Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (6) 1989, S. 501–514

Об асимптотике плотностей гармонических потенциалов вблизи вершины конуса

А. В. Левин и В. Г. Мазья

Посвящается С. Г. Михлину к восьмидесятилетию со дня его рождения

Es werden Randintegralgleichungen der Potentialmethode für die Laplacesche Differentialgleichung in einem Gebiet mit einem konischen Punkt betrachtet. Für die Dichte des Potentials einer Doppelbelegung (Einfachbelegung) im Falle des Dirichletschen (Neumannschen) Problems wird die Asymptotik in einer Umgebung des konischen Punktes hergeleitet, und die entsprechenden Koeffizienten werden berechnet. Im Falle eines Kreiskegels werden die Summanden der Asymptotik und die Abhängigkeit des Potenzexponenten ihres Hauptgliedes vom Öffnungswinkel des Konus angegeben.

Рассматриваются граничные интегральные уравнения метода потенциалов для уравнения Лапласа в трехмерной области с конической точкой. Для плотности потенциала двойного (простого) слоя в случае задачи Дирихле (Неймана) получена асимптотика вблизи конической точки и вычислены соответствующие коэффициенты. В случае кругового конуса слагаемые асимптотики выписаны в явном виде, получена зависимость показателя степени главного члена асимптотики от угла раствора конуса.

Boundary integral equations of the method of potentials for the Laplace differential equation in a domain containing a conic point are considered. For the density of a double-layer (single-layer) potential in the case of Dirichlet's (Neumann's) problem, the asymptotic expansion in a neighbourhood of the conic point is derived and the corresponding coefficients are calculated. In the case of a circular cone, the summands of the asymptotic expansion and the dependence of the power exponent of its principal term on the apex angle of the cone are given.

Введение

Одним из наиболее употребительных методов численного решения краевых задач математической физики является метод граничных интегральных уравнений. При его реализации в областях с угловыми или коническими точками оказывается полезной информация об асимптотическом поведении решений граничных интегральных уравнений вблизи таких точек. В статье [2] на примере задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в двумерной области была изложена общая схема нахождения асимптотики решения граничных интегральных уравнений вблизи угловой точки. В настоящей работе эта схема распространяется на случай трехмерной области. Получены следующие результаты:

Решение μ интегрального уравнения задачи Дирихле во внутренности ограниченной области имеет вблизи конической точки асимптотику

$$\mu(x) = \mathrm{const} + a\varrho^{\lambda}\varkappa|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j} \sum_{p=1}^{J_j} b_j{}^p \chi_j{}^p|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + o(\varrho).$$

Решение ν интегрального уравнения задачи Неймана во внешности той же области имеет вблизи конической точки асимптотику

$$\nu(x) = c\varrho^{\lambda-1}(\partial\psi/\partial N)|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j-1} \sum_{p=1}^{J_j} d_j{}^p(\partial\tau_j{}^p/\partial N)|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + o(1).$$

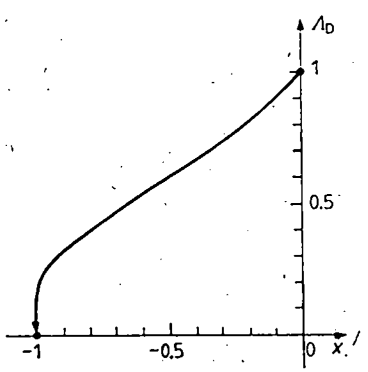
Здесь λ — собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами в области, вырезаемой на единичной сфере соответствующим конусом, подчиненное неравенству $\lambda \leqq 1$; σ_j — удовлетворяющие тому же неравенству собственные числа задачи Неймана в дополнительной области; ψ и $\chi_j{}^p$ — соответствующие собственные функции; $\varkappa$ и $\tau_j{}^p$ — решения некоторых краевых задач для оператора Бельтрами, в правые части граничных условий которых входят функции ψ и $\chi_j{}^p$ (см. § 3); слагаемые $a\varrho^\lambda\varkappa$ и $c\varrho^{\lambda-1}(\partial\psi/\partial N)$ могут отсутствовать в случае, оговоренном в теореме 4.1; коэффициенты a, $b_j{}^p$, c, $d_j{}^p$ зависят от правых частей граничных условий исходных задач Дирихле и Неймана, а также от формы области, и могут быть определены по формулам, приведенным в § 5.

Кроме того, подробно анализируется случай области, имеющей в окрестности конической точки форму кругового конуса с раствором 2ω. Получены формулы

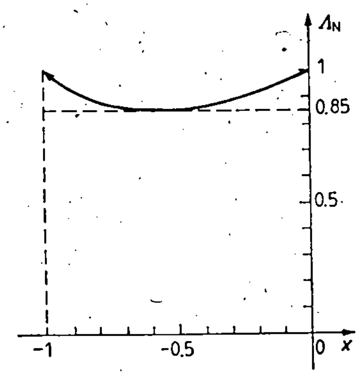
$$\mu(x) = \begin{cases} \text{const} + \varrho^\sigma(B_1{}^1\cos\varphi + B_1{}^2\sin\varphi) + o(\varrho), & 0 < \omega < \pi/2; \\ \text{const} + A\varrho^\lambda + o(\varrho), & \pi/2 < \omega < \pi; \end{cases}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} \varrho^{\sigma-1}(D_1{}^1\cos\varphi + D_1{}^2\sin\varphi) + o(1), & 0 < \omega < \pi/2; \\ C\varrho^{\lambda-1} + o(1), & \pi/2 < \omega < \pi. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = \Lambda_{\mathrm{D}}(\cos\omega)$, $\sigma = \Lambda_{\mathrm{N}}(-\cos\omega)$, Λ_{D} и Λ_{N} — функции, введенные определениями 6.1 и 6. 2, A, $B_1{}^1$, $B_1{}^2$, C, $D_1{}^1$, $D_1{}^2$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам теоремы 6.1. Графики функций Λ_{D} и Λ_{N}, полученные с помощью расчетов на ЭВМ, приведены на фиг. 1 и 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

Тем самым показано, что при любом значении угла раствора кругового конуса решение интегрального уравнения внутренней задачи Дирихле, вообще говоря, является негладким, а решение интегрального уравнения внешней задачи Неймана имеет особенность вблизи конической точки. Следует отметить, что при переходе от решений граничных интегральных уравнений к решениям краевых задач эти нерегулярности сохраняются при значениях угла раствора $\pi/2 < \omega < \pi$, но пропадают при $\omega < \pi/2$. Этот эффект объясняется тем, что в последнем случае в главные члены асимптотик решений граничных интегральных уравнений входят тригонометрические функции, исчезающие при интегрировании по направляющей конуса.

