Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (6) 1989, S. 537–555

Zur Regularisierung des Systems, bestehend aus den Reynolds-Gleichungen und dem k-ε-Modell der Turbulenz

R. Kluge

Herrn Prof. Dr. S. G. Michlin zum 80. Geburtstag gewidmet

Wir untersuchen ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, bestehend aus den Reynolds-Gleichungen und dem k-ε-Modell der Turbulenz, im dreidimensionalen stationären Fall für den Wärme- und Stofftransport in inkompressiblen viskosen Flüssigkeiten. Für Regularisierungen dieses Systems wird die Existenz von schwachen Lösungen bewiesen. Dabei benutzen wir einen neuen Existenzsatz für nichtlineare Variationsungleichungen.

Исследуется система нелинейных уравнений в частных производных, состоящая из уравнений Рейнолдза и k-ε-модели турбулентности, в трёхмерном стационарном случае для транспорта тепла и массы в вязкой несжимаемой жидкости. Для регуляризации этой системы доказывается существование слабых решений. При этом используется новая теорема существования для нелинейных вариационных неравенств.

We consider a system of nonlinear partial differential equations consisting of the Reynolds equations and of the k-ε model of turbulence in the three-dimensional stationary case for the heat and mass transfer in incompressible viscous flows. For regularizations of this system we prove the existence of weak solutions. In this connection we use a new existence result for nonlinear variational inequalities.

Wir betrachten hier das System, bestehend aus den Reynolds-Gleichungen und dem k-ε-Modell der Turbulenz im dreidimensionalen stationären Fall für den Wärme- und Stofftransport in inkompressiblen viskosen Flüssigkeiten. Es handelt sich dabei um ein System von sieben nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und weiteren Relationen mit den entsprechenden Randbedingungen gemischter Art für alle Größen: für die Geschwindigkeitskomponenten, die Temperatur, den Stoff, die kinetische Energie der Turbulenz k und für die Dissipationsrate ε. Dabei stützen wir uns vor allem auf die Arbeit von Rodi [17]. Das genannte Modell besitzt Bedeutung bei Strömungen mit hoher Reynolds-Zahl.

In [7] hat Kolmogorov wahrscheinlich als erster ein vollständiges System von Gleichungen der turbulenten Bewegung angegeben. Launder und Spalding [12] untersuchten Modelle dieser Art ausführlich. Martschuk und Mitarbeiter [14, 15] behandelten Fragen der Dynamik des Ozean. Für einen Spezialfall [14] gelang ihnen die explizite Lösung des k-ε-Modells. Ohne die Gleichungen für k und ε wurden entsprechende Gleichungen für den Ozean von Kordzadse z. B. in [8, 9] mittels funktionalanalytischer Methoden auf Existenz von Lösungen untersucht. Der in [9] benutzte Existenzsatz für Gleichungen mit schwach stetigen Abbildungen ist auf unser Problem nicht anwendbar.

Bei unseren Untersuchungen des genannten Modells spielen zwei Regularisierungsmethoden eine Rolle. Zunächst werden einfache nichtlineare Diffusionsoperatoren in die partiellen Differentialgleichungen für k und ε eingeführt. Sie sind mit beliebig kleinen Zahlen e_k, $e_\varepsilon > 0$ multipliziert. Bei der numerischen Realisierung werden häufig entsprechend kleine Diffusionsoperatoren vernachlässigt. Bei Untersuchungen im unendlichdimensionalen Raum können sie jedoch von entscheidender Bedeutung sein. Wir führen hier deshalb ausreichend kleine Ausdrücke in die beiden Gleichungen für k und ε ein. Dabei benutzen wir Ergebnisse des Autors in [4]. In den übrigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen wird ähnlich vorgegangen. In allen Gleichungen sind bereits durch die Größen k und ε beeinflußte nichtlineare Diffusionsoperatoren enthalten. Sie besitzen allerdings nicht so gute Eigenschaften wie die oben genannten Diffusionsoperatoren. Desweiteren sind in den Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten, die Temperatur und den Salzgehalt noch lineare Diffusionsoperatoren aus den Navier-Stokes-Gleichungen und den ursprünglichen Gleichungen für die Temperatur und den Salzgehalt enthalten.

Für die Größen k und ε wird eine weitere Regularisierung vorgenommen. Beide werden gleichgradig von unten gegen Null durch beliebig kleine positive Zahlen abgegrenzt. Die entsprechenden Restriktionen führen bei der funktionalanalytischen Behandlung der Aufgabe für k und ε auf Variationsungleichungen mit konvexen abgeschlossenen Restriktionen, während alle übrigen Differentialgleichungen auf Operatorgleichungen hinauslaufen.

Wir beweisen mittels funktionalanalytischer Methoden die Existenz von schwachen Lösungen des genannten Systems in $\left(W_p{}^1(G)\right)^7$ $(p > 6)$. Unter anderem wird von uns ein Existenzsatz für Operatorgleichungen und Variationsungleichungen bewiesen, da keiner der bekannten Existenzsätze anwendbar zu sein scheint.

Bei den Untersuchungen beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Fall. Wir können jedoch eine Dimension n mit $1 \leqq n < p$ $(p > 6)$ zulassen. Wir wollen noch erwähnen, daß anstelle der hier benutzten Zahlen $e_1, \ldots, e_7$ im entsprechenden nichtlinearen Diffusionsoperator auch ortsabhängige Funktionen und Funktionen, die vom Betrag der entsprechenden Ableitung abhängig sind, stehen können (vgl. [4, 5]). Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die nichtlinearen Ansätze für die Diffusionsoperatoren der einzelnen Größen eigenständige Bedeutung besitzen (vgl. z. B. [10, 11] für die Navier-Stokes-Gleichungen).

Wir haben zunächst den stationären Fall untersucht, weil unser Zugang von den stationären zu den instationären Aufgaben führt. Hinzu kommt, daß Messungen in erster Linie für den stationären Fall vorhanden sind (vgl. Rodi [17]).

Die Arbeit besteht aus fünf Punkten. In Punkt 1 formulieren wir die Aufgabenstellung und führen einige analytische Hilfsmittel an. In Punkt 2 gehen wir zur funktionalanalytischen Formulierung der Aufgabe über. Punkt 3 ist vor allem dem Nachweis der Stetigkeit der erzeugten Operatoren gewidmet. In Punkt 4 wird der Gesamtoperator T der Aufgabe eingeführt und seine Koerzivität nachgewiesen. In Punkt 5 wird die Existenz einer schwachen Lösung der Aufgabe bewiesen, und zwar über endlichdimensionale Approximationen des Ausgangsproblems. Das gewonnene Resultat besitzt selbständige Bedeutung.

1. Zur Aufgabenstellung

Es sei G ein beschränktes sternförmiges Gebiet [18] mit dem Rand ∂G. Wir betrachten das folgende System partieller Differentialgleichungen für den Wärme- und Stofftransport in inkompressiblen viskosen Flüssigkeiten (vgl. [17]):

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\, \partial x_j} + g_i \frac{\varrho}{\varrho_r} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Thermische Energie-/Konzentrationsgleichung:

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_i \, \partial x_i} + S_{\varphi_l} \qquad (l = 1, 2).$$

Dabei ist u_i der Momentanwert der Geschwindigkeitskomponente in x_i-Richtung, p ist der momentane statische Druck, φ_l sind für die Temperatur und die Konzentration stehende skalare Größen, S_{φ_l} ist ein volumetrisches Quellen-/Senkenglied, ν ist die molekulare (kinematische) Viskosität, λ die molekulare Diffusivität von φ_l, ϱ_r die Bezugsdichte und g_i die Schwerebeschleunigung in der x_i-Richtung. Über gleiche Indizes in einem Ausdruck wird dabei summiert. Hinzu kommt eine Gleichung für die lokale Dichte ϱ, die ϱ zu lokalen Werten φ_1 und φ_2 in Bezug setzt:

$$\varrho = \alpha_4 \varphi_1 + \alpha_5 \varphi_2 .$$

Bei einer statistischen Betrachtungsweise werden die Momentanwerte der Geschwindigkeit u_i, des Druckes p und der skalaren Größen φ_l in Mittel- und Schwankungsgrößen zerlegt:

$$u_i = \bar{u}_i + U_i, \qquad p = \bar{P} + P, \qquad \varphi_l = \bar{\varphi}_l + \Phi_l .$$

Danach werden die Querstriche weggelassen. Wir erhalten das folgende System partieller Differentialgleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 .$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{U_i U_j} \right) + g_i \frac{\varrho}{\varrho_r} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Temperatur-/Konzentrationsgleichung:

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} - \overline{U_i \varphi_l} \right) + S_{\varphi_l} \qquad (l = 1, 2),$$

$$\varrho = \alpha_4 \Phi_1 + \alpha_5 \Phi_2 .$$

Diese Gleichungen beschreiben die räumliche und zeitliche Verteilung der mittleren Strömungsgrößen u_i, P und Φ_l. Sie sind exakt, bilden jedoch kein geschlossenes System mehr. Man setzt

$$-\overline{U_i U_j} = \nu_t \, \partial u_i / \partial x_j \quad \text{und} \quad -\overline{U_i \varphi_l} = \Gamma \, \partial \varphi_l / \partial x_i .$$

Wir schließen das System mittels des Zwei-Gleichungsmodells der Turbulenz (k-ε-Modell; vgl. z. B. [7, 17]):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \underbrace{\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2}_{P_0} + \underbrace{\beta_l g_i \frac{\nu_t}{\sigma_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}}_{G_0} - \varepsilon ,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \underline{\alpha} \frac{\varepsilon}{k} (P_0 + G_0) - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} .$$

