Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 8 (6) 1989, S. 557–561

Об одной задаче протекания вязкой жидкости

Н. Д. Копачевский и С. Г. Крейн

Посвящается С. Г. Михлину к восьмидесятилетию его рождения

Es wird in linearer Form die Bewegung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit in einem beschränkten Gebiet bei einem bestimmten Ein- und Ausflußregime durch die Oberfläche betrachtet.

Рассматривается в линейной постановке задача о движении вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области при определённом режиме втекания и вытекания на частях ее границы.

The motion of a viscous incompressible fluid in a bounded area is considered in a linear form under certain rules for the influx and outflow through the surface.

1. Постановка задачи. Предположим, что ограниченный сосуд Ω с липшицевой границей, целиком заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, имеет два плоских отверстия Γ_1 и Γ_2, расположенных в горизонтальных плоскостях. При этом весь сосуд расположен под плоскостью, в которой лежит верхнее отверстие Γ_2. Через нижнее отверстие Γ_1 подается та же жидкость с заданной малой скоростью $u_3(t, x) = \varphi(t, x), x \in \Gamma_1$. Через Γ_2 жидкость свободно вытекает, и поэтому там предполагаются равными нулю касательные и нормальные напряжения в жидкости, а на Γ_1 равны нулю только касательные напряжения. Линеаризованная задача о малых движениях жидкости при указанных режимах втекания и вытекания сводится к решению следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \ \Omega,\\ &\mathbf{u} = 0 \quad \text{на боковой поверхности } S,\\ &\tau_{13}(\mathbf{u}) = \tau_{23}(\mathbf{u}) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\\ &u_3 = \varphi \ \text{ на } \ \Gamma_1, \quad -p + \varrho\nu\tau_{33}(\mathbf{u}) = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ — искомая скорость жидкости в точке x и момент времени t, $p = p(t, x)$ — давление, $\varrho > 0$ — плотность и $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости, предполагаемые постоянными; $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, x)$ — поле малых объемных сил; наконец, $\{\varrho\nu\tau_{ij}(\mathbf{u})\}_{i,j=1}^3$ — тензор напряжений, возникающих от действия вязких сил при движении жидкости: $\tau_{ij}(\mathbf{u}) = \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$. Требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее заданному условию

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x). \tag{2}$$

При этом естественно должно быть выполнено условие согласования

$$u_3^0(x) = \varphi(0, x) \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \tag{3}$$

2. Функциональные пространства. Как обычно, через $\mathbf{L}_2(\Omega)$ обозначается гильбертово пространство всех полей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$ $(x \in \Omega)$ с конечной кинетической энергией, снабженное нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\mathbf{u}|^2\, d\Omega\right)^{1/2}$. Подпространство в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, получаемое замыканием совокупности всех соленоидальных финитных в Ω полей, обозначается через $\mathbf{J}_0(\Omega)$. Известно ортогональное разложение Вейля $\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}(\Omega)$, где $\mathbf{G}(\Omega)$ — подпространство всех потенциальных полей ∇p с потенциалами p из пространства Соболева $H^1(\Omega)$ $\left(= W_2{}^1(\Omega)\right)$. Рассмотрим теперь пространство $\mathbf{H}^1(\Omega)$ всех векторных полей $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, компоненты которых принадлежат $H^1(\Omega)$, с нормой

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{4}$$

и его подпространство $\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$, состоящее из всех соленоидальных полей, аннулирующихся на твердой стенке S. Естественно искать обобщенное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ задачи (1) как функцию от t со значениями в $\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$. Пользуясь неравенством Корна [1], в $\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$ можно ввести эквивалентную (4) норму, определяемую через скалярное произведение

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ij}(\mathbf{u})\, \tau_{ij}(\mathbf{v})\, d\Omega. \tag{5}$$

Тогда $\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)} = E(\mathbf{u}, \mathbf{u})$. Напомним, что величина $\varrho\nu E(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ дает скорость диссипации энергии в жидкости под влиянием вязких сил.