§ 1. Постановка задачи и обозначения

Пусть G^i — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с конечным числом конических точек, гладкой вне окрестности этих точек границей ∂G и внешностью $G^e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G^i}$. Поместим в одну из конических точек O полюс системы сферических координат ϱ, θ, φ. Будем предполагать, что в некоторой окрестности точки O область G^i совпадает с конусом $K^i = \mathbb{R}^+ \times \Omega^i$, где Ω^i — область на единичной сфере S^2 с гладкой границей $\partial\Omega$ и непустой внешностью $\Omega^e = S^2 \setminus \Omega^i$. Обозначим через $K^e = \Omega^e \times \mathbb{R}^+$ внешность конуса K^i, а через $\partial K = \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ — его границу. В настоящей работе рассматриваются следующие краевые задачи:

внутренняя задача Дирихле

$$\Delta u^i = 0 \quad \text{в} \quad G^i, \qquad u^i = f \quad \text{на} \quad \partial G \tag{1.1}$$

и *внешняя задача Неймана*

$$\Delta v^e = 0 \quad \text{в} \quad G^e, \qquad \partial v^e/\partial n = g \quad \text{на} \quad \partial G,$$

где n — внешняя нормаль к G^i, f и g — заданные на $\partial G \setminus O$ непрерывные функции, относительно которых предполагается, что в окрестности точки O функция f совпадает с сужением на ∂G некоторой функции класса C^2, а функция g совдает с нормальной производной на ∂G некоторой функции h класса C^1 в той же окрестности и, кроме того, удовлетворяет условию $\int_{\partial G} g dS = 0$. В соответствии с методом граничных интегральных уравнений решения u^i и v^e краевых задач (1.1) и (1.2) представляются в виде потенциалов соответственно двойного и простого слоя с плотностями μ и ν. Последние являются решениями следующих интегральных уравнений на ∂G:

$$-\mu(x)/2 + \int_{\partial G} \mu(y)\,(\partial/\partial n_y)\,\mathscr{E}(x, y)\,dS_y = f(x), \tag{1.3}$$

$$-\nu(x)/2 + \int_{\partial G} \nu(y)\,(\partial/\partial n_x)\,\mathscr{E}(x, y)\,dS_y = g(x), \tag{1.4}$$

где $\mathscr{E}(x, y) = (4\pi\,|x - y|)^{-1}$. Целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения функций μ и ν вблизи точки O. Для решений граничных интегральных уравнений, связанных с внешней задачей Дирихле и внутренней задачей Неймана, исследование проводится аналогично.

§ 2. Связь плотности потенциала с решением вспомогательной краевой задачи

В настоящей работе, как и в статье [2], для получения информации об асимптотике решений граничных интегральных уравнений используется следующий прием: с помощью формул Грина и свойств потенциалов решение интегрального уравнения выражается через сужение на границу области решения некоторой вспомогательной краевой задачи, что позволяет применить известные результаты об асимптотике вблизи конической точки решений краевых задач (см. работу [3]).

Лемма 2.1: *Функции плотности потенциала μ и ν могут быть представлены в виде*

$$\mu = v|_{\partial G} - f \tag{2.1}$$

и

$$v = (\partial u/\partial n)|_{\partial G}, \tag{2.2}$$

где u и v — решения краевых задач

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad G^e, \quad \partial v/\partial n = \partial u^i/\partial n \quad \text{на} \quad \partial G, \tag{2.3}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad G^i, \quad u = v^e \quad \text{на} \quad \partial G. \tag{2.4}$$

Доказательство: Докажем формулу (2.1). Применяя формулу Грина, получаем равенства

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u^i(y)}{\partial n} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y = \int_{\partial G} u^i(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n}\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in G^e,$$

$$\int_{\partial G} \frac{\partial v(y)}{\partial n} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y = \int_{\partial G} v(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n}\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in G^i.$$

Перейдя в этих равенствах к пределу при $x \to \partial G$, получаем

$$\int_{\partial G} \frac{\partial u^i(y)}{\partial n} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y = \frac{u^i(x)}{2} + \int_{\partial G} u^i(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n_y}\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in \partial G \setminus O,$$

$$\int_{\partial G} \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y = -\frac{v(x)}{2} + \int_{\partial G} v(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n_y}\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in \partial G \setminus O.$$

Отсюда, используя краевые условия задач (1.1) и (2.3), получим равенство

$$-\frac{v(x) - f(x)}{2} + \int_{\partial G} \big(v(y) - f(y)\big) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n_y}\, dS_y = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial G \setminus O,$$

которое означает, что функция $(v - f)|_{\partial G}$ удовлетворяет граничному интегральному уравнению (1.3). Но его единственным решением является μ, и формула (2.1) доказана.

Перейдем к доказательству формулы (2.2). Подставляя в формулы Грина краевые условия задач (1.2) и (2.4), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\int_{\partial G} g(y) \mathscr{E}(x, y)\, dS_y &= \int_{\partial G} \frac{\partial v^e(y)}{\partial n} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y = \int_{\partial G} v^e(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n}\, dS_y \\ &= \int_{\partial G} u(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n}\, dS_y = -u(x) + \int_{\partial G} \frac{\partial u(y)}{\partial n} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y.\end{aligned}$$

Дифференцируя первое и последнее выражения в этой цепочке по n_x и переходя к пределу при $x \to \partial G$, получим

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial G} g(y) \mathscr{E}(x, y)\, dS_y = -\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} + \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial G} \frac{\partial u(y)}{\partial n} \mathscr{E}(x, y)\, dS_y$$

и, при $x \in \partial G \setminus O$,

$$\frac{g(x)}{2} + \int_{\partial G} g(y) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n_x} dS_y$$

$$= \frac{\partial u(x)}{\partial n} + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big/ 2 + \int_{\partial G} \frac{\partial u(y)}{\partial n} \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n_x} dS_y\right)$$

$$- \left(\frac{\partial u(x)}{\partial n} - g(x)\right) \Big/ 2 + \int_{\partial G} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial n} - g(y)\right) \frac{\partial \mathscr{E}(x, y)}{\partial n_x} dS_y = g(x).$$

Последнее равенство означает, что функция $(\partial u/\partial n - g)|_{\partial G}$ удовлетворяет граничному интегральному уравнению (1.4). Поскольку единственным его решением является ν, то формула (2.2) доказана ∎

§ 3. Задача на собственные значения для оператора Бельтрами

В соответствии с известной (см. [3]) методикой асимптотика решения краевой задачи вблизи конической точки трехмерной области выписывается в терминах собственных функций оператора Бельтрами. Задачи на собственные значения этого оператора возникают при попытке найти однородное по координате ϱ решение уравнения Лапласа. В самом деле, при подстановке $u = \varrho^\lambda \psi(\theta, \varphi)$ уравнение $\Delta u = 0$ переходит в уравнение $\delta\psi + \lambda(\lambda + 1)\psi = 0$, где $\delta = (\sin\theta)^{-1} \times \left((\partial/\partial\theta)(\sin\theta \cdot \partial/\partial\theta) + (\partial/\partial\varphi)\left((\sin\theta)^{-1} \cdot \partial/\partial\varphi\right)\right)$ — оператор Бельтрами. В настоящем параграфе вводятся собственные функции ψ, χ_j^p оператора Бельтрами и решения τ_j^p, $\varkappa$ некоторых связанных с ними краевых задач, которые впоследствии будут использованы для построения асимптотик. Пусть $(,)_\mathrm{i}$ и $(,)_\mathrm{e}$ — скалярные произведения в $L_2(\Omega^\mathrm{i})$ и $L_2(\Omega^\mathrm{e})$ соответственно.

