arbeit werden wir näher auf die Vorteile der oben genannten Methode bei der numerischen Berechnung aller Nullstellen eines reziproken Polynoms eingehen.

2. Das Resultat. Wir werden hier die entsprechende Aussage formulieren und beweisen.

Satz 1: *Das reelle Polynom 2n-ten Grades*

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x^k + x^{2n-k}) + a_n x^n \tag{1}$$

mit $a_0 \neq 0$ *und* $P_{2n}(\pm 1) \neq 0$ *ist reziprok und*

$$Q_{2n}(z) = (1 - z)^{2n} P_{2n}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \tag{2}$$

mit den Koeffizienten c_k $(k = 1, \ldots, 2n)$ *ist ein Polynom* Q_n *n-ten Grades in* z^2. *Man erhält alle Nullstellen* $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ *von* (1) *aus den Nullstellen* $z_1, \ldots, z_{2n}$ *von* (2) *durch* $\xi_l = (1 + z_l)/(1 - z_l)$ $(l = 1, \ldots, 2n)$.

Beweis: Mit der Voraussetzung $a_0 \neq 0$ ist 0 keine Nullstelle von (1). Für $x \neq 0$ gilt

$$P_{2n}(1/x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x^{-k} + x^{-2n+k}) + a_n x^{-n} = x^{-2n} P_{2n}(x).$$

Daraus folgt, daß mit jeder Nullstelle $\xi = \varrho\, e^{i\varphi}$ von (1) gleichzeitig $1/\xi = (1/\varrho)\, e^{-i\varphi}$ mit $\xi := 1/\xi$ Nullstelle, das Polynom P_{2n} also reziprok ist. Wir betrachten nun die konforme Abbildung $x \to z = (x - 1)/(x + 1)$ und setzen $z_l = (\xi_l - 1)/(\xi_l + 1)$ $(l = 1, \ldots, 2n)$. Offensichtlich ist dann $Q_{2n}(z_l) = (1 - z_l)^{2n} P_{2n}(\xi_l) = 0$. Schließlich gehen bei dieser konformen Abbildung die Nullstellen $1/\xi_l$ in die Nullstellen $(1/\xi_l - 1)/(1/\xi_l + 1) = -z_l$ über. Daraus folgt die Darstellung

$$Q_{2n}(z) = c_{2n} \prod_{l=1}^{n} (z - z_l)(z + z_l) = c_{2n} \prod_{l=0}^{n} (z^2 - z_l^2) = Q_n(z^2) \;\blacksquare$$

Bemerkung: Es ist $P_{2n}(x)/x^n = a_0(x^n + 1/x^n) + a_1(x^{n-1} + 1/x^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x + 1/x) + a_n$. Die Klammerausdrücke $(x^k + 1/x^k)$ hierin lassen sich durch Ausmultiplikation der Potenz $(x + 1/x)^k$ und die Substitution $x + 1/x = t$ in Polynome k-ten Grades in t überführen: $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$, $x^3 + 1/x^3 = t^3 - 3t$, $x^4 + 1/x^4 = t^4 - 4t^2 + 2, \ldots$ Auf diese Weise erhält man aus $P_{2n}(x)$ ebenfalls ein Polynom n-ten Grades, jedoch in $t = x + 1/x$. Dies war der bisherige Standardweg bei der Ermittlung aller Nullstellen reziproker Polynome (siehe [3]).

Satz 2: *Ist* $P_{2n}(x)$ *entsprechend* (1) *ein reziprokes Polynom, so ist auch* $P_{2n+2}(x) = (x - \gamma)(x - 1/\gamma)\, P_{2n}(x)$ *mit* $\gamma \neq 0$ *ein reziprokes Polynom.*

Beweis: Sei $\delta = -(\gamma + 1/\gamma)$. Dann gilt

$$P_{2n+2}(x) = (x^2 + \delta x + 1)\, P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x^k + x^{2n+2-k}) + b_{n+1} x^{n+1}$$

mit $b_0 = a_0$, $b_1 = \delta a_0 + a_1$, $b_k = a_{k-2} + \delta a_{k-1} + a_k$ $(k = 2, \ldots, n)$ und $b_{n+1} = 2a_{n-1} + \delta a_n$. Dies ist also ein Polynom der Gestalt (1), so daß seine Bezeichnung mit $P_{2n+2}(x)$ gerechtfertigt und es reziprok ist $\blacksquare$

