Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (1) 1990, S. 33–42

Zur lokalen Lösbarkeit nichtlinearer Differentialgleichungen vom gemischten Typ

M. GÜNTHER

Wir zeigen die Existenz von Lösungen für zwei Klassen von nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom gemischten Typ in einer Umgebung eines Punktes. Der Beweis beruht auf einer Variante des Galerkin-Verfahrens, bei der drei Banachräume eine Rolle spielen. Die dazu notwendige Koerzitivitätsungleichung erhalten wir aus geeigneten nichtlinearen Energieintegralabschätzungen.

Мы показываем существование решений для двух классов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка смешаного типа в окрестности некоторой точки. Доказательство основано на применении модифицированного метода Галеркина и использует три банаховых пространства. Необходимое для этого коэрцитивное неравенство мы получаем из соответствующих нелинейных энергетических интегральных оценок.

We show the existence of solutions for two classes of nonlinear second order differential equations of mixed type in a neighbourhood of some point. The proof is based on a modification of Galerkin's method and works with three Banach spaces. We get the necessary coercivity inequality from suitable nonlinear energy estimates.

Im folgenden befassen wir uns mit der lokalen Lösbarkeit zweier nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom gemischten Typ erster und zweiter Art für $m = 2 + n$ reelle, unabhängige Variable

$$u_{xx} + xu_{yy} + \Delta u = \varepsilon F(\varepsilon, u), \tag{A}$$

$$xu_{xx} + u_{yy} + \Delta u = \varepsilon F(\varepsilon, u), \tag{B}$$

$(x, y, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^m$. Dabei sei ε ein kleiner, reeller Parameter und $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ mit $\partial_i = \partial/\partial z_i$. Es ist auch $n = 0$ zulässig, dann soll Δ der Nulloperator sein. Über die Störungsglieder $F(\varepsilon, u)$ machen wir die folgenden Voraussetzungen:

(F) **(s, Ω)** Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ein den Nullpunkt enthaltendes Gebiet mit glattem Rand. Ferner sei $F(\varepsilon, u)$ eine endliche Summe von Ausdrücken der Gestalt $a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u$, $k \geqq 0$. Dabei seien $\beta_1, \ldots, \beta_k$ m-stellige Multiindizes mit $|\beta_1|, \ldots, |\beta_k| \leqq 2$. Die Koeffizienten a_ε seien für jedes $\varepsilon \in (0, 1]$ Elemente des Sobolev-Raumes $H^s(\Omega)$, deren Normen unabhängig von ε beschränkt sind: $\sup \{\|a_\varepsilon\|_{s,\Omega} : \varepsilon \in (0, 1]\} < \infty$.

Unser Resultat ist der folgende

Satz 1: *Es sei $s \geqq [m/2] + 3$, und $F(\varepsilon, u)$ möge die Voraussetzungen (F) (s, Ω) erfüllen. Dann gibt es in jedem der beiden Fälle* (A) *und* (B) *je ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des Nullpunktes, so daß für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ die Gleichungen* (A) *bzw.* (B) *eine Lösung $u \in H^{s+1}(V)$ mit $\|u\|_{s+1,V} \leqq 1$ besitzen.*

Die Schwierigkeiten bei der Lösung der Störungsprobleme (A), (B) liegen einzig in den Nichtlinearitäten begründet. Die Grenze zwischen hyperbolischem und elliptischem Verhalten der Differentialgleichung hängt auch von den zweiten Ableitungen von u ab. Auf der anderen Seite geben wir uns aber keinerlei Randbedingungen vor. Das vereinfacht die Problemstellung natürlich sehr. Als funktionalanalytisches Hilfsmittel zum Beweis von Satz 1 benutzen wir das folgende

Lemma: *Es sei $W \subseteq X \subseteq Y$ eine Skale von separablen, reflexiven Banachräumen mit dichten und stetigen Einbettungen und $[\cdot, \cdot]$ eine nichtentartete, stetige Bilinearform auf $W \times Y$. Schließlich sei A eine schwach folgenstetige Abbildung von $\{u \in X \mid \|u\|_X \leqq r\}$, $r > 0$ nach Y mit $[w, Aw] \geqq 0$ für alle $w \in W$ mit $\|w\|_X = r$. Dann existiert ein $v \in X$ mit $\|v\|_X \leqq r$ und $Av = 0$.*

Die Lösung v wird durch ein Galerkin-Verfahren konstruiert; siehe dazu z. B. die Betrachtungen von T. KATO [3] über lokal koerzitive Operatoren.