Dabei setzen wir $\nu_t = c_\mu k^2/\varepsilon$ und $\Gamma = \nu_t/\sigma_t$. Die Größe k bezeichnet die kinetische Energie der Turbulenz und ε die Dissipationsrate. Die Zahlen $\underset{\sim}{\alpha} = (1 + c_{3\varepsilon}R_f)\, c_{1\varepsilon}$, $c_{2\varepsilon}$, σ_t, σ_k, σ_ε stellen Konstanten dar. Im weiteren benutzen wir die Bezeichnung D_j für $\partial/\partial x_j$. Wir erhalten das System

$$D_i u_i = 0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j D_j u_i = -\frac{1}{\varrho_r} D_i p + D_j(\nu D_j u_i) + D_j\left(c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} D_j u_i\right)$$
$$+ g_i \frac{\alpha_4\varphi_1 + \alpha_5\varphi_2}{\varrho_r} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + u_j D_j \varphi_l = D_j(\lambda D_j \varphi_l) + D_j\left(\frac{c_\mu}{\sigma_t}\frac{k^2}{\varepsilon} D_j \varphi_l\right) + S_{\varphi_l} \qquad (l = 1, 2),$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j D_j k = D_j\left(\frac{c_\mu}{\sigma_k}\frac{k^2}{\varepsilon} D_j k\right) + c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}(D_j u_i)^2 + \beta_l g_i \frac{c_\mu}{\sigma_t}\frac{k^2}{\varepsilon} D_i \varphi_l - \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j D_j \varepsilon = D_j\left(\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon} D_j \varepsilon\right) + \underset{\sim}{\alpha}\frac{\varepsilon}{k}(P_0 + G_0) - c_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}.$$

Im weiteren werden die Gleichungen mit entsprechenden nichtlinearen Gliedern in divergenter Form regularisiert. Die eingehenden Koeffizienten e_i, e_l, e_k und e_ε können dabei beliebig klein sein. Im stationären Fall erhalten wir so die folgenden Gleichungen:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u} = 0, \qquad \underset{\sim}{u} = [u_1, u_2, u_3], \tag{1}$$

$$-D_j(e_i\,|D_j u_i|^{p-2}\, D_j u_i) + u_j D_j u_i$$
$$= -\frac{1}{\varrho_r} D_i p + D_j(\nu D_j u_i) + D_j\left(c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} D_j u_i\right) + g_i \frac{\alpha_4\varphi_1 + \alpha_5\varphi_2}{\varrho_r}$$
$$(i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

$$-D_j(e_l\,|D_j\varphi_l|^{p-2}\, D_j\varphi_l) + u_j D_j \varphi_l$$
$$= D_j(\lambda D_j \varphi_l) + D_j\left(\frac{c_\mu}{\sigma_t}\frac{k^2}{\varepsilon} D_j \varphi_l\right) + S_{\varphi_l} \qquad (l = 1, 2), \tag{3}$$

$$-D_j(e_k\,|D_j k|^{p-2}\, D_j k) + u_j D_j k$$
$$= D_j\left(\frac{c_\mu}{\sigma_k}\frac{k^2}{\varepsilon} D_j k\right) + c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}(D_j u_i)^2 + g_i \frac{c_\mu}{\sigma_t}\beta_l \frac{k^2}{\varepsilon} D_j \varphi_l - \varepsilon, \tag{4}$$

$$-D_j(e_\varepsilon\,|D_j\varepsilon|^{p-2}\, D_j\varepsilon) + u_j D_j \varepsilon$$
$$= D_j\left(\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon} D_j \varepsilon\right) + \underset{\sim}{\alpha}\frac{\varepsilon}{k}(P_0 + G_0) - c_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{5}$$

Einige analytische Hilfsmittel. Mit $L_q(G)$ bezeichnen wir den Lebesgueschen Raum mit der Norm $\|\cdot\|_q$, mit $C^k(\overline{G})$ die Menge aller k-mal bis zum Rande ∂G von G stetig differenzierbaren Funktionen auf $\overline{G}$, mit $C(\overline{G})$ den Raum $C^0(\overline{G})$ mit der Norm $\|\cdot\|_C$, mit

$\mathring{C}_\infty(G)$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit in G kompakten Trägern und mit $W_q^1(G)$ den Sobolev-Raum $W_q^1(G) = \{v \in L_q(G) : D_i v \in L_q(G),$ $i = 1, \ldots, n\}$ mit der Norm $\|v\|_{1,q} = \left\{\int\limits_G [|v|^q + \sum\limits_{i=1}^n |D_i v|^q]\, dx\right\}^{1/q}$. Dabei bezeichnet $D_i v$ die im Sinne von Sobolev erklärte Ableitung. $W_q^1(G)$ ist die Vervollständigung von $C^1(\bar{G})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{1,q}$. Unter $\mathring{W}_q^1(G)$ verstehen wir die Vervollständigung von $\mathring{C}_\infty(G)$ in der $\|\cdot\|_{1,q}$-Norm. Wir benutzen den Sobolevschen Satz (vgl. [18]) über die kompakte Einbettung von $W_q^1(G)$ in $C(\bar{G})$:

$$\|v\|_C \leqq K_q^c \|v\|_{1,q}, \qquad v \in W_q^1(G), \tag{6}$$

mit der von $v \in W_q^1(G)$ unabhängigen Konstanten K_q^c.

Lemma: *Es sei $v \in W_q^1(G)$ und $q > n$. Dann ist v auch Element von $C(\bar{G})$ und es gilt* (6). *Dabei ist die Einbettung kompakt.*

Wir benutzen im weiteren die Formel der partiellen Integration

$$\int\limits_G D_j y_i z\, dx = \int\limits_{\partial G} y_i z \cos(\vec{n}, x_j)\, ds - \int\limits_G y_i D_j z\, dx.$$

Dabei bezeichnet $\vec{n}$ die äußere Normale an ∂G. Es seien ∂G_1 und ∂G_2 Teilränder von G mit $\partial G_1 \cap \partial G_2 = \emptyset$, $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$ und $\operatorname{mes} \partial G_1 > 0$ bezüglich des Randmaßes. Wir fordern

$$z|_{\partial G_1} = 0,$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial \vec{n}} = \sum_{j=1}^3 \left(e_i |D_j y_i|^{p-2} D_j y_i + \alpha_{0i} D_j y_i + \frac{c_\mu}{\alpha_i} \frac{k^2}{\varepsilon} D_j y_i\right) \cos(\vec{n}, x_j)|_{\partial G_2} = 0$$

mit

$$\alpha_{0i} = \begin{cases} \nu \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{cases}, \qquad \alpha_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, 2, 3) \\ \sigma_t & (i = 4, 5) \\ \sigma_k & (i = 6) \\ \sigma_\varepsilon & (i = 7) \end{cases}$$

Dann haben wir

$$-\sum_{j=1}^3 \int\limits_G \left[D_j(e_i |D_j y_i|^{p-2} D_j y_i) + \alpha_{0i} D_j D_j y_i + \frac{c_\mu}{\alpha_i} D_j \left(\frac{k^2}{\varepsilon} D_j y_i\right)\right] z\, dx$$

$$= \sum_{j=1}^3 \int\limits_G \left(e_i |D_j y_i|^{p-2} D_j y_i + \alpha_{0i} D_j y_i + \frac{c_\mu}{\alpha_i} \frac{k^2}{\varepsilon} D_j y_i\right) D_j z\, dx.$$

Die Randbedingungen. Der Rand ∂G des Gebietes G sei in vier Teilränder $\partial_i G$ $(i = 1, \ldots, 4)$ zerlegt. Dabei gelte $\partial G = \bigcup \partial_i G$, $\partial_i G \cap \partial_j G = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\operatorname{mes} \partial_2 G > 0$ bezüglich des Randmaßes. Manchmal schreiben wir auch ∂_i für $\partial_i G$. Wir nehmen die folgenden Randbedingungen als erfüllt an $(i = 1, 2, 3;\ l = 1, 2)$:

$$\partial_1 G:\quad u_i = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_l}{\partial \vec{n}} = 0, \qquad k = \bar{k}_1, \qquad \varepsilon = \bar{\varepsilon}_1, \tag{7}$$

$$\partial_2 G: \quad u_i = u_{i0}, \quad \varphi_l = \Phi_{l0}, \quad k = \bar{k}_2, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon}_2, \tag{8}$$

$$\partial_3 G: \quad u_i = e_i, \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{n}} = \bar{\varepsilon}_3, \tag{9}$$

$$\partial_4 G: \quad u_i = 0, \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{10}$$

Für $\partial_1 G$ kann man sich eine Wand denken, für $\partial_2 G$ Zufluß- und Abflußränder, für $\partial_3 G$ einen Boden und für $\partial_4 G$ eine Symmetrieebene. Wir setzen voraus, daß an $\partial_4 G$ keine Windschubspannungen wirken und daß kein Austausch von Wärme und Stoff stattfindet. Deshalb kann man eine freie Oberfläche $\partial_4 G$ in erster Näherung durch eine Symmetrieebene ersetzen. In (7)—(10) sind auch andere Randbedingungen formulierbar.