Замечание 3.1: Оператор Бельтрами является симметричным в пространствах $L_2(\Omega)^\mathrm{i}$ и $L_2(\Omega^\mathrm{e})$. Для него имеют место формулы Грина:

$$(\delta\psi_1, \psi_2)_\mathrm{i} - (\psi_1, \delta\psi_2)_\mathrm{i} = \int_{\partial\Omega} \left((\partial\psi_1/\partial N)\,\psi_2 - \psi_1(\partial\psi_2/\partial N)\right) dl,$$

$$(\delta\chi_1, \chi_2)_\mathrm{e} - (\chi_1, \delta\chi_2)_\mathrm{e} = -\int_{\partial\Omega} \left((\partial\chi_1/\partial N)\,\chi_2 - \chi_1(\partial\chi_2/\partial N)\right) dl,$$

где N — внешняя нормаль к границе области Ω^i на единичной сфере.

Рассмотрим задачу Дирихле в Ω^i:

$$\delta\psi + \lambda(\lambda + 1)\,\psi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\mathrm{i}, \quad \psi = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.1}$$

Пусть λ — собственное число этой задачи из промежутка $[0, 1]$ (в нем имеется не более одного собственного числа, причем оно может быть лишь однократным, см. ниже лемму 3.3). Пусть ψ — соответствующая собственная функция, нормированная в $L_2(\Omega^\mathrm{i})$.

Рассмотрим задачу Неймана в Ω^e:

$$\delta\chi + \sigma(\sigma + 1)\,\chi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\mathrm{e}, \quad \partial\chi/\partial N = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Пусть σ_j $(j = 0, \ldots, M)$ — упорядоченные по возрастанию различные собственные числа этой задачи из промежутка $[0, 1]$. Пусть $\{\chi_j^p\}_{j=0,\ldots,M;\,p=1,\ldots,J_j}$ — ортонормированный в $L_2(\Omega^\mathrm{e})$ базис подпространства собственных функций этой задачи, принадлежащих σ_j.

Замечание 3.2: Всегда имеется собственное число $\sigma_0 = 0$ кратности $J_0 = 1$, которому соответствует собственная функция $\chi_0^1 = (\mathrm{mes}\,\Omega^e)^{-1}$.

Рассмотрим, кроме того, следующие краевые задачи:

$$\delta\tau + \sigma_j(\sigma_j + 1)\,\tau = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^i,\ \tau = \chi_j^p \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{3.3}$$

$(j = 1, \ldots, M;\ p = 1, \ldots, J_j)$,

$$\delta\varkappa + \lambda(\lambda + 1)\,\varkappa = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^e,\ \partial\varkappa/\partial N = \partial\psi/\partial N \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1: *Справедливы следующие утверждения о разрешимости задач* (3.3), (3.4):

1. *При* $\sigma_j \neq \lambda$ *краевая задача* (3.3) *однозначно разрешима.*
2. *При* $\sigma_j = \lambda$ *краевая задача* (3.3) *разрешима с точностью до слагаемого* $C\psi$, *где* C *— произвольная константа.*
3. *Если* $\lambda \neq \sigma_j$ $(j = 1, \ldots, M)$, *то задача* (3.4) *однозначно разрешима.*
4. *Если* $\lambda = \sigma_j$ *при некотором* j, *то задача* (3.4) *разрешима с точностью до линейной комбинации* $\chi_j^p, p = 1, \ldots, J_j$.

Доказательство: Утверждения 1—3 тривиальны. Для доказательства утверждения 4 достаточно проверить условия ортогональности

$$\int_{\partial\Omega} (\partial\psi/\partial N)\,\chi_j^p dl = 0, \quad p = 1, \ldots, J_j.$$

Согласно утверждению 2, задача (3.3) имеет некоторое решение τ_j^p. Используя определения функций ψ и χ_j^p, а также формулы Грина из замечания 3.1, получаем цепочку равенств

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial N}\,\chi_j^p dl = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial N}\,\tau_j^p dl = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\,\tau_j^p - 0\,\frac{\partial\tau_j^p}{\partial N}\right) dl$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi}{\partial N}\,\tau_j^p - \psi\,\frac{\partial\tau_j^p}{\partial N}\right) dl = (\delta\psi, \tau_j^p)_i - (\psi, \delta\tau_j^p)_i$$

$$= -\lambda(\lambda + 1)\,(\psi, \tau_j^p)_i + \sigma_j(\sigma_j + 1)\,(\psi, \tau_j^p)_i.$$

Заключительное выражение в цепочке равно нулю, поскольку рассматривается случай совпадения чисел λ и σ_j ∎

Пусть теперь τ_j^p $(j = 1, \ldots, M;\ p = 1, \ldots, J_j)$ и $\varkappa$ — решения задач (3.3) и (3.4) соответственно, выбираемые следующим образом:

(i) если $\sigma_j \neq \lambda$, то τ_j^p — единственное решение задачи (3.3);

(ii) если $\sigma_j = \lambda$, то τ_j^p — решение задачи (3.3), ортогональное функции ψ в пространстве $L_2(\Omega^i)$;

(iii) если $\lambda \neq \sigma_j$ $(j = 1, \ldots, M)$, то $\varkappa$ — единственное решение задачи (3.4);

(iv) если $\lambda = \sigma_j$ при некотором j, то $\varkappa$ — решение задачи (3.4), ортогоальное в пространстве $L_2(\Omega^e)$ всем χ_j^p $(p = 1, \ldots, J_j)$.

Лемма 3.2: *При всех* $j = 1, \ldots, M$ *и* $p = 1, \ldots, J_j$ *имеет место тождество*

$$(\tau_j^p, \psi)_i + (\chi_j^p, \varkappa)_e = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство: Возможны два случая:

1. При $\lambda = \sigma_j$ тождество (3.5) тривиально, поскольку функция τ_j^p ортогональна ψ по выбору τ_j^p, а функция $\varkappa$ ортогональна χ_j^p по выбору $\varkappa$.