3. Разложение пространства $\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$. Введем оператор нормального следа γ_n на Γ_1, действующий из $\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в пространство функций на границе Γ_1 по формуле $\gamma_n \mathbf{u} = u_3|_{\Gamma_1}$. Если на пространстве образов ввести норму $\|\varphi\| = \inf\{\|u\|_{\mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)} : \gamma_n u = \varphi\}$, то оно превратится в полное пространство $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Рассмотрим теперь ядро $\operatorname{Ker} \gamma_n = \mathbf{N}^1(\Omega)$, и обозначим через $\mathbf{M}^1(\Omega)$ ортогональное к нему дополнение в смысле (5). Выясним структуру $\mathbf{M}^1(\Omega)$. Для этого напомним формулу Грина

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{v}\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_i \tau_{i3}(\mathbf{v})\, dS. \tag{6}$$

Для гладкого поля $\mathbf{w} \in \mathbf{M}^1(\Omega)$ и произвольного $\mathbf{u} \in \mathbf{N}^1(\Omega)$ она примет вид

$$0 = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^{2} u_i \tau_{i3}(\mathbf{v})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{3} u_i \tau_{i3}(\mathbf{v})\, d\Gamma.$$

Выбирая специальным образом поля $\mathbf{u}$ (см., например, [1]), получаем, что $\mathbf{w}$ удовлетворяет уравнениям и граничным условиям

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{w} + \nabla p = \mathbf{0}, & \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ в } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ на } S, & \tau_{i3}(\mathbf{w}) = 0\ (i = 1, 2) \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ -p + \tau_{33}(\mathbf{w}) = 0 & \text{на } \Gamma_2. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Каждое поле $\mathbf{g} \in \mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$ может быть разложено в сумму двух ортогональных в смысле (5) полей $\mathbf{v} \in \mathbf{N}^1(\Omega)$ и $\mathbf{w} \in \mathbf{M}^1(\Omega)$. Отсюда следует существование единственного решения задачи (7) с дополнительным условием $w_3 = g_3$ на Γ_1. Сделав замену $\mathbf{w} = \nu\mathbf{w}'$, $p = \varrho^{-1}p'$, а затем отбросив штрихи, приходим к однозначной разрешимости задачи

$$\left.\begin{aligned} &-\nu\Delta \mathbf{w} + \frac{1}{\varrho}\nabla p = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \\ &\mathbf{w} = 0 \ \text{на} \ S, \quad \tau_{i3}(\mathbf{w}) = 0\,(i = 1, 2) \ \text{на} \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ &\nu w_3 = g_3 \ \text{на} \ \Gamma_1, \quad -p + \varrho\nu\tau_{33}(\mathbf{w}) = 0 \ \text{на} \ \Gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если теперь $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, то, как указывалось выше, существует такое поле $\mathbf{g} \in \mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$, что $\gamma_n g = g_3 = \nu\varphi$ на Γ_1 и, следовательно, найдутся $\mathbf{w}$ и p, удовлетворяющие системе (8) с $g_3 = \nu\varphi$. Для решений задачи (8) введем обозначения $\mathbf{w} = \gamma_n^{-1}\varphi$, $p = p_\varphi$.

4. **Оператор Стокса.** Обозначим через $\mathbf{N}(\Omega) \supset \mathbf{J}_0(\Omega)$ замыкание $\mathbf{N}^1(\Omega)$ в норме пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Оно будет состоять из всех соленоидальных полей $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, для которых $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $S \cup \Gamma_1$. Таким образом, возникает гильбертова пара пространств $\{\mathbf{N}(\Omega), \mathbf{N}^1(\Omega)\}$, для которой можно построить порождающий оператор A [2], или оператор Стокса, определяемый из тождества

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}\, d\Omega \qquad \big(\mathbf{u} \in \mathbf{N}^1(\Omega),\ \mathbf{v} \in D(A)\big). \tag{9}$$

В силу теоремы Рисса область определения $D(A)$ оператора A будет состоять из всех полей $\mathbf{v} \in \mathbf{N}^1(\Omega)$, для которых функционал $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ограничен по $\mathbf{u}$ в норме $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Известно, что A является самосопряженным положительно определенным оператором в $\mathbf{N}(\Omega)$. При этом $D(A) \subset \mathbf{N}^1(\Omega)$ и $R(A) = \mathbf{N}(\Omega)$. Для гладкого поля $\mathbf{v} \in D(A)$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{N}^1(\Omega)$ формула Грина (6) дает равенство