Es mögen Elemente $w_i \in W_p^1(G)$ $(i = 1, \ldots, 7)$ derart existieren, daß folgende Randbedingungen erfüllt sind $(i = 1, 2, 3;\ l = 1, 2)$:

$$\left.\begin{array}{llll} \partial_1 G: \ w_i = 0, & w_k = \bar{k}_1, & w_\varepsilon = \bar{\varepsilon}_1. & \\ \partial_2 G: \ w_i = u_{i0}, & w_l = \Phi_{l0}, & w_k = \bar{k}_2, & w_\varepsilon = \bar{\varepsilon}_2 \\ \partial_3 G: \ w_i = e_i, & & & \\ \partial_4 G: \ w_i = 0. & & & \end{array}\right\} \tag{11}$$

Außerdem gelte

$$\operatorname{div} \underline{w} = 0, \qquad \underline{w} = [w_1, w_2, w_3]. \tag{12}$$

Wir setzen $y_i = u_i - w_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $y_i = \varphi_l - w_i$ $(i = 4, 5;\ l = i - 3)$, $y_6 = k - w_k$, $y_7 = \varepsilon - w_\varepsilon$. Die Elemente y_i $(i = 1, \ldots, 7)$ genügen dann den Randbedingungen

$$\partial_1 G: \quad y_i = 0\ (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial(y_i + w_i)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (i = 4, 5), \quad y_6 = 0, \quad y_7 = 0, \tag{13}$$

$$\partial_2 G: \quad y_i = 0\ (i = 1, 2, 3), \quad y_i = 0 \quad (i = 4, 5), \quad y_6 = 0, \quad y_7 = 0, \tag{14}$$

$$\partial_3 G: \quad y_i = 0\ (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial(y_i + w_i)}{\partial \vec{n}} = 0\ (i = 4, 5), \quad \frac{\partial(y_6 + w_6)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial(y_7 + w_7)}{\partial \vec{n}} = \bar{\varepsilon}_3, \tag{15}$$

$$\partial_4 G: \quad y_i = 0\ (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial(y_i + w_i)}{\partial \vec{n}} = 0\ (i = 4, 5), \quad \frac{\partial(y_6 + w_6)}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial(y_7 + w_7)}{\partial \vec{n}} = 0. \tag{16}$$

Außerdem gilt

$$\operatorname{div} \underline{y} = 0, \qquad \underline{y} = [y_1, y_2, y_3]. \tag{17}$$

Wir führen die folgenden Unterräume von $W_p{}^1(G)$ ein:

$$Y_i = \left\{ y_i \in W_p{}^1(G) \colon \begin{array}{lll} y_i|_\partial & = 0 & (i = 1, 2, 3) \\ y_i|_{\partial_2} & = 0 & (i = 4, 5) \\ y_i|_{\partial_1 \cup \partial_2} & = 0 & (i = 6, 7) \end{array} \right\}.$$

Wir vereinheitlichen diese drei Typen zu dem Symbol $W_p(G)$.

Lemma [16]: *Es sei G Lipschitz-stetig. Dann liefert*

$$\|v\|_{0,p} = \left(\int_G \sum_{j=1}^{3} |D_j v|^p \, dx \right)^{1/p} \qquad \big(v \in W_p(G)\big) \tag{18}$$

auf $W_p(G)$ eine zu $\|\cdot\|_{1,p}$ äquivalente Norm.

Bei einigen Abschätzungen benutzen wir die Ungleichung $\|v\|_{1,p} \leqq \alpha \|v\|^0_{0,p}$ $\big(v \in W_p(G)\big)$. Die Ungleichung (6) läßt sich fortsetzen zu $\|v\|_C \leqq H_q{}^c \|v\|_{0,q}$ $\big(v \in W_q \times (G)\big)$. Wir setzen $\underline{Y} = \{\underline{y} = [y_1, y_2, y_3] \colon y_i \in Y_i \ (i = 1, 2, 3), \operatorname{div} \underline{y} = 0\}$. Weiter führen wir den Produktraum $Y = \underline{Y} \times (Y_4 \times \cdots \times Y_7)$ mit der Norm $\|y\| = (\|y_1\|^p_{0,p} + \cdots + \|y_7\|^p_{0,p})^{1/p}$ ein. Außerdem benutzen wir die zu den Y_i $(i = 4, \ldots, 7)$ adjungierten Räume $Y_i{}^*$ und die zu $\underline{Y}$ und Y adjungierten Räume $\underline{Y}^*$ und $Y^* = \underline{Y}^* \times (Y_4{}^* \times \cdots \times Y_7{}^*)$. Die Normen dieser Räume werden nicht besonders gekennzeichnet.

Nebenbedingungen für k und ε. Wir verlangen weiter für w_ε die Erfüllung der Bedingung $\inf\limits_{\bar G} w_\varepsilon \geqq \underline{\varepsilon} > 0$. Wir setzen

$$C_\varepsilon = \{y_\varepsilon \in Y_7 \colon y_\varepsilon \geqq 0 \text{ in } \bar G\}. \tag{19}$$

Ist $y_\varepsilon \geqq 0$, dann gilt $y_\varepsilon + w_\varepsilon \geqq \min w_\varepsilon \geqq \underline{\varepsilon} > 0$. Analog gehen wir bei k vor. Wir verlangen $\inf\limits_{\bar G} w_k \geqq \underline{k} > 0$ und setzen

$$C_k = \{y_k \in Y_6 \colon y_k \geqq 0 \text{ in } \bar G\}. \tag{20}$$

Im weiteren benutzen wir auch die Restriktion $C = \underline{Y} \times Y_4 \times Y_5 \times C_k \times C_\varepsilon$. C_ε, C_k und C sind nicht leer, konvex und abgeschlossen im entsprechenden Raum.

2. Die funktionalanalytische Aufgabenstellung

Es seien $y_i, z_i \in Y_i$ $(i = 1, \ldots, 7)$. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$I_i{}^{A_0}(y_i, z_i) = \sum_{j=1}^{3} \int_G D_j(y_i + w_i) \, D_j z_i \, dx \qquad (i = 1, \ldots, 5) \tag{21}$$

$$I_i{}^A(e_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^{3} \int_G e_i \, |D_j(y_i + w_i)|^{p-2} D_j(y_i + w_i) \, D_j z_i \, dx \quad (i = 1, \ldots, 7) \tag{22}$$

$$I_i{}^B(y_i, z_i) = \sum_{j=1}^{3} \int_G (y_j + w_j) \, D_j(y_i + w_i) \, z_i \, dx \qquad (i = 1, \ldots, 7) \tag{23}$$

$$I_i{}^E(y_6, y_7, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^{3} c_\mu \int_G \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} \, D_j(y_i + w_i) \, D_j z_i \, dx \quad (i = 1, \ldots, 7) \tag{24}$$

$$I_i^F(y_4, y_5, z_i) = \int_G \frac{g_i}{\varrho_r} [\alpha_4(y_4 + w_4) + \alpha_5(y_5 + w_5)]\, z_i\, dx \qquad (25)$$
$(i = 1, 2, 3)$

$$I_i^J(S_{\varphi_i}, z_i) = \int_G S_{\varphi_i} \cdot z_i\, dx \qquad (i = 4, 5) \qquad (26)$$

$$I_i^H(y_6, y_7, y_i, z_6) = \sum_{i=1}^{3} c_\mu \int_G \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} [D_j(y_i + w_i)]^2 z_6\, dx \qquad (27)$$
$(i = 1, 2, 3)$

$$I_i^{H_0}(y_6, y_i, z_7) = \underline{\alpha} c_\mu \sum_{j=1}^{3} \int_G (y_6 + w_6)\, [D_j(y_i + w_i)]^2 z_7\, dx \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (28)$$

$$I_i^J(y_6, y_7, y_i, z_6) = \sum_{j=1}^{3} \int_G \beta_i g_i \frac{c_\mu}{\sigma_t} \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} D_j(y_i + w_i)\, z_6\, dx \qquad (29)$$
$(i = 4, 5)$

$$I_i^{J_0}(y_6, y_i, z_7) = \beta_i \sum_{j=1}^{3} g_j \underline{\alpha} \frac{c_\mu}{\sigma_t} \int_G (y_6 + w_6)\, D_j(y_i + w_i)\, z_7\, dx \qquad (30)$$
$(i = 4, 5)$

$$I^K(y_7, z_6) = -\int_G (y_7 + w_7)\, z_6\, dx \qquad (31)$$

$$I^L(y_6, y_7, z_7) = -\int_G c_{2\varepsilon} \frac{(y_7 + w_7)^2}{(y_6 + w_6)} z_7\, dx \qquad (32)$$

$$I_7^R(z_7) = -\int_G \bar{\varepsilon}_3\, z_7\, ds. \qquad (33)$$

Wir multiplizieren (2)—(5) unter den Randbedingungen (13)—(16) und bei Berücksichtigung von (1) und (17) (vgl. [19] zur Zerlegung des Raumes $L_p(G)$) mit beliebigen Elementen $z \in C$, integrieren die entsprechenden Gleichungen mit den Produkten über G, führen in den in divergenter Form eingehenden Differentialausdrücken die partielle Integration durch, berücksichtigen die Nebenbedingungen C_6 und C_7 und erhalten das folgende System von Gleichungen und Ungleichungen in Variation:

$$\sum_{i=1}^{3} [I_i^A(e_i, y_i, z_i) + \nu I_i^{A_0}(y_i, z_i) + I_i^B(y_i, z_i) + I_i^E(y_6, y_7, y_i, z_i)] = \sum_{i=1}^{3} I_i^F(y_4, y_5, z_i), \qquad (34)$$

$$I_i^A(e_i, y_i, z_i) + \lambda I_i^{A_0}(y_i, z_i) + I_i^B(y_i, z_i) + I_i^E(y_6, y_7, y_i/\sigma_t, z_i) = I_i^J(S_{\Phi_i}, z_i) \qquad (i = 4, 5), \qquad (35)$$

$$I_6^A(e_6, y_6, z_6 - y_6) + I_6^B(y_6, z_6 - y_6) + I_6^E(y_6, y_7, y_6/\sigma_t, z_6 - y_6) - \sum_{i=1}^{3} I_i^H(y_6, y_7, y_i, z_6 - y_6) - \sum_{i=4}^{5} I_i^J(y_6, y_7, y_i, z_6 - y_6) - I^K(y_7, z_6 - y_6) \geqq 0, \qquad z_6 \in C_6, \qquad (36)$$

$$I_7^A(e_7, y_7, z_7 - y_7) + I_7^B(y_7, z_7 - y_7) + I_7^E(y_6, y_7, y_7/\sigma_7, z_7 - y_7)$$
$$- \sum_{i=1}^{3} I_i^{H_0}(y_6, y_i, z_7 - y_7) - \sum_{i=4}^{5} I_i^{J_0}(y_6, y_i, z_7 - y_7) + I_7^R(z_7 - y_7)$$
$$- I^L(y_6, y_7, z_7 - y_7) \geqq 0, \quad z_7 \in C_7. \tag{37}$$

Definition: Das Element $y = [\underline{y}, y_4, \ldots, y_7]^\perp \in C$ heißt *Lösung des Randwertproblems* (13)—(16) *für das System* (1)—(5), wenn alle Integrale in (21)—(33) für $z \in C$ endliche Werte annehmen und $y \in C$ Lösung des Systems (34)—(37) von Gleichungen und Ungleichungen in Variation bezüglich $z \in C$ ist.