In §1 und §2 definieren wir die benötigten Bilinearformen für den Fall (A) bzw. (B) und geben notwendige Abschätzungen dafür an. In §3 beweisen wir Abschätzungen für die nichtlinearen Störungsglieder $F(\varepsilon, u)$ und führen dann zusammenfassend den Beweis von Satz 1.

Auf Gleichungen vom Typ (A) bzw. (B) wird man beim Studium nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Gestalt

$$\left(\sum_i \partial^2/\partial x_i^2 + \lambda(x, t)\, \partial^2/\partial t^2\right) u(x, t) = \Phi(x, t, u)$$

mit geeigneter rechter Seite Φ geführt, wenn $\lambda(0, 0) = 0$, $(\operatorname{grad} \lambda)\,(0, 0) \neq 0$ gilt. Wegen dieses Verhaltens der Funktion λ ist diese Gleichung in einer Umgebung des Ursprungs von gemischtem Typus.

Bekanntlich führt die (lokale) isometrische Einbettung einer 2dimensionalen Riemannschen Metrik $g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}\, dx^1\, dx^2 + g_{22}(dx^2)^2$ in den 3dimensionalen Euklidischen Raum auf die Lösung der Differentialgleichung (K Gaußsche Krümmung)

$$\nabla_1\nabla_1 u \nabla_2\nabla_2 u - (\nabla_1\nabla_2 u)^2 = K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\,(1 - g^{ij}\nabla_i u \nabla_j u).$$

Gilt hier $K(0, 0) = 0$ und $(\operatorname{grad} K)\,(0, 0) \neq 0$, so läßt sich deren Lösung in der Nähe des Ursprungs auf die von (A) für kleines ε und $n = 0$ zurückführen. In diesem Zusammenhang hat C.-S. LIN [4] die Gleichung (A) behandelt, aber mit ganz anderen Methoden als den hier verwendeten.

§ 1

In den Räumen $H^s(\Omega)$ sei das Skalarprodukt definiert durch

$$(u, v)_{s,\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} + \sum_{|\alpha| = s} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{0,\Omega}, \qquad (u, v)_{0,\Omega} = \int_\Omega uv\, d\mu,$$

wobei α m-stellige Multiindizes sind und $d\mu = dx\, dy\, dz_1 \cdots dz_n$ ist. Ferner sei natürlich $\|u\|_{s,\Omega} = (u, u)_{s,\Omega}^{1/2}$. Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^m$ schreiben wir vereinfachend H^s, $(u, v)_s$ und $\|u\|_s$. Wir wählen Funktionen $\beta, \gamma \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ mit $|\beta(x)| \leqq 1/16$, $0 \leqq \beta'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\beta(x) = x$ für $|x| \leqq 1/32$, sowie $0 \leqq \gamma(x) \leqq 1/4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\gamma(x) = 0$ für $|x| \leqq 1/64$, $\gamma(x) = 1/4$ für $|x| \geqq 1/32$. Es gilt dann noch

$$\frac{1}{2}\left(\beta'(x) + \gamma(x)\right) + \beta(x) \geqq 1/16 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Wir setzen mit diesen Funktionen

$$Lu = u_{xx} + \beta u_{yy} + \gamma(u_x + u_y) - \gamma u + \Delta u.$$

Für $|x| \leqq 1/64$ stimmt Lu mit der linken Seite der Gleichung (A) überein. Ferner denken wir uns die Koeffizienten a_ι der Störungsglieder $F(\varepsilon, u)$ so auf $\mathbb{R}^m$ fortgesetzt, daß für die Fortsetzungen die Voraussetzungen (*F*) $(s, \mathbb{R}^m)$ gelten; das ist auf Grund bekannter Fortsetzungssätze (siehe z. B. [6: S. 100ff.]) natürlich möglich. Bezüglich der Gleichung (A) genügt es nun, anstelle von Satz 1 die folgende Aussage zu beweisen.