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^{2} u_i\tau_{i3}(\mathbf{v})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{3} u_i\tau_{i3}(\mathbf{v})\, d\Gamma.$$

Вместе с (9) получаем

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot (A + \Delta)\, \mathbf{v}\, d\Omega = \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^{2} u_i\tau_{i3}(\mathbf{v})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{3} u_i\tau_{i3}(\mathbf{v})\, d\Gamma.$$

Отсюда следует, что поле $(A + \Delta)\,\mathbf{v}$ ортогонально совокупности всех финитных соленоидальных полей $\mathbf{u}$, а значит и всему пространству $\mathbf{J}_0(\Omega)$. В силу разложения Вейля, это поле потенциально, например, $A\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} = (1/\nu\varrho)\,\nabla p_v$. Обычными рассуждениями [1] отсюда получается, что оператор A определен на тех полях из $\mathbf{N}^1(\Omega)$, которые удовлетворяют еще дополнительным условиям $\tau_{i3}(\mathbf{v}) = 0$ $(i = 1, 2)$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $v_3 = 0$ на Γ_1 и $-p_v + \varrho\nu\tau_{33}(\mathbf{v}) = 0$ на Γ_2.

5. **Расщепление задачи.** Будем искать решение задачи (1)—(3) в виде $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $p = p_1 + p_\varphi$, где $\mathbf{w} = \gamma_n^{-1}\varphi$. Поле $\mathbf{v}$ и функция p_1 тогда должны быть решениями задачи для уравнения

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\nabla(p_1 + p_\varphi) + \nu\Delta\mathbf{v} + \nu\Delta\mathbf{w} + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}.$$

Если воспользоваться тем, что $-\nu\Delta\mathbf{w} + \dfrac{1}{\varrho}\nabla p_\varphi = 0$ в Ω и $-p_\varphi + \varrho\nu\tau_{33}(\mathbf{w}) = 0$ на Γ_2, то получим

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p_1 + \nu\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \ \text{в} \ \Omega, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = 0 \text{ на } S, && \tau_{13}(\mathbf{v}) = \tau_{23}(\mathbf{v}) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ &v_3 = 0 \text{ на } \Gamma_1, && -p_1 + \varrho\nu\tau_{33}(\mathbf{v}) = 0 \text{ на } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Мы желаем рассматривать (10) как уравнение в гильбертовом пространстве $\mathbf{N}(\Omega)$. Для этого заменим $p_1 = p_v + q$ и тогда

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nu A\mathbf{v} - \frac{1}{\varrho}\nabla q + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{w}}{dt}. \tag{11}$$

Для корректности этого уравнения в $\mathbf{N}(\Omega)$ необходимо, чтобы

$$-\frac{1}{\varrho}\nabla q + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{w}}{dt} \in \mathbf{N}(\Omega). \tag{12}$$

Применяя оператор div, получаем

$$\Delta q = \operatorname{div}\mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{13}$$

Далее, $\left(-\frac{1}{\varrho}\nabla q + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{w}}{dt}\right)\cdot\mathbf{n} = 0$ на $S \cup \Gamma_1$; или

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{n} \text{ на } S, \qquad \frac{\partial q}{\partial n} = f_3 - \varrho\frac{d\varphi}{dt} \text{ на } \Gamma_1. \tag{14}$$

Так как $p_1 = p_v + q$ и $-p_v + \varrho\nu\tau_{33}(\mathbf{v}) = 0$, то

$$q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{15}$$

Таким образом, включение (12) будет выполнено, если q выбрать как решение задачи (13)—(15). Это решение всегда единственно. При естественных условиях гладкости $\mathbf{f}$ и φ обобщенное решение существует и принадлежит пространству $H^1(\Omega)$. Тогда уравнение (11) разрешимо в пространстве $\mathbf{N}(\Omega)$ и

$$\mathbf{v}(t) = \exp(-\nu tA)\,\mathbf{v}^0 + \int_0^t \exp\left(-\nu(t-\tau)A\right)\left(-\frac{1}{\varrho}\nabla q + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{w}}{d\tau}\right)d\tau,$$

где $\mathbf{w} = \gamma_n^{-1}\varphi$, а q — решение задачи (13)—(15). Начальное значение $\mathbf{v}^0 = \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{u}(0, x) - \mathbf{w}(0, x) = \mathbf{u}^0(x) - \gamma_n^{-1}\varphi(0, x)$.