Im Hinblick auf eine L_p-Theorie für Navier-Stokes-Gleichungen vgl. unter anderem die Arbeiten [19] und [1].

Im weiteren erzeugen wir über (21)—(33) Operatoren auf den entsprechenden Räumen $\underline{Y}$ bzw. Y_i, so daß (34)—(37) äquivalent in der Form eines Systems von Operatorgleichungen bzw. von Variationsungleichungen geschrieben werden kann.

3. Zur Stetigkeit der Operatoren

Der Operator A_0. Wir betrachten die Form $I_i^{A_0}(y_i, z_i)$ (vgl. (21)) auf $Y_i \times Y_i$ für $i = 4, 5$. Es existiert ein Operator $A_i^0 \in (Y_i \to Y_i^*)$ derart, daß $\left(A_i^0(y_i), z_i\right) = I_i^{A_0}(y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$|I_i^{A_0}(y_i, z_i)| \leqq (\text{mes } G)^{(p-2)/p} \, \|y_i + w_i\|_{1,p} \, \|z_i\|_{0,p}. \tag{38}$$

A_i^0 ist stetig. Wirklich, wir haben für $y_i^n \to y_i$ (stark)

$$\left|\left(A_i^0(y_i^n), z_i\right) - \left(A_i^0(y_i), z_i\right)\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{3} \left[\int_G D_j(y_i^n + w_i) \, D_j z_i \, dx - \int_G D_j(y_i + w_i) \, D_j z_i \, dx\right]\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{3} \int_G D_j(y_i^n - y_i) \, D_j z_i \, dx\right| \leqq (\text{mes } G)^{(p-2)/p} \, \|y_i^n - y_i\|_{0,p} \, \|z_i\|_{0,p} \to 0.$$

Wir betrachten weiter die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i^{A_0}(y_i, z_i)$ auf $\underline{Y} \times \underline{Y}$. Es existiert ein Operator $\underline{A}^0 \in (\underline{Y} \to (\underline{Y})^*)$ derart, daß $(\underline{A}^0 \underline{y}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^{3} I_i^{A_0}(y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{3} I_i^{A_0}(y_i, z_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{3} (\text{mes } G)^{(p-2)/p} \, \|y_i + w_i\|_{1,p} \, \|z_i\|_{0,p}. \tag{39}$$

Die Stetigkeit von $\underline{A}^0$ auf $\underline{Y}$ folgt völlig analog zu A_i^0 aus den entsprechenden Abschätzungen. Wir setzen $A^0 = [\nu \underline{A}^0, \lambda A_4^0, \lambda A_5^0, 0, 0]^\perp$. A^0 ist auf Y stetig und beschränkt.

Der Operator A. Wir betrachten die Form $I_i^A(e_i, y_i, z_i)$ (vgl. (22)) auf $Y_i \times Y_i$ für $i = 4, \ldots, 7$. Es existiert ein Operator $A_i \in (Y_i \to Y_i^*)$ derart, daß $\left(A_i(y_i), z_i\right) = I_i^A(e_i, y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$|I_i^A(e_i, y_i, z_i)| \leqq e_i \, \|y_i + w_i\|_{1,p}^{p-1} \, \|z_i\|_{0,p}. \tag{40}$$

A_i ist auf Y_i gleichmäßig monoton. Wirklich, es gilt (vgl. [4])

$$\begin{aligned}&\big(A_i(y_i^1) - A_i(y_i^2), y_i^1 - y_i^2\big)\\&= e_i \sum_{j=1}^{3} \int_G \big(|D_j(y_i^1 + w_i)|^{p-2} D_j(y_i^1 + w_i) - |D_j(y_i^2 + w_i)|^{p-2} D_j(y_i^2 + w_i)\big)\\&\quad\times \big(D_j((y_i^1 + w_i) - (y_i^2 + w_i))\big)\, dx \geqq (e_i 2^{2-p}/p)\, \|y_i^1 - y_i^2\|_{0,p}^p. \qquad (41)\end{aligned}$$

Die Stetigkeit von A_i folgt aus dem Erzeugungsprinzip (vgl. z. B. [2]). Wir betrachten weiter die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i^A(e_i, y_i, z_i)$ auf $\underline{Y} \times \underline{Y}$. Es existiert ein Operator $\underline{A} \in (\underline{Y} \to (\underline{Y})^*)$ derart, daß $(\underline{A}\underline{y}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^{3} I_i^A(e_i, y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{3} I_i^A(e_i, y_i, z_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{3} e_i\, \|y_i + w_i\|_{1,p}^{p-1}\, \|z_i\|_{0,p}. \qquad (42)$$

$\underline{A}$ ist auf $\underline{Y}$ gleichmäßig monoton. Wirklich, es gilt für $\underline{y}^1, \underline{y}^2 \in \underline{Y}$

$$(\underline{A}\underline{y}^1 - \underline{A}\underline{y}^2, \underline{y}^1 - \underline{y}^2) \geqq \sum_{i=1}^{3} (e_i 2^{2-p}/p)\, \|y_i^1 - y_i^2\|_{0,p}^p. \qquad (43)$$

Die Stetigkeit von $\underline{A}$ folgt aus dem Erzeugungsprinzip. Wir setzen $A = [\underline{A}, A_4, \ldots, A_7]^\perp \in (Y \to Y^*)$. A ist auf Y stetig und gleichmäßig monoton mit der Konstanten $e_A = \inf_i e_i$.

Der Operator *B*. Wir betrachten die Form $I_i^B(y_i, z_i)$ (vgl. (23)) auf $Y_i \times Y_i$ für $i = 4, \ldots, 7$. Es existiert ein Operator $B_i \in (Y_i \to Y_i^*)$ derart, daß $\big(B_i(y_i), z_i\big) = I_i^B(y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}&(\operatorname{mes} G)^{-1/q}\, |I_i^B(y_i, z_i)|\\&\leqq \sum_{i=1}^{3} (\max |y_j + w_j|)\, (\max |z_i|)\, \|y_i + w_i\|_{1,p}\\&\leqq H_p^c \sum_{j=1}^{3} [(\max |y_j|) + (\max |w_j|)]\, (\|y_i\|_{1,p} + \|w_i\|_{1,p})\, \|z_i\|_{0,p}\\&\leqq H_p^c(\alpha\, \|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \sum_{j=1}^{3} (H_p^c\, \|y_j\|_{0,p} + K_p^c\, \|w_j\|_{1,p})\, \|z_i\|_{0,p}. \qquad (44)\end{aligned}$$

Für $p > n$ $(p > 3)$ ist B_i stetig. Wirklich, wir haben für $y_i^n \to y_i$

$$\begin{aligned}&\big|\big(B_i(y_i^n), z_i\big) - \big(B_i(y_i), z_i\big)\big|\\&= \left|\sum_{j=1}^{3} \int_G (y_j^n + w_j)\, D_j(y_i^n + w_i)\, z_i\, dx - \sum_{j=1}^{3} \int_G (y_j + w_j)\, D_j(y_i + w_i)\, z_i\, dx\right|\\&\leqq \left|\sum_{j=1}^{3} \int_G (y_j^n - y_j)\, D_j(y_i^n + w_i)\, z_i\, dx\right|\\&\quad+ \left|\sum_{j=1}^{3} \int_G (y_j + w_j)\, \big(D_j(y_i^n - y_i)\big)\, z_i\, dx\right|\\&\leqq H_p^c (\operatorname{mes} G)^{1/q} \sum_{j=1}^{3} (\max |y_j^n - y_j|)\, \|D_j(y_i^n + w_i)\|_p\, \|z_i\|_{0,p}\\&\quad+ H_p^c\, \|z_i\|_{0,p} \sum_{j=1}^{3} (\max |y_j + w_j|)\, (\operatorname{mes} G)^{1/q}\, \|D_j(y_i^n - y_i)\|_p \to 0.\end{aligned}$$

Wir betrachten weiter die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i{}^B(y_i, z_i)$ auf $\underline{Y} \times \underline{Y}$. Es existiert ein Operator $\underline{B} \in (\underline{Y} \to (\underline{Y})^*)$ derart, daß $(\underline{B}\underline{y}, \underline{z}) = \sum_{i=1}^{3} I_i{}^B(y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{3} I_i{}^B(y_i, z_i)\right| \leqq \sum_{i=1}^{3} [H_p{}^c(\operatorname{mes} G)^{1/q} (\alpha \|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \cdot \times \sum_{j=1}^{3} (H_p{}^c \|y_j\|_{0,p} + K_p{}^c \|w_j\|_{1,p}) \|z_i\|_{0,p}]. \tag{45}$$

Des weiteren ist $\underline{B}$ offenbar stetig auf $\underline{Y}$. Damit ist auch $B = [\underline{B}, B_4, \ldots, B_7]^\perp$ auf Y stetig.