Bemerkung: Dividiert man das reziproke Polynom $P_{2n+2}(x)$ mit Hilfe des doppelzeiligen Horner-Schemas (siehe [1]) durch $x^2 + \delta x + 1$, so erhält man das reziproke Polynom $P_{2n}(x)$. Damit gilt allgemein, daß man bei der schrittweisen Deflation eines reziproken Polynoms vom Grade $2n$ mit Hilfe des doppelzeiligen Horner-Schemas, wie es zum Beispiel das Verfahren von Bairstow (siehe [1]) erfordert, stets reziproke Polynome erhält. Ist $x_0 \in \{-1, 1\}$ eine Nullstelle eines reziproken Polynoms vom Grade $2n$, so ist diese nach Definition eines reziproken Polynoms stets eine Doppelwurzel. Diese eventuell vorhandenen Doppelwurzeln kann man daher von vornherein mit Hilfe des doppelzeiligen Horner-Schemas abspalten, weil ja $P_{2n}(x)$ in Satz 1 nach Voraussetzung ± 1 nicht als Nullstellen besitzen darf. Das nach dieser Deflation erhaltene Restpolynom ist daher stets wieder ein reziprokes Polynom.

3. Anwendungen. Gegeben sei das reziproke Polynom $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, $a_{2n-k} = a_k$ für $k = 0(1)\, n$. Dann erhält man das gesuchte Polynom $Q_n(z^2) = Q_{2n}(z)$ aus Satz 1 (siehe (2)) mit Hilfe der Formel

$$Q_n(z^2) = \sum_{l=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-l} \sum_{j=0}^{l} (-1)^k a_l \binom{l}{j} \binom{2n-l}{k} z^{j+k}, \tag{3}$$

denn nach (2) ist

$$\begin{aligned} Q_n(z^2) &= P_{2n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)(1-z)^{2n} \\ &= \sum_{l=0}^{2n} a_l \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^l (1-z)^{2n} = \sum_{l=0}^{2n} a_l (1+z)^l (1-z)^{2n-l} \\ &= \sum_{l=0}^{2n} a_l \left\{\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} z^j\right\} \left\{\sum_{k=0}^{2n-l} \binom{2n-l}{k} (-1)^k z^k\right\} \\ &= \sum_{l=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n-l} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \binom{2n-l}{k} (-1)^k z^{j+k} a_l . \end{aligned}$$

Reziproke Polynome ergeben sich, wie bereits in der Einleitung erwähnt, direkt zum Beispiel bei der Untersuchung der Stabilität von Mehrschritt-Verfahren bei Anfangswertaufgaben von gewöhnlichen Differentialgleichungen (siehe [4]). In [3: S. 121–122] wird gezeigt, wie sich durch einfache Transformationen auch gewisse, nicht reziproke Polynome auf reziproke Polynome zurückführen lassen. Um für numerische Testzwecke beliebig viele reziproke Polynome zu konstruieren, gehen wir folgendermaßen vor: Wir geben zunächst n beliebige Nullstellen vor und ergänzen diese n Nullstellen gemäß Satz 1 auf $2n$ Nullstellen: Bei Vorgabe einer reellen oder komplexen Nullstelle wird ihr Kehrwert als zusätzliche Nullstelle ergänzt. Da unser Programm reziproke Polynome mit reellen Koeffizienten berechnen soll, muß man bei Vorgabe einer komplexen Nullstelle noch die dazu konjugiert-komplexe Nullstelle und deren Kehrwert hinzunehmen. Ist zum Beispiel γ_l und $1/\gamma_l$ eine Nullstelle, so erhält man damit das reziproke Polynom $x^2 - (\gamma_l + 1/\gamma_l)\,x + 1$. Nach Satz 2 folgt, daß die Multiplikation dieser Polynome 2. Grades für alle n vorgegebenen γ_l, $l = 1(1)\,n$, ebenfalls ein reziprokes Polynom liefert.