2. При $\lambda \neq \sigma_j$ рассмотрим выражение $V = (\delta\tau_j^p, \psi)_i - (\tau_j^p, \delta\psi)_i + (\delta\chi_j^p, \varkappa)_e - (\chi_j^p, \delta\varkappa)_e$. Преобразуя его с помощью формул Грина из замечания (3.1) и краевых условий задач (3.1)—(3.4), получим

$$V = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\tau_j^p}{\partial N}\psi - \tau_j^p\frac{\partial\psi}{\partial N}\right) dl - \int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\chi_j^p}{\partial N}\varkappa - \chi_j^p\frac{\partial\varkappa}{\partial N}\right) dl$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\tau_j^p}{\partial N} 0 - \chi_j^p\frac{\partial\psi}{\partial N}\right) dl - \int\limits_{\partial\Omega}\left(0\varkappa - \chi_j^p\frac{\partial\psi}{\partial N}\right) dl = 0.$$

С другой стороны, можно преобразовать V следующим образом:

$$V = -\sigma_j(\sigma_j+1)(\tau_j^p,\psi)_i + \lambda(\lambda+1)(\tau_j^p,\psi)_i$$
$$- \sigma_j(\sigma_j+1)(\chi_j^p,\varkappa)_e + \lambda(\lambda+1)(\chi_j^p,\varkappa)_e$$
$$= \big(\lambda(\lambda+1) - \sigma_j(\sigma_j+1)\big)\big((\tau_j^p,\psi)_i + (\chi_j^p,\varkappa)_e\big).$$

Отбрасывая отличный от нуля при $\lambda \neq \sigma_j$ множитель $\lambda(\lambda+1) - \sigma_j(\sigma_j+1)$, получаем утверждение леммы ∎

Лемма 3.3: *Задача* (3.1) *имеет в промежутке* $[0, 1]$ *не более одного собственного числа. Оно должно быть однократным и отличным от нуля. Если найдется такая полусфера* S_+^2, *что* $\overline{S_+^2} \subset \Omega^i$, *то задача* (3.1) *имеет в промежутке* $[0, 1]$ *в точности одно собственное число, причем оно отлично от единицы. Если найдется такая полусфера* S_+^2, *что* $\overline{\Omega^i} \subset S_+^2$, *то задача* (3.1) *не имеет собственных чисел в промежутке* $[0, 1]$.

Доказательство: Оператор $-\delta$ с однородными условиями Дирихле является симметричным и положительно определенным в пространстве L_2 для любой области на единичной сфере, дополнение которой имеет положительную емкость Винера (см. [5]). Поэтому (см. [4]) последовательность взятых с учетом кратности и расположенных в порядке возрастания собственных чисел задачи с краевым условием Дирихле для оператора $-\delta$ в произвольной области на сфере строго мажорируется аналогичной последовательностью собственных чисел той же задачи для любой строго внутренней подобласти этой области. Это утверждение без изменений переносится на собственные числа задачи (3.1). Применяя его к последовательности собственных чисел оператора $-\delta$ на сфере (первое собственное число однократно и равно нулю, второе имеет кратность 3 и равно единице), а также к последовательности собственных чисел задачи Дирихле для оператора $-\delta$ на полусфере (первое собственное число равно единице), получаем утверждение леммы ∎

Замечание 3.3: В случае, когда область Ω^i или Ω^e имеет достаточно малый диаметр ε, оказывается возможным определить количество собственных чисел задач (3.1) и (3.2), а также указать их асимптотику при $\varepsilon \to 0$:

Если ε — диаметр области Ω^i, то задача (3.1) не имеет собственных чисел в промежутке $(0, 1]$, а задача (3.2) имеет в нем ровно два (с учетом кратности) собственных числа, асимптотика которых при $\varepsilon \to 0$ имеет вид $\sigma_j(\varepsilon) = 1 - \pi^{-1}\mu_j\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3 |\log\varepsilon|)$, $j = 1, 2$. Здесь μ_j — собственные числа некоторой положительно определенной матрицы, не зависящей от ε (см. [6]).

Если ε — диаметр области Ω^e, то задача (3.2) не имеет собственных чисел в промежутке $(0, 1]$, а задача (3.1) имеет в нем ровно одно собственное число, асимптотика которого при $\varepsilon \to 0$ имеет вид $\lambda(\varepsilon) = (2|\log\varepsilon|)^{-1} + O(|\log\varepsilon|^{-2})$ (см. [7]).

§ 4. Общий вид асимптотик плотностей потенциалов

Теорема 4.1: *Плотности потенциалов μ и ν имеют в окрестности конической точки асимптотики*

$$\mu(x) = \mathrm{const} + a\varrho^\lambda \varkappa|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j} \sum_{p=1}^{J_j} b_j^p \chi_j^p|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + o(\varrho), \tag{4.1}$$

$$\nu(x) = c\varrho^{\lambda-1} \frac{\partial\psi}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j-1} \sum_{p=1}^{J_j} d_j^p \frac{\partial\tau_j^p}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega}(\theta, \varphi) + o(1), \tag{4.2}$$

где числа λ, σ_j и функции $\varkappa$, χ_j^p, ψ, τ_j^p определены в § 3; a, b_j^p, c, d_j^p — некоторые коэффициенты, методика вычисления которых описана ниже (см. § 5). Если задача (3.1) не имеет собственных чисел λ в промежутке $[0, 1]$, то слагаемые $a\varrho^\lambda\varkappa|_{\partial\Omega}$ и $c\varrho^{\lambda-1}(\partial\psi/\partial N)|_{\partial\Omega}$ в формулах (4.1) и (4.2) соответственно следует отбросить.

Далее всюду в § 4 и § 5 для определенности будем считать, что такое собственное число λ существует.

Доказательство: Введем в рассмотрение функцию $u_0^1(x) = u^1(x) - f(0) - x\nabla f(0)$. Она является решением краевой задачи $\Delta u_0^1 = 0$ в G^1, $u_0^1 = f_0$ на ∂G, где $f_0(x) = f(x) - f(0) - x\nabla f(0) = o(\varrho)$ и имеет асимптотику $u_0^1(x) = a\varrho^\lambda\psi + o(\varrho)$ (см. [3]). Отсюда получается асимптотика функции u^1, имеющая вид $u^1(x) = f(0) + a\varrho^\lambda\psi + x\nabla f(0) + o(\varrho)$. Введем функцию $v_1(x) = v(x) - a\eta(\varrho)\varrho^\lambda\varkappa - x\nabla f(0)$, где v — решение задачи (2.3), а η — срезающая функция класса C^∞, равная единице в окрестности нуля, и равная нулю всюду, где G^1 не совпадает с K^1. Функция v_1 является решением краевой задачи $\Delta v_1 = F_1$ в G^e, $\partial v_1/\partial n = f_1$ на ∂G, где $F_1(x) = -a\Delta(\eta(\varrho)\varrho^\lambda\varkappa)$, $F_1(x) = 0$ в окрестности точки O, $f_1(x) = \partial u^1/\partial n - a\eta(\varrho)\varrho^{\lambda-1} \times (\partial\varkappa/\partial N)|_{\partial\Omega} - n\nabla f(0)$. Используя асимптотику u^1 и краевое условие в задаче (3.4), получаем $f_1(x) = o(1)$. Отсюда находим асимптотику (см. [5])

$$v_1(x) = \mathrm{const} + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j} \sum_{p=1}^{J_j} b_j^p \chi_j^p + o(\varrho)$$