Der Operator E. Wir betrachten die Form $I_i{}^E(y_6, y_7, y_i, z_i)$ (vgl. (24)) auf $C_6 \times C_7 \times Y_i \times Y_i$ für $i = 4, \ldots, 7$. Es existiert ein Operator $E_i \in (C_6 \times C_7 \times Y_i \to Y_i{}^*)$ derart, daß $(E_i(y_6, y_7, y_i), z_i) = I_i{}^E(y_6, y_7, y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} &|I_i{}^E(y_6, y_7, y_i, z_i)| \\ &\leqq c_\mu \max \left|\frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right| \sum_{j=1}^{3} \|D_j(y_i + w_i)\|_q \|z_i\|_{0,p} \\ &\leqq 2(c_\mu/\varepsilon) \left((H_p{}^c)^2 \|y_6\|_{0,p}^2 + (K_p{}^c)^2 \|w_6\|_{1,p}^2\right) (\operatorname{mes} G)^{(p-2)/p} \\ &\quad \times (\alpha \|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \|z_i\|_{0,p}. \end{aligned} \tag{46}$$

Weiter ist E_i stetig. Wirklich, für $y_6{}^n \to y_6$, $y_7{}^n \to y_7$, $y_i{}^n \to y_i$ gilt

$$\begin{aligned} &\left|(E_i(y_6{}^n, y_7{}^n, y_i{}^n), z_i) - (E_i(y_6, y_7, y_i), z_i)\right| \\ &\leqq \left|\sum_{j=1}^{3} c_\mu \int_G \left[\frac{(y_6{}^n + w_6)^2}{(y_7{}^n + w_7)} - \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right] D_j(y_i{}^n + w_i)\, D_j z_i\, dx\right| \\ &\quad + \left|\sum_{j=1}^{3} c_\mu \int_G \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} [D_j(y_i{}^n - y_i)]\, D_j z_i\, dx\right| \\ &\leqq c_\mu \max \left|\frac{(y_6{}^n + w_6)^2}{(y_7{}^n + w_7)} - \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right| \sum_{j=1}^{3} \|D_j(y_i{}^n + w_i)\|_q \|z_i\|_{0,p} \\ &\quad + c_\mu \max \left|\frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right| \sum_{j=1}^{3} \|D_j(y_i{}^n - y_i)\|_q \|z_i\|_{0,p} \to 0 \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von

$$\frac{k_1{}^2}{\varepsilon_1} - \frac{k_2{}^2}{\varepsilon_2} = \frac{(k_1 - k_2)(k_1 + k_2)\,\varepsilon_2 + k_2{}^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \tag{47}$$

und der Restriktion $\varepsilon \geqq \underline{\varepsilon} > 0$. Wir betrachten weiter die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i{}^E(y_6, y_7, y_i, z_i)$ auf $C_6 \times C_7 \times \underline{Y} \times \underline{Y}$. Es existiert ein Operator $\underline{E} \in (C_6 \times C_7 \times \underline{Y} \to (\underline{Y})^*)$ derart, daß $(\underline{E}(y_6, y_7, \underline{y}), \underline{z}) = \sum_{i=1}^{3} I_i{}^E(y_6, y_7, y_i, z_i)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung (46), die auch für $i = 1, 2, 3$ gilt. Weiter ist $\underline{E}$ offensichtlich stetig. Das gleiche gilt dann auch für $E = [\underline{E}, E_4/\sigma_t, E_5/\sigma_t, E_6/\sigma_k, E_7/\sigma/]^\perp$ auf Y.

Der Operator F. Wir betrachten die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i^F(y_4, y_5, z_i)$ (vgl. (25)) auf $Y_4 \times Y_5 \times \underline{Y}$. Es existiert ein Operator $\underline{F} \in (Y_4 \times Y_5 \to (\underline{Y})^*)$ derart, daß $(\underline{F}(y_4, y_5), \underline{z}) = \sum_{i=1}^{3} I_i^F(y_4, y_5, z_i)$ gilt. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{3} I_i^F(y_4, y_5, z_i)\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{3} (|g_i|/\varrho_r) \max |\alpha_4(y_4 + w_4) + \alpha_5(y_5 + w_5)| \, H_p^c \operatorname{mes} G \, \|z_i\|_{0,p}. \tag{48}$$

Weiter ist $\underline{F}$ offensichtlich stetig und $F = [\underline{F}, 0, \ldots, 0]^\perp$ ist auf Y stetig.

Der Operator H. Wir betrachten die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i^H(y_6, y_7, y_i, z_6)$ (vgl. (27)) auf $C_6 \times C_7 \times \underline{Y} \times Y_6$. Es existiert ein Operator $H_6 \in (C_6 \times C_7 \times \underline{Y} \to Y_6^*)$ derart, daß $(H_6(y_6, y_7, \underline{y}), z_6) = \sum_{i=1}^{3} I_i^H(y_6, y_7, y_i, z_6)$ gilt. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{3} I_i^H(y_6, y_7, y_i, z_6)\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{3} (c_\mu/\varepsilon) \, (\max |z_6|) \, (\max |y_6 + w_6|)^2 \sum_{j=1}^{3} \int_G |D_j(y_i + w_i)|^2 \, dx$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{3} (c_\mu/\varepsilon) \, H_p^c \, \|z_6\|_{0,p} \, 2\left((H_p^c)^2 \, \|y_6\|_{0,p}^2 + (K_p^c)^2 \, \|w_6\|_{1,p}^2\right)$$

$$\times \sum_{j=1}^{3} \|D_j(y_i + w_i)\|_q \, \|D_j(y_i + w_i)\|_p$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{3} 2(c_\mu/\varepsilon) \, H_p^c\left((H_p^c)^2 \, \|y_6\|_{0,p}^2\right.$$

$$\left. + (K_p^c)^2 \, \|w_6\|_{1,p}^2\right) (\operatorname{mes} G)^{(p-2)/2} \sum_{j=1}^{3} \|D_j(y_i + w_i)\|_p^2 \, \|z_6\|_{0,p}. \tag{49}$$

Weiter ist H_6 stetig. Wirklich, für $y_6^n \to y_6$, $y_7^n \to y_7$, $\underline{y}^n \to \underline{y}$ in $C_6 \times C_7 \times \underline{Y}$ gilt

$$\left|\left(H_6(y_6^n, y_7^n, \underline{y}^n) \, z_6\right) - \left(H_6(y_6, y_7, \underline{y}), z_6\right)\right|$$

$$\leqq \left|\sum_{i,j=1}^{3} c_\mu \int_G \left[\frac{(y_6^n + w_6)^2}{(y_7^n + w_7)} - \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right] [D_j(y_i^n + w_i)]^2 \, z_6 \, dx\right|$$

$$+ \left|\sum_{i,j=1}^{3} c_\mu \int_G \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} \left[\left(D_j(y_i^n + w_i) - D_j(y_i + w_i)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(D_j(y_i^n + w_i) + D_j(y_i + w_i)\right)\right] z_6 \, dx\right|$$

$$\leqq \sum_{i,j=1}^{3} c_\mu \left(\max\left|\frac{(y_6^n + w_6)^2}{(y_7^n + w_7)} - \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right|\right) (\max|z_6|) \int_G |D_j(y_i^n + w_i)|^2 \, dx$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{3} c_\mu \left(\max\left|\frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)}\right|\right) \int_G |D_j(y_i^n - y_i)|$$

$$\times |D_j(y_i^n + w_i) + D_j(y_i + w_i)| \, dx \, (\max|z_6|) \to 0.$$

Wir setzen $H = [0, \ldots, 0, H_6, 0]^\perp$. Dann ist H auf Y stetig.

Der Operator H^0. Wir betrachten die Form $\sum_{i=1}^{3} I_i^{H_0}(y_6, y_i, z_7)$ (vgl. (28)) auf $C_6 \times \underline{Y} \times Y_7$. Es existiert ein Operator $H_7 \in (C_k \times \underline{Y} \to Y_7^*)$ derart, daß $\left(H_7(y_6, y), z_7\right) = \sum_{i=1}^{3} I_i^{H_0}(y_6, y_i, z_7)$ ist. Diese Aussage folgt aus der Abschätzung

$$\left|\sum_{i=1}^{3} I_i^{H_0}(y_6, y_i, z_7)\right|$$

$$\leqq \sum_{i,j=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu (\max|y_6 + w_6|) (\max|z_7|) \, \|D_j(y_i + w_i)\|_q \, \|D_j(y_i + w_i)\|_p$$

$$\leqq \sum_{i,j=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu H_p^c \, \|z_7\|_{0,p} \, (H_p^c \|y_6\|_{0,p} + K_p^c \, \|w_6\|_{1,p}) \, (\text{mes } G)^{(p-2)/p} \, \|D_j(y_i + w_i)\|_p^2$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu H_p^c (H_p^c \, \|y_6\|_{0,p} + K_p^c \, \|w_6\|_{1,p}) \, (\text{mes } G)^{(p-2)/p} \sum_{j=1}^{3} (\alpha \, \|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p})$$

$$\times (\|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \, \|z_7\|_{0,p}. \tag{50}$$