Satz 1.A: *Es sei* $s \geqq [m/2] + 3$, *und es gelte* (*F*) $(s, \mathbb{R}^m)$. *Dann gibt es ein* $\varepsilon_0 > 0$, *so daß die Gleichung* $Lu = \varepsilon F(\varepsilon, u)$ *für* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *eine Lösung* $u \in H^{s+1}$ *mit* $\|u\|_{s+1} \leqq 1$ *besitzt.*

Wir definieren zwei Bilinearformen. Für $(u, v) \in H^1 \times H^0$ sei

$$[u, v]_0 = (u_x + u_y - u, v)_0,$$

und für $(u, v) \in H^{2s+1} \times H^0$ mit $s \geqq 1$ sei

$$[u, v]_s = (-1)^s (\partial_y^{2s}[u_x + u_y], v)_0 + (-1)^{s+1} \sum_{|\alpha|=s} (\partial^{2\alpha} u, v)_0.$$

Lemma 1.1: *Für alle* $u \in H^2$ *gilt die Ungleichung* $[u, Lu]_0 \geqq \frac{1}{16} \|u\|_1^2$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß man für Funktionen aus H^s partielle Integration wie bei solchen aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ durchführen kann, solange die vorkommenden Ableitungsordnungen s nicht übertreffen; insbesondere gelten dann Relationen der Art $(u_x, u_{yy})_0 = 0$ und ähnlich. Auf diese Weise finden wir zunächst

$$[u, Lu]_0 = (u_x, u_x)_0 + ([\beta + \beta'/2]\, u_y, u_y)_0 + (\gamma u, u)_0 + (\gamma[u_x + u_y], u_x + u_y)_0 - 2(\gamma u_x, u)_0 + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u, \partial_i u)_0. \qquad (2)$$

Wir beachten ferner

$$4(\gamma u, u)_0 \geqq \int_{|x| \geqq 1/32} u^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} u^2\, d\mu - \int_{|x| \leqq 1/32} \beta' u^2\, d\mu$$
$$\geqq (u, u)_0 - (\beta' u, u)_0 = (u, u)_0 + 2(\beta u, u_x)_0.$$

Dies tragen wir in (2) ein und wenden gleichzeitig die Ungleichung $(u_x + u_y)^2 \geqq u_y^2/2 - u_x^2$ an. Damit erhalten wir

$$[u, Lu]_0 \geqq ([1 - \gamma]\, u_x, u_x)_0 + ([\beta + \beta'/2 + \gamma/2]\, u_y, u_y)_0 - 2([\gamma - \beta/4]\, u, u_x)_0 + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u, \partial_i u)_0 + \frac{1}{4} (u, u)_0.$$

Außer (1) ist hier noch $2 \left| \left[\gamma - \frac{\beta}{4}\right] u u_x \right| \leqq \frac{17}{64} \left(\frac{1}{2} u^2 + 2 u_x^2 \right)$ benutzt worden. Damit folgt leicht die Behauptung ∎

Lemma 1.2: *Es gilt für alle* $u \in H^{2s+1}$, $s \geqq 1$ *mit einer Konstanten* $c = c(s, \beta, \gamma)$ *die Ungleichung* $[u, Lu]_s \geqq \frac{1}{16} \|u\|_{s+1}^2 - c \|u\|_s \|u\|_{s+1}$.

Beweis: Für beliebige m-stellige Multiindizes α mit $|\alpha| = s$ haben wir $\partial^\alpha Lu = \partial^\alpha u_{xx} + \beta\partial^\alpha u_{yy} + \partial^\alpha \Delta u + Ru$, wobei in dem Restterm Ru nur Ableitungen von u mit einer Ordnung von höchstens $s + 1$ auftreten. Demnach gilt

$$\begin{aligned}(-1)^{s+1} (\partial^{2\alpha}u, Lu)_0 &= -(\partial^\alpha u, \partial^\alpha Lu)_0\\ &\geqq (\partial^\alpha u_x, \partial^\alpha u_x)_0 + (\beta\partial^\alpha u_y, \partial^\alpha u_y)_0 + \sum_{i=1}^{n} (\partial^\alpha\partial_i u, \partial^\alpha\partial_i u)_0 - c_1 \|u\|_s \|u\|_{s+1}.\end{aligned}$$