и асимптотику

$$v(x) = \mathrm{const} + a\varrho^\lambda\varkappa + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j} \sum_{p=1}^{J_j} b_j^p \chi_j^p + x\nabla f(0) + o(\varrho).$$

Для получения выражения (4.1) остается воспользоваться формулой (2.1). Аналогично, используя асимптотики

$$v^e(x) = \mathrm{const} + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j} \sum_{p=1}^{J_j} d_j^p \chi_j^p + x\nabla h(0) + \sigma(\varrho)$$

и

$$u(x) = \mathrm{const} + c\varrho^\lambda\psi + \sum_{j=1}^{M} \varrho^{\sigma_j} \sum_{p=1}^{J_j} d_j^p \tau_j^p + x\nabla h(0) + \sigma(\varrho),$$

а также формулу (2.2), можно получить выражение (4.2) ∎

§ 5. Вычисление коэффициентов асимптотик

При вычислении коэффициентов в асимптотических формулах (4.1), (4.2) будут использованы некоторые вспомогательные гармонические функции с заданными особенностями в конической точке (см. [8]).

Рассмотрим краевые задачи

$$\Delta\zeta = 0 \quad \text{в} \quad G^i, \qquad \zeta = 0 \quad \text{на} \quad \partial G \setminus O, \tag{5.1}$$

$$\Delta\xi = 0 \quad \text{в} \quad G^e, \qquad \partial\xi/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \partial G \setminus O. \tag{5.2}$$

Лемма 5.1: *Задача* (5.1) *имеет решение* ζ *с асимптотикой* $\zeta(x) = \varrho^{-\lambda-1}\psi(\theta, \varphi) + o(1)$ *при* $\varrho \to 0$. *Задача* (5.2) *имеет решения* $\xi_j{}^p$ *с асимптотиками* $\xi_j{}^p(x) = \varrho^{-\sigma_j-1}\chi_j{}^p(\theta, \varphi) + o(1)$ *при* $\varrho \to 0$ $(j = 1, \ldots, M; p = 1, \ldots, J_j)$.

Далее, введем краевые задачи

$$\Delta Z = 0 \quad \text{в} \quad G^e, \quad \partial Z/\partial n = \partial\zeta/\partial n \quad \text{на} \quad \partial G \setminus O, \tag{5.3}$$

$$\Delta\Xi = 0 \quad \text{в} \quad G^i, \quad \Xi = \xi_j{}^p \quad \text{на} \quad \partial G \setminus O \; (j = 1, \ldots, M; \quad p = 1, \ldots, J_j). \tag{5.4}$$

Лемма 5.2: *Задача* (5.3) *имеет решение* Z *с асимптотикой* $Z(x) = \varrho^{-\lambda-1}\varkappa(\theta, \varphi) + o(1)$ *при* $\varrho \to 0$. *Задача* (5.4) *имеет решения* $\Xi_j{}^p$ *с асимптотиками* $\Xi_j{}^p(x) = \varrho^{-\sigma_j-1}\tau_j{}^p(\theta, \varphi) + o(1)$ *при* $\varrho \to 0$.

Доказательство лемм 5.1 и 5.2: Будем искать ζ в виде суммы $\eta(\varrho)\,\varrho^{-\lambda-1}\psi + \zeta_0$, где η — определенная в § 4 срезающая функция. Функция ζ_0 должна иметь асимптотику $\zeta_0 = o(1)$ и удовлетворять краевой задаче $\Delta\zeta_0 = -\Delta\big(\eta(\varrho)\,\varrho^{-\lambda-1}\psi\big)$ в G^i, $\zeta_0 = -\eta(\varrho)\,\varrho^{-\lambda-1}\psi$ на ∂G. Из (3.1) следует, что $\Delta\big(\eta(\varrho)\,\varrho^{-\lambda-1}\psi\big) = 0$ вблизи точки O и $\eta(\varrho)\,\varrho^{-\lambda-1}\psi = 0$ всюду на ∂G. Поэтому решение ζ_0 существует и удовлетворяет условию $\zeta_0 = o(1)$ (см. [3]). Существование функций Z, $\xi_j{}^p$, $\Xi_j{}^p$ устанавливается аналогично ∎

Теорема 5.1: *Для коэффициентов a и c в асимптотиках* (4.1) *и* (4.2) *имеют место формулы*

$$a = -(2\lambda + 1)^{-1} \int\limits_{\partial G} \big(f(x) - f(0) - x\,\nabla f(0)\big)\,(\partial\zeta/\partial n)\,dS, \tag{5.5}$$

$$c = -(2\lambda + 1)^{-1} \int\limits_{\partial G} \left(g(x) - \frac{\partial x}{\partial n}\,\nabla h(0)\right) Z\,dS, \tag{5.6}$$

причем при отличных от единицы значениях собственного числа λ члены $-x\,\nabla f(0)$ и $-\dfrac{\partial x}{\partial n}\,\nabla h(0)$ в этих формулах можно опустить.

Для коэффициентов $b_j{}^p$ и $d_j{}^p$ $(j = 1, \ldots, M; p = 1, \ldots, J_j)$ в асимптотиках (4.1) *и* (4.2) *соответственно имеют место формулы*

$$b_j{}^p = -(2\sigma_j + 1)^{-1} \int\limits_{\partial G} \big(f(x) - f(0) - x\,\nabla f(0)\big)\,(\partial\Xi_j{}^p/\partial n)\,dS, \tag{5.7}$$

$$d_j{}^p = -(2\sigma_j + 1)^{-1} \int\limits_{\partial G} \left(g(x) - \frac{\partial x}{\partial n}\,\nabla h(0)\right) \xi_j{}^p dS, \tag{5.8}$$

причем при отличных от единицы значениях σ_j слагаемые $-x\,\nabla f(0)$ и $-\dfrac{\partial x}{\partial n}\,\nabla h(0)$ в этих формулах можно опустить.