Auf diese Weise haben wir mit Hilfe eines FORTRAN-Programms eine Reihe von reziproken Polynomen konstruiert. Aus Platzgründen seien hier nur einige reziproke Polynome niedrigen Grades mit (teilweise) den zugehörigen Nullstellen angegeben:

1. $P_4(x) = 10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10$ mit den Nullstellen $x_1 = 5$, $x_2 = 1/5$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1/2$.
2. $P_4(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ mit den Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 1$. Achtung: Hier bekommt man alle Nullstellen von $P_4(x)$ direkt aus dem doppelzeiligen Horner-Schema.
3. $P_8(x)$ mit $a_0 = a_8 = 1$, $a_1 = a_7 = -6$, $a_2 = a_6 = 18$, $a_3 = a_5 = -33$, $a_4 = 40{,}25$ mit folgenden komplexen Nullstellen: $x_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$, $x_{3,4} = 1 \pm \mathrm{i}$, $x_{5,6} = 1/2 \pm (1/2)\,\mathrm{i}$, $x_{7,8} = 1/2 \pm (1/2)\,\mathrm{i}$
4. $P_{12}(x)$ mit $a_0 = a_{12} = 1$, $a_1 = a_{11} = 4$, $a_2 = a_{10} = -5$, $a_3 = a_9 = 23$, $a_4 = a_8 = 12$, $a_5 = a_7 = -9$ und $a_6 = 4$. Dieses Polynom hat zwei reelle und fünf konjugiert-komplexe Nullstellenpaare.

Zur Vorgehensweise in der Praxis: Zuerst muß man, wie oben erwähnt, bei einem gegebenen reziproken Polynom $2n$-ten Grades eventuell vorhandene Doppelwurzeln ± 1 mit Hilfe des doppelzeiligen Horner-Schemas abspalten. Dann berechnet man mit (3) das gesuchte Polynom $Q_n(z^2)$. Anschließend berechnet man mit Hilfe eines beliebigen Verfahrens zur Berechnung aller Nullstellen eines reellen Polynoms, z. B. des Bairstow-Verfahrens, alle Nullstellen $z_1^2, \ldots, z_n^2$ von $Q_n(z^2)$. Die gesuchten Nullstellen ξ_l von $P_{2n}(x)$ erhält man dann aus $\xi_l = (1 + z_l)/(1 - z_l)$ und $1/\xi_l$ $(l = 1, \ldots, n)$. Da die Koeffizienten von $Q_n(z^2)$ bereits bei Polynomen vom Grade 30 sehr groß werden können, muß man in solchen Fällen bei hohen Genauigkeitsforderungen eventuell eine MP-Software (= multiple precision) verwenden. Wir haben alle Rechnungen auf der Rechenanlage CYBER 180-860 des Hochschulrechenzentrums der Justus-Liebig-Universität Gießen durchgeführt. Um gute Startwerte für das gewählte Iterationsverfahren zur Berechnung aller Nullstellen von $Q_n(z^2)$ zu erhalten, kann man die verschiedenen Einschließungssätze für allgemeine Polynome auf den Spezialfall der reziproken Polynome anwenden (Näheres siehe [1, 2]).

Wir haben u. a. zur Berechnung aller Nullstellen von $Q_n(z^2)$ das klassische Bairstow-Verfahren verwendet. Dabei haben wir die Nullstellen von $Q_n(z^2)$ bis zum Grad 3 einschließlich exakt berechnet. Damit werden reziproke Polynome bis zum Grad 6 einschließlich exakt gelöst. Man hätte auch noch $Q_4(z^2)$ exakt lösen können, hier ist man aber mit einem Iterationsverfahren im allgemeinen wesentlich schneller am Ziel. Die Koeffizienten von $Q_n(z^2)$ in aufsteigender Reihenfolge zu den Beispielen 1, 3 und 4 lauten folgendermaßen:

1. $-144, 340, -36$. 3. $1/4, 3, 21\ 1/2, 75, 156\ 1/4$.

4. $56, 872, 480, 3280, 504, -1080, -16$.

Zum Vergleich geben wir auch die Koeffizienten von $P_n(x + 1/x)$ zu diesen Beispielen in aufsteigender Reihenfolge an:

1. $-130, -27, 10$. 3. $25/4, -15, 14, -6, 1$.

4. $-32, -58, 41, 3, -11, 4, 1$.