Теорема: *Пусть* $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *и выполнено условие согласования* (3), *а заданные функции* $\mathbf{f}(\cdot, x)$ *и* $\varphi(\cdot, x)$ *таковы, что задача* (13)—(15) *имеет обобщенное решение* $q(\cdot, x) \in H^1(\Omega)$, *непрерывное по* t. *Тогда задача* (1)—(3) *имеет единственное обобщенное решение* $\mathbf{u}(\cdot, x) \in \mathbf{J}^1_{0,S}(\Omega)$, *определяемое формулой*

$$\mathbf{u} = \gamma_n^{-1}\varphi + \exp(-\nu tA)\left(\mathbf{u}^0 - \gamma_n^{-1}\varphi(0, x)\right) + \int_0^t \exp\left(-\nu(t-\tau)A\right)\left(-\frac{1}{\varrho}\nabla q + \frac{1}{\varrho}\mathbf{f}(\tau) - \gamma_n^{-1}\frac{d\varphi}{d\tau}\right)d\tau.$$

Авторы выражают благодарность Чан Тху Ха за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн, С. Г., и Г. И. Лаптев: К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. Функц. анализ и его прил. 2 (1968) 1, 40–50.
[2] Крейн, С. Г., и Ю. И. Петунин: Шкалы банаховых пространств. Успехи мат. наук 21 (1966) 2, 89–168.

Manuskripteingang: 05. 10. 1988

VERFASSER:

Проф. д-р Н. Д. Копачёвский и проф. д-р С. Г. Крейн
Математический факультет Госуниверситета
СССР-333036 Симферополь 36, Ялтинская 4

Buchbesprechung

L. Gårding and L. Hörmander (Hrsg.): **Marcel Riesz—Collected Papers.** Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokyo: Springer-Verlag 1988, VI + 897 pp.

Marcel Riesz wurde am 16. 11. 1886 in Györ (Ungarn) geboren und starb am 4. 9. 1969 in Lund (Schweden). Er studierte in Budapest, Göttingen und Paris. Auf Einladung von M. Mittag-Leffler ging er 1911 nach Schweden und wirkte zunächst in Stockholm. Von 1926 bis zu seiner Emeritierung 1952 war er Professor in Lund; L. Hörmander gehörte zu den letzten von M. Riesz dort betreuten Studenten. Von 1952 bis 1962 lehrte M. Riesz als Gastprofessor in den USA.

Nach einer von L. Gårding verfaßten Würdigung des Lebens und Schaffens von M. Riesz sind im vorliegenden Band die meisten seiner 59 Arbeiten abgedruckt. Nicht aufgenommen wurde die gemeinsam mit G. H. Hardy verfaßte Monographie "The general theory of Dirichlet's series" und der mit E. Hilb verfaßte Handbuchartikel „Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen".

Angeregt von L. Fejér wandte sich M. Riesz zunächst der Summierbarkeitstheorie von trigonometrischen, Potenz- und Dirichlet-Reihen zu. Seine 1908 in ungarischer Sprache in Budapest erschienene Dissertation wurde für diesen Band von J. Horváth übersetzt und somit erstmals einer breiteren mathematischen Öffentlichkeit zugänglich gemacht. Unter anderem wurde in ihr die Summierbarkeit trigonometrischer Reihen durch arithmetische Mittel k-ter Ordnung untersucht, einer damals sehr aktuellen Thematik, die sich auf Arbeiten von E. Cesàro, O. Hölder, G. Cantor und P. Du Bois-Reymond stützte. Er führte mit Hilfe der heute nach ihm benannten „typischen Mittel" ein neues Summationsverfahren ein und setzte dieses zu