Доказательство: Вычислим коэффициент a. Рассмотрим область $G^i \setminus B_r$, где B_r — шар малого радиуса r с центром в точке O. Функция ζ и введенная в § 4 функция $u_0{}^i = u^i - f(0) - x\,\nabla f(0)$ являются гармоническими в этой области. Для них справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\partial(G^i \setminus B_r)} \big(u_0{}^i(\partial\zeta/\partial n) - (\partial u_0{}^i/\partial n)\,\zeta\big)\,dS = 0. \tag{5.9}$$

Разобьем границу области $G^1 \setminus B_r$ на два подмножества $\partial G \setminus B_r$ и $\partial B_r \cap G^1$. На $\partial B_r \cap G^1$ можно выписать асимптотику при $r \to 0$ обоих входящих в формулу (5.9) слагаемых:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial B_r \cap G^1} \left(u_0^1(\partial\zeta/\partial n) - (\partial u_0^1/\partial n)\,\zeta\right) dS \\
&= \int\limits_{\partial B_r \cap G^1} \left(-a\varrho^\lambda \psi \frac{\partial \varrho^{-\lambda-1}\psi}{\partial\varrho} + \frac{\partial a\varrho^\lambda\psi}{\partial\varrho}\,\varrho^{-\lambda-1}\psi\right) dS + o(1) \\
&= (2\lambda+1)\,a + o(1).
\end{aligned}$$

На участке $\partial G \setminus B_r$ можно преобразовать те же слагаемые, используя краевые условия для функций u_0^1 и ζ:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(u_0^1(\partial\zeta/\partial n) - (\partial u_0^1/\partial n)\,\zeta\right) dS \\
&= \int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(f_0 \frac{\partial\zeta}{\partial n} - \frac{\partial u_0^1}{\partial n}\,0\right) dS = \int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(f(x) - f(0) - x\,\nabla f(0)\right) \frac{\partial \zeta}{\partial n}\, dS.
\end{aligned}$$

Складывая эти интегралы и применяя формулу (5.9), получим

$$\int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(f(x) - f(0) - x\,\nabla f(0)\right)(\partial\zeta/\partial n)\, dS + (2\lambda+1)\,a + o(1) = 0.$$

Отсюда при переходе к пределу по r и получается формула (5.5) для коэффициента a. Возможность опустить в ней член $x\,\nabla f(0)$ при отличных от единицы значениях λ обосновывается повторением приведенных выше преобразований с заменой в них функции u_0^1 на функцию $u^1 - f(0)$, имеющую асимптотику $a\varrho^\lambda\psi + O(\varrho)$.

Перейдем к вычислению коэффициентов b_j^p. Введем функцию $v_0 = v(x) - x\,\nabla f(0)$, где v — обращающееся в нуль при $x \to 0$ решение задачи (2.3). Функции v_0 и ξ_j^p являются гармоническими в области $G^e \setminus B_r$, а функции u_0^1 и Ξ_j^p — в области $G^1 \setminus B_r$. Для них справедливы формулы Грина:

$$\int\limits_{\partial(G^e \setminus B_r)} \left(v_0(\partial\xi_j^p/\partial n) - (\partial v_0/\partial n)\,\xi_j^p\right) dS = 0, \tag{5.10}$$

$$\int\limits_{\partial(G^1 \setminus B_r)} \left(u_0^1(\partial\Xi_j^p/\partial n) - (\partial u_0^1/\partial n)\,\Xi_j^p\right) dS = 0. \tag{5.11}$$

Аналогично тому, как это было сделано при вычислении коэффициента a, разобьем каждую из границ областей $G^e \setminus B_r$ и $G^1 \setminus B_r$ на два подмножества: $\partial(G^e \setminus B_r) = (\partial G \setminus B_r) \cup (\partial B_r \cap G^e)$, $\partial(G^1 \setminus B_r) = (\partial G \setminus B_r) \cup (\partial B_r \cap G^1)$. На $\partial B_r \cap G^e$ и $\partial B_r \cap G^1$ можно выписать асимптотику при $r \to 0$ всех слагаемых, входящих в формулы (5.10) и (5.11):

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial B_r \cap G^e} \left(v_0 \frac{\partial \xi_j^p}{\partial n} - \frac{\partial v_0}{\partial n}\,\xi_j^p\right) dS \\
&= \int\limits_{\partial B_r \cap G^e} \left(\left(a\varrho^\lambda\varkappa + \sum_{k=1}^{M} \varrho^{\sigma_k} \sum_{q=1}^{J_k} b_k^q \chi_k^q\right) \frac{\partial(\varrho^{-\sigma_j-1}\chi_j^p)}{\partial\varrho}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(a\varrho^\lambda\varkappa + \sum_{k=1}^{M} \varrho^{\sigma_k} \sum_{q=1}^{J_k} b_k^q \chi_k^q\right) \varrho^{-\sigma_j-1}\chi_j^p\right) dS + o(1)
\end{aligned}$$

$$= -(\lambda + \sigma_j + 1)\, ar^{\lambda-\sigma_j}(\varkappa, \chi_j^p)_e$$

$$- \sum_{k=1}^{M} (\sigma_k + \sigma_j + 1)\, r^{\sigma_k - \sigma_j} \sum_{q=1}^{J_k} b_k^q (\chi_k^q, \chi_j^p)_e + o(1)$$

$$= -(\lambda + \sigma_j + 1)\, ar^{\lambda-\sigma_j}(\varkappa, \chi_j^p)_e - (2\sigma_j + 1)\, b_j^p + o(1),$$

$$\int\limits_{\partial B_r \cap G^1} \left(u_0^1 \frac{\partial \Xi_j^p}{\partial n} - \frac{\partial u_0^1}{\partial n} \Xi_j^p \right) dS$$

$$= \int\limits_{\partial B_r \cap G^1} \left(-a\varrho^\lambda \psi \frac{\partial(\varrho^{-\sigma_j-1}\tau_j^p)}{\partial \varrho} + \frac{\partial(a\varrho^\lambda \psi)}{\partial \varrho} \varrho^{-\sigma_j-1}\tau_j^p \right) dS + o(1)$$

$$= (\lambda + \sigma_j + 1)\, ar^{\lambda-\sigma_j}(\psi, \tau_j^p)_1 + o(1).$$

На $\partial G \setminus B_r$ можно преобразовать те же слагаемые, используя краевые условия для функций u_0^1, v_0, ξ_j^p, Ξ_j^p:

$$\int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(v_0 \frac{\partial \xi_j^p}{\partial n} - \frac{\partial v_0}{\partial n} \xi_j^p \right) dS = -\int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(\frac{\partial u^1}{\partial n} - n \nabla f(0) \right) \xi_j^p dS,$$

$$\int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(u_0^1 \frac{\partial \Xi_j^p}{\partial n} - \frac{\partial u_0^1}{\partial n} \Xi_j^p \right) dS$$

$$= \int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(f_0 \frac{\partial \Xi_j^p}{\partial n} - \left(\frac{\partial u^1}{\partial n} - n \nabla f(0) \right) \xi_j^p \right) dS.$$