Weiter ist H_7 stetig. Für $y_6^n \to y_6$, $y^n \to y$ gilt nämlich

$$\left|\left(H_7(y_6^n, \underline{y}^n), z_7\right) - \left(H_7(y_6, \underline{y}), z_7\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu (\max|y_6^n - y_6|) \sum_{j=1}^{3} \int_G |D_j(y_i^n + w_i)|^2 \, |z_7| \, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu \sum_{j=1}^{3} \int_G |(y_6 + w_6)| \, |D_j(y_i^n - y_i)| \, |D_j(y_i^n + w_i)| \, |z_7| \, dx$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu \sum_{j=1}^{3} \int_G (y_6 + w_6) \, \|D_j(y_i + w_i)\| \, |D_j(y_i^n - y_i)| \, |z_7| \, dx$$

$$\leqq \sum_{i,j=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu \max(|y_6^n - y_6|) \, \|D_j(y_i^n + w_i)\|_q \, \|D_j(y_i^n + w_i)\|_p \, (\max|z_7|)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu \sum_{j=1}^{3} (\max|y_6 + w_6|) \, \|D_j(y_i^n - y_i)\|_q \, \|D_j(y_i^n + w_i)\|_p \, (\max|z_7|)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \underline{\alpha} c_\mu \sum_{j=1}^{3} (\max|y_6 + w_6|) \, \|D_j(y_i + w_i)\|_q \, \|D_j(y_i^n - y_i)\|_p \, (\max|z_7|) \to 0.$$

Wir setzen $H^0 = [0, \ldots, H_7]^\perp$. H^0 ist auf Y stetig.

Der Operator J. Wir betrachten die Form $I_i^J(y_6, y_7, y_i, z_6)$ (vgl. (29)) auf $C_6 \times C_7 \times Y_i \times Y_6$. Es existiert ein Operator $J_i \in (C_6 \times C_7 \times Y_i \to Y_6^*)$ derart, daß $(J_i(y_6, y_7, y_i), z_6) = I_i^J(y_6, y_7, y_i, z_6)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&(\text{mes } G)^{-1/q} \, |I_i^J(y_6, y_7, y_i, z_6)| \\
&\leqq \sum_{j=1}^{3} |\beta_i g_j| \, \frac{c_\mu}{\sigma_t} \left(\max \left| \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} \right| \right) (\max |z_6|) \, \|D_j(y_i + w_i)\|_p \\
&\leqq \sum_{j=1}^{3} |\beta_i g_j| \, \frac{c_\mu}{\sigma_t} \, H_p^c \, \|z_6\|_{0,p} \, \frac{2}{\varepsilon} \, [(H_p^c)^2 \, \|y_6\|_{0,p}^2 + (K_p^c)^2 \, \|w_6\|_{1,p}^2] \, \|D_j(y_j + w_i)\|_p .
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Weiter ist J_i stetig. Wirklich, für $y_6^n \to y_6$, $y_7^n \to y_7$ und $y_i^n \to y_i$ gilt

$$
\begin{aligned}
&(\text{mes } G)^{-1/q} \left| (J_i(y_6^n, y_7^n, y_i^n), z_6) - (J_i(y_6, y_7, y_i), z_6) \right| \\
&\leqq \sum_{j=1}^{3} |\beta_i g_j| \, \frac{c_\mu}{\sigma_t} \, H_p^c \, \|z_6\|_{0,p} \left(\max \left| \frac{(y_6^n + w_6)^2}{(y_7^n + w_7)} - \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} \right| \right) \|D_j(y_i^n + w_i)\|_p \\
&\quad + \sum_{j=1}^{3} |\beta_i g_j| \, \frac{c_\mu}{\sigma_t} \, (H_p^c) \, \|z_6\|_{0,p} \left(\max \left| \frac{(y_6 + w_6)^2}{(y_7 + w_7)} \right| \right) \|D_j(y_i^n - y_i)\|_p \to 0 .
\end{aligned}
$$

Wir setzen $J_6 = J_4 + J_5$ und $J = [0, \ldots, J_6, 0]^\perp$. J_6 und J sind stetig.

Der Operator J^0. Wir betrachten die Form $I_i^{J_0}(y_6, y_i, z_7)$ (vgl. (30)) auf $C_6 \times Y_i \times Y_7$. Es existiert ein Operator $J_i^0 \in (C_6 \times Y_i \to Y_7^*)$ derart, daß $(J_i^0(y_6, y_i), z_7) = I_i^{J_0}(y_6, y_i, z_7)$ gilt. Diese Aussage folgt aus der Abschätzung ($\delta_{ij} = |\beta_i g_j|$, $\delta_i = \max_j |\beta_i g_j|$)

$$
\begin{aligned}
&(\text{mes } G)^{-1/q} \, |I_i^{J_0}(y_6, y_i, z_7)| \\
&\leqq \sum_{j=1}^{3} (\max |y_6 + w_6|) (\max |z_7|) \, \|D_j(y_i + w_i)\|_p \, \delta_{ij} \underset{\sim}{\alpha} \frac{c_\mu}{\sigma_t} \\
&\leqq \underset{\sim}{\alpha} \frac{c_\mu}{\sigma_t} (H_p^c \, \|y_6\|_{0,p} + K_p^c \, \|w_6\|_{1,p}) (H_p^c) \, \|z_7\|_{0,p} \, \delta_i \, \|y_i + w_i\|_{1,p} .
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Weiter ist J_i^0 stetig. Wirklich, für $y_6^n \to y_6$, $y_i^n \to y_i$ folgt

$$
\begin{aligned}
&\left| (J_i^0(y_6^n, y_i^n), z_7) - (J_i^0(y_6, y_i), z_7) \right| \\
&\leqq \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \underset{\sim}{\alpha} \frac{c_\mu}{\sigma_t} \left| \int_G (y_6^n - y_6) \, D_j(y_i^n + w_i) \, z_7 \, dx \right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \underset{\sim}{\alpha} \frac{c_\mu}{\sigma_t} \left| \int_G (y_6 + w_6) \, D_j(y_i^n - y_i) \, z_7 \, dx \right| \\
&\leqq \delta_i \underset{\sim}{\alpha} \frac{c_\mu}{\sigma_t} (\text{mes } G)^{1/q} (H_p^c)^2 \sum_{j=1}^{3} [\|y_6^n - y_6\|_{0,p} \, \|z_7\|_{0,p} \, \|y_i + w_i\|_{1,p} \\
&\quad + \|y_6 + w_6\|_{1,p} \, \|z_7\|_{0,p} \, \|y_i^n - y_i\|_{0,p}] \to 0 .
\end{aligned}
$$

Wir setzen $J_7^0 = J_4^0 + J_5^0$ und $J^0 = [0, \ldots, 0, J_7^0]^\perp$. J_7^0 und J^0 sind stetig.

Der Operator K. Wir betrachten die Form $I^K(y_7, z_6)$ (vgl. (31)) auf $C_7 \times Y_6$. Es existiert ein Operator $K \in (C_7 \to Y_6^*)$ derart, daß $(Ky_7, z_6) = I^K(y_7, z_6)$ ist. Diese Aussage folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}(\text{mes } G)^{-1} |I^K(y_7, z_6)| &\leqq (\max |y_7 + w_7|) (\max |z_6|) \\ &\leqq H_p{}^c \|z_6\|_{0,p} (H_p{}^c \|y_7\|_{0,p} + K_p{}^c \|w_7\|_{1,p}). \qquad (53)\end{aligned}$$

Weiter ist K stetig. Wirklich, für $y_7{}^n \to y_7$ ist

$$\left|\left(K(y_7), z_6\right) - \left(K(y_7{}^n), z_6\right)\right| \leqq (H_p{}^c) (\text{mes } G) (\max |y_7{}^n - y_7|) \|z_6\|_{0,p} \to 0.$$

Der Operator L. Wir betrachten die Form $I^L(y_6, y_7, z_7)$ (vgl. (32)) auf $C_6 \times C_7 \times Y_7$. Es existiert ein Operator $L \in (C_6 \times C_7 \to Y_7^*)$ derart, daß $\left(L(y_6, y_7), z_7\right) = I^L(y_6, y_7, z_7)$ ist. Diese Aussage resultiert aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}&(\text{mes } G)^{-1} |I^L(y_6, y_7, z_7)| \\ &\leqq (c_{2\varepsilon}/\underline{k}) (\max |y_7 + w_7|)^2 (\max |z_7|) \\ &\leqq (c_{2\varepsilon}/\underline{k}) 2[(H_p{}^c)^2 \|y_7\|_{0,p}^2 + (K_p{}^c)^2 \|w_7\|_{1,p}^2] (H_p) \|z_7\|_{0,p}. \qquad (54)\end{aligned}$$

Weiter ist L stetig. Wirklich, für $y_6{}^n \to y_6$ und $y_7{}^n \to y_7$ gilt

$$\begin{aligned}&\left|\left(L(y_6{}^n, y_7{}^n), z_7\right) - \left(L(y_6, y_7), z_7\right)\right| \\ &\leqq c_{2\varepsilon}(H_p{}^c) \|z_7\|_{0,p} (\text{mes } G) \left(\max \left|\frac{(y_7{}^n + w_7)^2}{(y_6{}^n + w_6)} - \frac{(y_7 + w_7)^2}{(y_6 + w_6)}\right|\right) \to 0\end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(y_7{}^n + w_7)^2}{(y_6{}^n + w_6)} - \frac{(y_7 + w_7)^2}{(y_6 + w_6)}\right| \\ &\leqq (1/\underline{k}^2) [|y_7{}^n - y_7| |y_7{}^n + y_7 + 2w_7| |y_6 + w_6| + |y_7 + w_7|^2 |y_6{}^n - y_6|].\end{aligned}$$

Das Element f. Wir betrachten die Form $I_i{}^f(S_{\varphi_i}, z_i)$ (vgl. (26)) auf Y_i. Es existiert ein Element $f_i \in Y_i^*$ derart, daß $(f_i, z_i) = I_i{}^f(S_{\varphi_i}, z_i)$ gilt. Wir haben

$$(\text{mes } G)^{-1/q} |I_i{}^f(S_{\varphi_i}, z_i)| \leqq \|S_{\varphi_i}\|_p (\max |z_i|) \leqq H_p{}^c \|S_{\varphi_i}\|_p \|z_i\|_{0,p}. \qquad (55)$$

Wir betrachten weiter die Form $I_7{}^R(z_7)$ (vgl. (33)) auf Y_7. Es existiert ein Element $R_7 \in Y_7^*$ derart, daß $(R_7, z_7) = I_7{}^R(z_7)$ ist. Wirklich, es gilt

$$|I_7{}^R(z_7)| \leqq (H_p{}^c) \|z_i\|_{0,p} \int_{\partial_s} |\bar{\varepsilon}_3| \, ds. \qquad (56)$$

Wir setzen $f = [0, 0, 0, f_4, f_5, 0, R_7]^\perp$.