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Programms kann man selbstverständlich das Polynom $Q_n(z^2)$ auch direkt aus (2) berechnen. Wir haben dies zum Beispiel zum Vergleich auch mit Hilfe des Software-Pakets „muMath" von Microsoft gemacht. Dieser Weg ist jedoch umständlicher und zeitaufwendiger als der Weg über (3). Daher geben wir hier ein FORTRAN-Unterprogramm zu (3) an:

```
      SUBROUTINE KOEFF (A, N, B)
      DIMENSION A(0:20), B(0:40)
      DOUBLE PRECISION A, B, BINO
      DO 210 I = 0, N
      B(I) = 0.DO
  210 CONTINUE
      DO 280 I = 0, N
      DO 270 K = 0, N - I
      DO 260 J = 0, I
      BINO = 1.DO
      DO 220 L = N - I - K + 1, N - I
      BINO = BINO* L
  220 CONTINUE
      DO 230 L = 2, K
      BINO = BINO/L
  230 CONTINUE
      DO 240 L = I - J + 1, I
      BINO = BINO* L
  240 CONTINUE
      DO 250 L = 2, J
      BINO = BINO/L
  250 CONTINUE
      B(K + J) = B(K + J) + (-1)**
     * K*BINO*A(I)
  260 CONTINUE
  270 CONTINUE
  280 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Erwähnen möchten wir noch, daß das Programm muMath die Nullstellen von Beispiel 1 exakt in Form von zwei Bildschirmseiten liefert. Verwendet man den manchmal nützlichen Vereinfachungsbefehl „trgexpd" mit dem Parameter „-7", so erhält man für die gesuchten Nullstellen einen noch längeren Ausdruck. Zum einfachen Polynom $x^4 - x^3 + 1 = 0$ und selbst zum Polynom $x^3 - x^2 + 1 = 0$ antwortet muMath: „Ich kann es nicht". Es ist eben nicht alles Gold, was glänzt. Ohne Zweifel ist die Computer-Algebra in vielen Fällen sehr hilfreich. Für allgemeine Polynome fünften und höheren Grades ist nach dem Satz von Abel sowieso jedes Computer-Algebra-Programm „gestorben". Berechnet man dagegen mit einem sogenannten „general purpose"-Programm für Polynome, zum Beispiel mit dem Programm „Eureka — The Solver" von Borland, die Nullstellen von $x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ mit den exakten Nullstellen $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = -1$, so erhält man zum Teil nur auf zwei Dezimalstellen genaue Nullstellen und sogar Nullstellen mit Imaginärteilen von $1 \cdot 10^{-7}$.

Berechnet man zum Beispiel alle Nullstellen zum Beispiel 3 direkt über $P_8(x)$ mit Hilfe des Bairstow-Verfahrens und einmal mit Hilfe von $Q_n(z^2)$, so liefert das Bairstow-Verfahren in 3,7 s um 2 bis 3 Dezimalstellen ungenauere Nullstellen als das Bairstow-Verfahren für $Q_n(z^2)$ in 0,05 s. Wir haben noch viele andere reziproke Polynome auf diese Weise gelöst. Dabei zeigten sich sowohl bez. der erreichten Genauigkeit, der Rechenzeit und der Anzahl der jeweils gefundenen Nullstellen von (1) die erwarteten Vorteile des Weges über $Q_n(z^2)$. Insgesamt liefert die Halbierung des Polynomgrades bei reziproken Polynomen des Grades $2n < 100$, deren Nullstellen mit entsprechend hoher Genauigkeitsforderung gesucht sind, wesentliche Vorteile gegenüber der direkten Berechnung aller Nullstellen von (1). Diese Arbeit bestätigt wieder einmal mehr, daß es sich lohnt, für spezielle mathematische Aufgaben eigene Verfahren zu entwickeln, die oft im Prinzip schon lange vor dem Computer-Einsatz mit Erfolg angewandt wurden.

LITERATUR

[1] Filippi, S.: Ein verallgemeinertes Bairstow-Verfahren zur gleichzeitigen Ermittlung aller Nullstellen eines Polynoms. Beitr. Num. Math. **4** (1975), 83–93.

[2] Filippi, S., und U. Schepers: Über neue Abschätzungen aller Nullstellen eines Polynoms. Ang. Informatik (früher: elektr. datenverarb.) **10** (1968), 171–178.

[3] Heitzinger, W., Troch, I., und G. Valentin: Praxis nichtlinearer Gleichungen. München–Wien: Carl-Hanser-Verlag 1985.

[4] Schöne, F.: Verallgemeinerte Mehrschrittverfahren mit variabler Schrittweite. Dissertation Universität Gießen 1982. Mitt. a. d. Math. Sem. Gießen, Heft **152** (1982), 1–127.

Manuskripteingang: 13. 01. 1988; in revidierter Fassung 02. 06. 1988

VERFASSER:

Prof. Dr. Siegfried Filippi
Lehrstuhl für Numerische und Instrumentelle Mathematik
der Justus-Liebig-Universität
Heinrich-Buff-Ring 44
D-6300 Gießen

Dr. F. Schöne
DEGUSSA AG
D-6450 Hanau 1