Wegen $|\beta(x)| \leqq 1/16$ folgt hieraus leicht

$$\begin{aligned}&(-1)^{s+1} \sum_{|\alpha|=s} (\partial^{2\alpha}u, Lu)_0\\ &\geqq \frac{15}{16} \sum_{|\sigma|=s+1}{}' (\partial^\sigma u, \partial^\sigma u)_0 + (\beta\partial_y{}^{s+1}u, \partial_y{}^{s+1}u)_0 - c_1 \|u\|_s \|u\|_{s+1},\end{aligned} \tag{3}$$

wobei $\sum'$ bedeuten soll, daß der zur Ableitung $\partial_y{}^{s+1}$ gehörige Multiindex auszulassen ist. Weiter haben wir

$$\begin{aligned}&\partial_y{}^s Lu = \partial_y{}^s u_{xx} + \beta\partial_y{}^s u_{yy} + \partial_y{}^s \Delta u + \gamma\partial_y{}^s(u_x + u_y - u),\\ &(\partial_y{}^s[u_{xx} + \Delta u], \partial_y{}^s[u_x + u_y])_0 = 0\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(-1)^s (Lu, \partial_y{}^{2s}[u_x + u_y])_0 &= (\partial_y{}^s Lu, \partial_y{}^s[u_x + u_y])_0\\ &\geqq 1/2([\beta' + \gamma]\, \partial_y{}^{s+1}u, \partial_y{}^{s+1}u)_0 - 1/4(\partial_y{}^s u_x, \partial_y{}^s u_x)_0 - c_2 \|u\|_s \|u\|_{s+1}.\end{aligned} \tag{4}$$

Durch Addition der Ungleichungen (3) und (4) erhalten wir

$$[u, Lu]_s \geqq \frac{11}{16} \sum_{|\sigma|=s+1} (\partial^\sigma u, \partial^\sigma u)_0 + ([\beta + \beta'/2 + \gamma/2]\, \partial_y{}^{s+1}u, \partial_y{}^{s+1}u)_0 - c_3 \|u\|_s \|u\|_{s+1}.$$

Beachten wir hier noch (1), so bekommen wir mühelos die Behauptung ∎

Lemma 1.3: *Zu jedem $s \geqq 1$ gibt es ein $\lambda_0 = \lambda_0(s, \beta, \gamma) > 0$, so daß für alle $\lambda \in (0, \lambda_0]$ und $u \in H^{2s+1}$ die Ungleichung $[u, Lu]_0 + \lambda[u, Lu]_s \geqq \frac{1}{32} (\|u\|_1{}^2 + \lambda \|u\|_{s+1}^2)$ gilt.*

Beweis: Aus einer Interpolationsabschätzung und anschließender Anwendung einer elementaren Ungleichung folgt

$$\|u\|_s \|u\|_{s+1} \leqq c \|u\|_0{}^{1/s} \|u\|_{s+1}^{1+s/(s+1)} \leqq \tau \|u\|_{s+1}^2 + c(\tau) \|u\|_0{}^2,$$

wobei wir $\tau > 0$ noch beliebig vorgeben können. Damit erhalten wir aus Lemma 1.1 und Lemma 1.2 für beliebiges $\lambda > 0$ und $u \in H^{2s+1}$

$$[u, Lu]_0 + \lambda[u, Lu]_s \geqq \frac{1}{16} (\|u\|_1{}^2 + \lambda \|u\|_{s+1}^2) - \lambda c\tau \|u\|_{s+1}^2 - \lambda c_1(\tau) \|u\|_0{}^2.$$

Nun wählen wir τ so klein, daß $c\tau \leqq 1/32$ gilt; anschließend wird λ_0 so klein gewählt, daß auch $\lambda_0 c_1(\tau) \leqq 1/32$ gilt. Dann folgt leicht die Behauptung ∎

Lemma 1.4: *Für jedes $\lambda > 0$ und $s \geqq 1$ wird durch $[u, v] = [u, v]_0 + \lambda[u, v]_s$ eine stetige, nichtentartete Bilinearform auf $H^{2s+1} \times H^1$ definiert.*