4. Die Operatorgleichungen und die Variationsungleichungen

Aus (38)—(56) resultiert das folgende zu (34)—(37) äquivalente System von Operatorgleichungen und Variationsungleichungen:

$$\underline{A}y + \nu \underline{A}^0 \underline{y} + \underline{B}y + \underline{E}(y_6, y_7, \underline{y}) = \underline{F}(y_4, y_5), \qquad (57)$$

$$A_i(y_i) + \lambda A_i{}^0 y_i + B_i y_i + E_i(y_6, y_7, y_i/\sigma_i) = f_i \qquad (i = 4, 5), \qquad (58)$$

$$\big(A_6(y_6), z_6 - y_6\big) + \big(B_6(y_6), z_6 - y_6\big) + \big(E_6(y_6, y_7, y_6/\sigma_k), z_6 - y_6\big)$$
$$- \big(H_6(y_6, y_7, \underline{y}), z_6 - y_6\big) - \sum_{i=4}^{5} \big(J_i(y_6, y_7, y_i), z_6 - y_6\big)$$
$$- \big(K(y_7), z_6 - y_6\big) \geqq 0 \ (z_6 \in C_6), \tag{59}$$
$$\big(A_7(y_7), z_7 - y_7\big) + \big(B_7(y_7), z_7 - y_7\big) + \big(E_7(y_6, y_7, y_7/\sigma_\varepsilon), z_7 - y_7\big)$$
$$- \big(H_7(y_6, y_7, \underline{y}), z_7 - y_7\big) - \sum_{i=4}^{5} \big(J_i^0(y_6, y_i), z_7 - y_7\big) - \big(L(y_6, y_7), z_7 - y_7\big)$$
$$- (R_7, z_7 - y_7) \geqq 0 \qquad (z_7 \in C_7). \tag{60}$$

Wir setzen

$$T = A + A^0 + B + E - F - H - J - H^0 - J^0 - K - L.$$

Dann ist diese Aufgabe äquivalent der Variationsungleichung

$$(Ty - f, z - y) \geqq 0, \quad z \in C. \tag{61}$$

Lemma: *Der Operator T ist koerzitiv relativ zu C, d. h., es gilt $(Ty, y - z_0)/\|y\| \to +\infty$ für $\|y\| \to \infty$ bei einem festen $z_0 \in C$.*

Beweis: Für $z_0 = [0, \ldots, 0, z_{06}, z_{07}]^\perp$ gilt nach (38)–(56)

$$(\underline{A}\underline{y}, \underline{y}) + (\underline{A}^0\underline{y}, \underline{y}) + (\underline{B}\underline{y}, \underline{y}) + \big(\underline{E}(y_6, y_7, \underline{y}), \underline{y}\big) - \big(F(y_4, y_5), \underline{y}\big)$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{3} c_i \|y_i\|_{0,p}^p - (\underline{A}^0, \underline{y}) - \sum_{i=1}^{3} (\text{mes } G)^{(p-2)/p} \|y_i + w_i\|_{1,p} \|y_i\|_{0,p}$$
$$- \gamma \sum_{j=1}^{3} [H_p^c (\text{mes } G)^{1/q} (\alpha \|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \sum_{j=1}^{3} (H_p^c \|y_j\|_{0,p}$$
$$+ K_p^c \|w_j\|_{1,p}) \|y_i\|_{0,p} - \gamma \sum_{i=1}^{3} (\|y_6\|_{0,p}^2 + \|w_6\|_{1,p}^2) (\alpha \|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \|y_i\|_{0,p}$$
$$- \gamma \sum_{i=1}^{3} \max |\alpha_4(y_4 + w_4) + \alpha_5(y_5 + w_5)| \|y_i\|_{0,p}. \tag{62}$$

Dabei bezeichne γ hier und im weiteren eine entsprechende Konstante, die vor jedem Term durchaus verschieden sein kann. Weiter ist

$$(A_i y_i, y_i) + (A_i^0 y_i, y_i) + (B_i y_i, y_i) + \big(E_i(y_6, y_7, y_i/\sigma_t), y_i\big)$$
$$\geqq c_i \|y_i\|_{0,p}^p - \|A_i^0\| \|y_i\|_{0,p} - \gamma \|y_i + w_i\|_{1,p} \|y_i\|_{0,p}$$
$$- \gamma(\|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \sum_{j=1}^{3} (\|y_j\|_{0,p} + \|w_j\|_{1,p}) \|y_i\|_{0,p}$$
$$- \gamma(\|y_6\|_{0,p}^2 + \|w_6\|_{1,p}^2) (\|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p}) \|y_i\|_{0,p} \qquad (i = 4, 5), \tag{63}$$
$$\big(A_6(y_6), y_6 - z_{06}\big) + \big(B_6(y_6), y_6 - z_{06}\big) + \big(E_6(y_6, y_7, y_6/\sigma_k), y_6 - z_{06}\big)$$
$$- \big(H_6(y_6, y_7, \underline{y}), y_6 - z_{06}\big) - \sum_{i=4}^{5} \big(J_i(y_6, y_7, y_i), y_6 - z_{06}\big) - \big(K(y_7, y_6 - z_{06})\big) \tag{64}$$

$$\geqq c_6 \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}^p - \|A_6(z_{06})\| \, \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}$$

$$- \gamma(\|y_6\|_{0,p} + \|w_6\|_{1,p}) \sum_{j=1}^{3} (\|y_j\|_{0,p} + \|w_j\|_{1,p}) \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}$$

$$- \gamma(\|y_6\|_{0,p}^2 + \|w_6\|_{1,p}^2)(\|y_6\|_{0,p} + \|w_6\|_{1,p}) \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}$$

$$- \gamma \sum_{i=1}^{3} (\|y_6\|_{0,p}^2 + \|w_6\|_{1,p}^2) \sum_{j=1}^{3} \|D_j(y_i + w_i)\|_p^2 \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}$$

$$- \sum_{i=4}^{5} \sum_{j=1}^{3} [\|y_6\|_{0,p}^2 + \|w_6\|_{1,p}^2] \|D_j(y_i + w_i)\|_p \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}$$

$$- \gamma(\|y_7\|_{0,p} + \|w_7\|_{1,p}) \|y_6 - z_{06}\|_{0,p}, \tag{64}$$

$$\big(A_7(y_7), y_7 - z_{07}\big) + \big(B_7(y_7), y_7 - z_{07}\big) + \big(E_7(y_6, y_7, y_7/\sigma_\varepsilon), y_7 - z_{07}\big)$$

$$- \big(H_7(y_6, y_7, \underline{y}), y_7 - z_{07}\big) - \sum_{i=4}^{5} \big(J_i^0(y_6, y_i), y_7 - z_{07}\big) + \big(L(y_6, y_7), y_7 - z_{07}\big)$$

$$\geqq c_7 \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}^p - \|A_7(z_{07})\| \, \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}$$

$$- \gamma(\|y_7\|_{0,p} + \|w_7\|_{1,p}) \sum_{j=1}^{3} (\|y_j\|_{0,p} + \|w_j\|_{1,p}) \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}$$

$$- \gamma(\|y_6\|_{0,p}^2 + \|w_6\|_{1,p}^2)(\|y_7\|_{0,p} + \|w_7\|_{1,p}) \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}$$

$$- \gamma \sum_{i=1}^{3} (\|y_6\|_{0,p} + \|w_6\|_{1,p}) \sum_{j=1}^{3} (\|y_i\|_{0,p} + \|w_i\|_{1,p})^2 \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}$$

$$- \sum_{i=4}^{5} \gamma(\|y_6\|_{0,p} + \|w_6\|_{1,p}) \|y_i + w_i\|_p \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}$$

$$- \gamma(\|y_7\|_{0,p}^2 + \|w_7\|_{1,p}^2) \|y_7 - z_{07}\|_{0,p}. \tag{65}$$

Aus diesen Abschätzungen zusammen folgt nun unter Berücksichtigung der Ungleichung $2ab \leqq a^2 + b^2$ für $p > 6$ die Behauptung ∎

5. Zur Existenz von Lösungen

Zunächst beachten wir, daß alle Abbildungen A, A^0, B, E, F, H, H^0, J, J^0, K und L stetig sind, nach dem Erzeugungsprinzip außerdem beschränkt, daß T koerzitiv relativ zu C ist, und daß A auf Y gleichmäßig monoton ist. Weiter ist Y separabel und reflexiv. Gesucht ist nun ein $y \in C$ mit

(I) $$(Ty - f, z - y) \geqq 0, \qquad z \in C. \tag{66}$$

Wir beweisen die Existenz von Lösungen von (I) über ein Näherungsverfahren, das dem Galerkin-Verfahren für Gleichungen entspricht. Dazu sei $\{Y_n\}$ eine Folge endlichdimensionaler Unterräume mit den Eigenschaften $Y_1 \cap C \neq \emptyset$, $Y_n \subset Y_m$ für $n \leqq m$, $\underline{\mathrm{Lim}}\, Y_n = Y$.