Сложим полученные выражения и применим равенства (5.10) и (5.11). Это дает

$$-(\lambda + \sigma_j + 1)\, ar^{\lambda-\sigma_j}(\varkappa, \chi_j^p)_e - (2\sigma_j + 1)\, b_j^p$$

$$- \int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(\frac{\partial u^1}{\partial n} - n \nabla f(0) \right) \xi_j^p dS + o(1) = 0,$$

$$(\lambda + \sigma_j + 1)\, ar^{\lambda-\sigma_j}(\psi, \tau_j^p)_1$$

$$+ \int\limits_{\partial G \setminus B_r} f_0 \frac{\partial \Xi_j^p}{\partial n} dS - \int\limits_{\partial G \setminus B_r} \left(\frac{\partial u^1}{\partial n} - n \nabla f(0) \right) \xi_j^p dS + o(1) = 0.$$

После применения тождества (3.5) и перехода к пределу при $r \to 0$ отсюда получается формула (5.7). Возможность опустить в (5.7) член $x \nabla f(0)$ при отличных от единицы значениях σ_j обосновывается повторением приведенных выше преобразований с заменой в них функции u_0^1 на функцию $u^1 - f(0)$, имеющую асимптотику $a\varrho^\lambda \psi + O(\varrho)$. Формулы (5.6) и (5.8) выводятся аналогично ∎

§ 6. Построение асимптотик в частном случае кругового конуса

В случае, когда конус K^1 — круговой, то есть область Ω^1 — круг на сфере S^2, оказывается возможным непосредственно вычислить собственные числа и указать функции, входящие в выражения для асимптотик плотностей потенциалов.

Определение 6.1: Функцию Λ_D будем определять на промежутке $(-1, 0]$ следующим образом: $\lambda = \Lambda_D(x)$ тогда и только тогда, когда $P_\lambda(x) = 0$ и $\lambda \in (0, 1]$. Здесь и далее $P_\lambda{}^m$ — присоединенная функция Лежандра первого рода; при $m = 0$ будем использовать обозначение P_λ.

Лемма 6.1: *При $\lambda \in [0, 1], x \in (-1, 1)$ и целом неотрицательном m функция $P_\lambda{}^m$ может обращаться в нуль лишь при $m = 0$, $x \in (-1, 0]$. В этом случае корректно определена строго возрастающая бесконечно дифференцируемая на $(-1, 0]$ функция Λ_D такая, что $\Lambda_D((-1, 0]) = (0, 1]$, $\Lambda_D(0) = 1$, $\Lambda_D(x) \to 0$ при $x \to -1$ (график функции Λ_D изображен на фиг. 1).*

Определение 6.2: Функцию Λ_N будем определять на промежутке $(-1, 0]$ следующим образом: $\sigma = \Lambda_N(x)$ тогда и только тогда, когда $dP_\sigma{}^1(x)/dx = 0$ и $\sigma \in [0, 1]$.

Лемма 6.2: *При $\sigma \in [0, 1], x \in (-1, 1)$ и целом неотрицательном m функция $dP_\sigma{}^m(x)/dx$ может обращаться в нуль лишь при $m = 1$, $x \in (-1, 0]$. В этом случае корректно определена бесконечно дифференцируемая на $(-1, 0]$ функция Λ_N такая, что $\Lambda_N((-1, 0]) \subset [0.7, 1]$, $\Lambda_N(0) = 1$, $\Lambda_N(x) \to 1$ при $x \to -1$ (график функции Λ_N изображен на фиг. 2).*

Замечание 6.1: Как показали расчеты на ЭВМ, оценка в лемме 6.2 может быть улучшена, а именно: область значений функции Λ_N на промежутке $(-1, 0]$ содержится в отрезке $[0.85, 1]$.

Доказательства лемм 6.1 и 6.2 получаются с помощью представления функций $P_\lambda{}^m$ через гипергеометрические ряды (см. [1, 9]).

Теорема 6.1: *Если область G^1 имеет в окрестности конической точки O форму кругового конуса с углом раствора 2ω, $0 < \omega < \pi$ (т.е. $\Omega^i = \{\theta, \varphi : 0 \leq \theta < \omega\}$), то плотности потенциалов μ и ν имеют в окрестности O асимптотики*

$$\left.\begin{aligned} \mu(x) &= \text{const} + \varrho^\sigma(B_1{}^1 \cos\varphi + B_1{}^2 \sin\varphi) + o(\varrho) \\ \nu(x) &= \varrho^{\sigma-1}(D_1{}^1 \cos\varphi + D_1{}^2 \sin\varphi) + o(1) \end{aligned}\right\} \text{ в случае } \quad 0 < 2\omega < \pi;$$

$$\left.\begin{aligned} \mu(x) &= \text{const} + A\varrho^\lambda + o(\varrho) \\ \nu(x) &= C\varrho^{\lambda-1} + o(1) \end{aligned}\right\} \text{ в случае } \quad \pi < 2\omega < 2\pi.$$

Здесь использованы обозначения $\sigma = \Lambda_N(-\cos\omega)$, $\lambda = \Lambda_D(\cos\omega)$; $B_1{}^1$, $B_1{}^2$, $D_1{}^1$, $D_1{}^2$, A, C — коэффициенты, вычисляемые по следующим формулам:

$$B_1{}^1 = k_1k_2b_1{}^1, \qquad B_1{}^2 = k_1k_2b_1{}^2, \qquad D_1{}^1 = k_1k_3d_1{}^1, \qquad D_1{}^2 = k_1k_3d_1{}^2,$$

$$k_1 = \left(\pi \int_0^{\cos\omega} (P_\sigma{}^1(x))^2\, dx\right)^{-1/2}, \qquad k_2 = P_\sigma{}^1(-\cos\omega),$$

$$k_3 = -\sin\omega\, P_\sigma{}^1(-\cos\omega) \left(P_\sigma{}^1(\cos\omega)\right)^{-1} (dP_\sigma{}^1/dx)(\cos\omega),$$

$$A = k_4k_5a, \qquad C = k_4k_6c, \qquad k_4 = \left(2\pi \int_0^{\cos\omega} \left(P_\lambda(x)\right)^2 dx\right)^{-1/2},$$

$$k_5 = -\frac{dP_\lambda}{dx}(\cos\omega) \left(\frac{dP_\lambda}{dx}(-\cos\omega)\right)^{-1} P_\lambda(-\cos\omega),$$

$$k_6 = \sin\omega \frac{dP_\lambda}{dx}(\cos\omega);$$

коэффициент a вычисляется по формуле (5.5), c — *по формуле* (5.6), b_1^1 *и* b_1^2 — *по формуле* (5.7), d_1^1 *и* d_1^2 — *по формуле* (5.8).