Satz: *Für $p > 6$ besitzt* (I) *und damit das System* (57)—(60) *wenigstens eine Lösung.*

Beweis: Wir beweisen zunächst die Existenz von Lösungen für den Fall der beschränkten Restriktionsmenge $C_R = C \cap K_R$, $K_R = \{y \in Y: \|y\| \leqq R\}$:

$$(\mathrm{I_R}) \qquad (Ty - f, z - y) \geqq 0, \qquad z \in C_R. \tag{67}$$

Wir betrachten die endlichdimensionalen Probleme

$$(\mathrm{I_{R_n}}) \qquad (Ty - f, z - y) \geqq 0, \qquad z \in C_{Rn} = C_R \cap Y_n.$$

Vorerst zeigen wir, daß $(\mathrm{I_{R_n}})$ wenigstens eine Lösung $y^n \in C_{Rn}$ besitzt. Dazu versehen wir Y_n mit einer Hilbert-Raum-Struktur durch Einführung eines Skalarproduktes $[\cdot, \cdot]_n$. Für jedes $g \in Y^*$ ist $z \to (g, z)$ auf Y_n stetig. Folglich gilt $(g, z) = [\pi g, z]$, $\pi g \in Y_n$, $\pi \in [Y^* \to Y_n^*]$ ($[Y^* \to Y_n^*]$ kennzeichnet den Raum der linearen stetigen Operatoren). Dann ist $(\mathrm{I_{R_n}})$ äquivalent der Ungleichung $[\pi Ty, z - y] \geqq [\pi f, z - y]$, $z \in C_{Rn}$, oder

$$[y, z - y] \geqq [y + \pi f - \pi Ty, z - y], \qquad z \in C_{Rn}. \tag{68}$$

Wenn P_n den Operator der Projektion von Y_n auf die konvexe und abgeschlossene Menge C_{Rn} bezüglich des Skalarproduktes $[\cdot, \cdot]_n$ bezeichnet, dann ist (68) dem Fixpunktproblem $y = P_n(y + \pi f - \pi Ty)$ äquivalent. Die Existenz von $y^n \in C_{\mathrm{R_n}}$ folgt dann aufgrund der Stetigkeit von T aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz. Die Folge $\{y^n\}$ ist beschränkt. Damit gilt $y^k \rightharpoonup y$ (schwach) für eine geeignete Teilfolge $\{y^k\} \subset \{y^n\}$. Wir zeigen im nächsten Schritt, daß y eine Lösung von $(\mathrm{I_R})$ ist. Wegen $p > n$ gilt $\|y_k - y\|_C \to 0$ für $k \to \infty$. Wir setzen $g(n) = -(T - A - A^0 - E)\, y^n + f$. Dann ist $[g(n) - g(m)]$ in $L_1(G)$ gleichgradig beschränkt durch eine Konstante C_0. Zu diesem Zweck muß $g(n)$ als Element von $L_1(G)$ erzeugt werden. Wir betrachten einen Spezialfall:

$$|I_i^H(y_6, y_7, y_i, z_6)| \leqq \sum_{j=1} \frac{c_\mu}{\varepsilon} \max\,[(y_6 + w_6)^2]\, \|z_6\|_p\, \|D_j(y_i + w_i)\|_{2q}^2.$$

Daraus folgt

$$c\,\|y^k - y^l\|^p \leqq \int_G |g(k) - g(l)|\, |y^k - y^l|\, dx + c_\mu \max \left| \frac{(y_6^k + w_6)^2}{(y_7^k + w_7)} - \frac{(y_6^l + w_6)^2}{(y_7^l + w_7)} \right| C_1 \to 0.$$

Damit gilt $\|y^k - y^l\| \to 0$ für $k, l \to \infty$ und folglich $y^k \to w$ stark in Y. Wegen $y^k \rightharpoonup y$ folgt daraus $\|y^k - y\| \to 0$. Auf dieser Folge konvergieren alle in T enthaltenen Operatoren stark. Nun sei $\{z^k\} \subset C_{Rk}$ eine stark gegen $z \in C_R$ konvergierende Folge. Wir haben dann $(Ty^k - f, z^k - y^k) \geqq 0$. Nach dem Grenzübergang für $k \to \infty$ ist $(\mathrm{I_R})$ erfüllt. Wir zeigen, daß (I) für hinreichend große R ebenfalls erfüllt ist. Wir setzen $R \geqq \|z_0\|$ voraus. Das Element y_R sei eine Lösung von $(\mathrm{I_R})$. Aufgrund der relativen Koerzivität von T bezüglich C gilt $(Ty_R, y_R - z_0)/\|y_R\| \to \infty$ für $\|y_R\| \to \infty$ im Widerspruch zu $(Ty_R, y_R - z_0) \geqq (f, z_0 - y_R)$. Damit ist $\|y_R\| \leqq c$ für eine geeignete Konstante c. Für $R > c$ ist y_R auch eine Lösung von (I). Wirklich sei $z \in C$ beliebig. Wegen $\|y_R\| < R$ gilt $z_t = (1 - t)\, y_R + tz \in K_R$ für hinreichend kleine $t > 0$. Dann gilt mit $(\mathrm{I_R})$ $t(Ty_R, z - y_R) \geqq t(f, z - y_R)$ und folglich $(Ty_R - f, z - y_R) \geqq 0$, $z \in C$ ∎

Bemerkung: Für einige der erzeugten Operatoren lassen sich weitere Eigenschaften beweisen:

a) A und A^0 sind als monotone und stetige Operatoren auch pseudomonoton.
b) B ist $(w \to w)$-stetig.
c) E ist $(w \to w)$-stetig und pseudomonoton.
d) F, K und L sind $(w \to s)$-stetig.
e) J und J^0 sind $(w \to w)$-stetig.

LITERATUR

[1] Боговский, М. Е.: Решение первой краевой задачи для уравнения неразрывности несжимаемой среды. Докл. Акад. Наук СССР **248** (1979), 1037—1040.

[2] Browder, F. E.: Problèmes nonlineaires. Montreal: Les Presses de l'Université 1966.

[3] Kluge, R.: Nichtlineare Variationsungleichungen und Extremalaufgaben. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1979.

[4] Kluge, R.: Gleichmäßig monotone Potentialoperatoren auf einigen Funktionalräumen. Math. Nachr. **126** (1986), 301—309.

[5] Kluge, R., und S. Unger: Ein System stationärer partieller Differentialgleichungen des Ladungsträgertransportes in Halbleitern. Z. Anal. Anw. **5** (1986), 307—332.

[6] Колмогоров, А. Н.: Локальная структура турбулентности несжимаемой вязкой жидкости для очень больших чисел Рейнольдса. Докл. Акад. Наук. СССР **30** (1941), 299—303.

[7] Колмогоров, А. Н.: Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. Акад. Наук СССР, сер. физ. **6** (1942), 56—58.

[8] Кордзадзе, А. А.: О разрешимости задач динамики океана с учётом ветровых течений. Докл. Акад. Наук СССР **237** (1977), 52—55.

[9] Кордзадзе, А. А.: О разрешимости трёхмерной квазилинейной задачи бароклинного океана. Докл. Акад. Наук СССР **244** (1979), 52—56.

[10] Ladyshenskaja, O. A.: Funktionalanalytische Untersuchungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Berlin: Akademie-Verlag 1965.

[11] Ладыженская, О. А.: О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач. Тр. мат. ин-та Стеклова **102** (1967), 85—104.

[12] Launder, B. E., and D. P. Spalding: Mathematical Models of Turbulence. London—New York: Academic Press 1972.

[13] Lions, J. L.: Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites nonlineaires. Paris: Dunod et Gauthier Villars 1969.

[14] Марчук, Г. И., Кочергин, В. И., Климок, В. И., и В. А. Сухоруков: Аналитические решения для экмановского турбулентного слоя океана. Докл. Акад. Наук СССР **247** (1979), 68—71.

[15] Марчук, Г. И., и др.: Проблемы математического моделирования морских и океанических течений. В кн.: Актуальные проблемы прикладной математики и математического моделирования (ред.: А. С. Алексеев). Новосибирск: Изд-во Наука 1982, 97—115.

[16] Morrey, C. B. Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1966.

[17] Rodi, W.: Turbulenzmodelle und ihre Anwendung auf Probleme des Wasserbaus. Habilitationsschrift. Karlsruhe: Universität 1978.

[18] Соболев, С. Л.: Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Акад. Наук. 1962.

[19] Солонников, В. А.: Оценки решений нестационарной системы Навье Стокса. Зап. науч. сем. ЛОМИ **38** (1973), 153—231.

[20] Temam, R.: Navier Stokes equations. Theory and numerical analysis. Amsterdam: North Holland Publ. Comp. 1979.

Manuskripteingang: 25. 06. 1988

VERFASSER:

Prof. Dr. Reinhard Kluge
Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik
der Akademie der Wissenschaften
DDR-1086 Berlin, Mohrenstr. 39