Доказательство: Рассмотрим спектральную задачу (3.1). Будем искать собственную функцию в виде $\psi(\theta, \varphi) = \Theta(t)\,\Phi(\varphi)$, где $t = \cos\theta$, $t \in [x, 1]$, $x = \cos\omega$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Для функции Θ получится присоединенное уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d\Theta}{dt}\right) + \left(\lambda(\lambda+1) - m^2(1-t^2)^{-1}\right)\Theta = 0, \qquad t \in [x, 1], \tag{6.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\Theta(1) = 0 \quad \text{при} \quad \Phi \neq \text{const}, \\ &\Theta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq -1 \text{ и (или) } \Phi \neq \text{const}; \end{aligned} \tag{6.2}$$

для функции Φ получится уравнение

$$d^2\Phi/d\varphi^2 + m^2\Phi = 0, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{6.3}$$

с условием периодичности $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$. Здесь m^2 — некоторая константа; $\operatorname{Re} m \geqq 0$. Уравнение (6.3) с заданным условием периодичности имеет два линейно независимых решения $\Phi = \cos m\varphi$ и $\Phi = \sin m\varphi$ при целых положительных значениях m, одно решение $\Phi = \text{const}$ при $m = 0$ и не имеет решений при нецелых значениях m. Уравнение (6.1) при целых значениях m имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) не обладающее особенностью в точке $t = 1$ решение P_λ^m (см. [6]).

Рассмотрим краевые условия (6.2). Возможны 4 случая. При $x = -1$ оба краевых условия в (6.2) исчезают, но возникает дополнительное требование отсутствия у функции P_λ особенности в точке $t = -1$. Этому требованию удовлетворяют только функции $P_0(t) = 1$ и $P_1(t) = t$. При $x = -1$, $m \neq 0$ краевые условия в (6.2) сводятся к равенству $P_\lambda^m(-1) = P_\lambda^m(1) = 0$, которому удовлетворяет лишь функция $P_1^1(t) = -\sqrt{1-t^2}$. При $x \neq -1$, $m = 0$ из краевых условий остается лишь условие $P_\lambda(x) = 0$. Применяя лемму 6.1, заключаем, что задача (6.1), (6.2) имеет единственное решение $P_{\Lambda_D(x)}$ при $x \in (-1, 0]$ и не имеет решений при $x \in (0, 1)$. При $x \neq -1$, $m \neq 0$ сохраняются оба краевых условия, и из леммы 6.1 следует, что задача (6.1), (6.2) не имеет решений.

Переходя к рассмотрению системы (6.1)—(6.3), получаем следующий результат:

При $0 < \omega < \pi/2$ задача (3.1) не имеет собственных значений в промежутке $[0, 1]$. При $\pi/2 \leqq \omega < \pi$ она имеет единственное, причем однократное, собственное число $\lambda = \Lambda_D(\cos\omega)$ в промежутке $[0, 1]$, которому принадлежит собственная функция $\psi(\theta, \varphi) = k_4 P_\lambda(\cos\theta)$. При $\omega = \pi$ же она имеет в промежутке $[0, 1]$ два различных собственных числа $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, причем $\lambda = 0$ является однократным, ему принадлежит собственная функция $\psi(\theta, \varphi) = \text{const}$; $\lambda = 1$ имеет кратность 3 и ему принадлежат собственные функции $\text{const} \cdot \cos\theta$.

Замечание 6.2: Сказанное выше совместно с леммой 6.1 обосновывает использованное в доказательстве леммы 3.3 утверждение о собственных значениях задачи (3.1) на сфере и полусфере.

В случае $\pi/2 \leqq \omega < \pi$ нетрудно указать соответствующее собственной функции ψ решение $\varkappa$ задачи (3.4). Оно не зависит от φ и имеет вид

$$\varkappa(\theta) = -k_4\left((dP_\lambda/dt)(\cos\omega)\left((dP_\lambda/dt)(-\cos\omega)\right)^{-1}\right)P_\lambda(-\cos\theta).$$

Далее, перейдем к спектральной задаче (3.2). Рассуждая так же, как и при рассмотрении задачи (3.1), и используя лемму 6.2, получим следующий результат:

При $\pi/2 < \omega \leqq \pi$ задача (3.2) не имеет собственных чисел в промежутке (0, 1]. При $0 < \omega \leqq \pi/2$ она имеет в промежутке (0, 1] единственное собственное число $\sigma = \Lambda_N(-\cos\omega)$ кратности 2, которому принадлежат собственные функции $\chi_1^1(\theta, \varphi) = k_1 P_\sigma^1(-\cos\theta)\cos\varphi$ и $\chi_1^2(\theta, \varphi) = k_1 P_\sigma^1(-\cos\theta)\sin\varphi$. Соответствующие решения τ_1^1 и τ_1^2 задачи (3.3) имеют вид

$$\tau_1^1(\theta, \varphi) = k_1\big(P_\sigma^1(-\cos\omega)\,(P_\sigma^1(\cos\omega))^{-1}\big)\,P_\sigma^1(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$\tau_1^2(\theta, \varphi) = k_1\big(P_\sigma^1(-\cos\omega)\,(P_\sigma^1(\cos\omega))^{-1}\big)\,P_\sigma^1(\cos\theta)\sin\varphi.$$

Подставляя полученные результаты в общие формулы (4.1) и (4.2), получаем утверждение теоремы ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гобсон, Е. В.: Теория сферических и эллипсоидальных функций. Москва: Изд-во иностр. лит-ы 1952.

[2] Заргарян, С. С., и В. Г. Мазья: Об асимптотике решений интегральных уравнений теории потенциала в окрестности угловых точек контура. Прикл. мат. и мех. **48** (1984), 169—174.

[3] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Тр. Моск. матем. об-ва **16** (1967), 209—292.

[4] Курант, Р., и Д. Гильберт: Методы математической физики, Т. 1. Москва—Ленинград: Гостехиздат 1951.

[5] Мазья, В. Г.: Пространства С. Л. Соболева. Ленинград: Изд-во Ун-та 1985.

[6] Мазья, В. Г., и С. А. Назаров: Об особенностях решений задачи Неймана в конической точке. Сиб. мат. журнал **30** (1989), 52—53.

[7] Мазья, В. Г., Назаров, С. А., и Б. А. Пламеневский: Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями. Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем. **48** (1984), 347—371.

[8] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. Math. Nachr. **76** (1977), 29—60.

[9] Рыжик, И. М., и И. С. Градштейн: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва—Ленинград: Гостехиздат 1951.

Manuskripteingang: 05. 02. 1988

VERFASSER:

А. В. Левин и Проф. д-р Владимир Гилелевич Мазья
Лен. филиал ин-та машиноведения Акад. Наук
Лабор. мат. моделей механики
Большой пр. (В. О.) 61
СССР-199178 Ленинград