Beweis: Die Stetigkeit ist klar. Sei jetzt $v \in H^1$ und $[u, v] = 0$ für alle $u \in H^{2s+1}$. Dann sei $w \in H^{2s+1}$ die eindeutig bestimmte Lösung der elliptischen Differentialgleichung

$$-w + \lambda(-1)^{s+1} \sum_{|\alpha|=s} \partial^{2\alpha}w = v \qquad \text{in } \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Es muß einerseits $[w, v] = 0$ sein. Andererseits haben wir

$$[w, v] = (v, v)_0 + (w_x + w_y, v)_0 + \lambda(-1)^s (\partial_y^{2s} w_x + \partial_y^{2s+1} w, v)_0 .$$

In den letzten beiden Skalarprodukten enthält ein Faktor nur Ableitungen ungerader Ordnung von w, der andere, nämlich v, nur Ableitungen gerader Ordnung von w. Also hat man $0 = [w, v] = (v, v)_0$, woraus $v = 0$ folgt. Nun sei $u \in H^{2s+1}$ und $[u, v] = 0$ für alle $v \in H^1$. Dann ist auch $[u, u] = 0$. Nach partieller Integration erhalten wir aber $-[u, u] = \|u\|_0^2 + \lambda \sum_{|\alpha|=s} \|\partial^\alpha u\|_0^2$, und deshalb muß $u = 0$ sein. Also ist $[\cdot, \cdot]$ nicht ausgeartet ∎

§ 2

Wir wenden uns der Gleichung (B) zu. In ihr machen wir mit einer positiven Zahl ϱ die Variablentransformation $\tilde{x} = \varrho x$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z}_i = z_i$. Erfüllt die rechte Seite $F(\varepsilon, u)$ die Voraussetzung (F) (s, Ω), so erfüllt die auf die neuen Variablen umgerechnete neue rechte Seite $\tilde{F}(\varepsilon, u)$ wieder die Voraussetzung (F) $(s, \tilde{\Omega})$ in einem geeigneten Bildgebiet $\tilde{\Omega}$. Wir lassen die Tilde wieder weg und betrachten anstelle von (B) im folgenden die Differentialgleichung

$$\varrho x u_{xx} + u_{yy} + \Delta u = \varepsilon F(\varepsilon, u). \tag{B$_\varrho$}$$

Es bezeichne K_r die abgeschlossene Kugel vom Radius r um den Ursprung von $\mathbb{R}^m$. Wir wählen zwei Funktionen $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit folgenden Eigenschaften: $0 \leqq f_x$, $|f| \leqq 1/2$ in $\mathbb{R}^m$, $f(x, y, z) = x$ in $K_{1/4}$ und $f_x = 0$ in $\mathbb{R}^m \setminus K_1$; ferner $0 \leqq g \leqq 1$ in $\mathbb{R}^m$, $g = 0$ in $K_{1/8}$ sowie $g = 1$ in $\mathbb{R}^m \setminus K_{1/4}$. Die Funktion f kann man ansetzen als Produkt einer Funktion von x allein und einer geeigneten „cut-off"-Funktion in den restlichen Variablen. Es gelten dann die Ungleichungen

$$f + g + f_x/2 \geqq 1/2 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^m, \qquad f + g, g \geqq 1/2 \quad \text{in } \mathbb{R}^m \setminus K_1. \tag{6}$$

Wir setzen nun mit diesen Funktionen

$$N_\varrho u = \varrho(f u_{xx} + g u_x - g u) + u_{yy} + \Delta u .$$

In $K_{1/8}$ stimmt N_ϱ mit der linken Seite der Gleichung $(B)_\varrho$ überein. Wie in §1 setzen wir die Koeffizienten a_ε in den Störungsgliedern $F(\varepsilon, u)$ so auf $\mathbb{R}^m$ fort, daß für die Fortsetzungen die Voraussetzungen (F) $(s, \mathbb{R}^m)$ gelten. Bezüglich der Gleichung (B) genügt es, anstelle von Satz 1 das Folgende zu beweisen.

Satz 1.B: *Es sei $s \geqq [m/2] + 3$, und es gelte (F) $(s, \mathbb{R}^m)$. Dann gibt es ein $\varrho > 0$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß die Gleichung $N_\varrho u = \varepsilon F(\varepsilon, u)$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ eine Lösung $u \in H^{s+1}$ mit $\|u\|_{s+1} \leqq 1$ besitzt.*

Wir definieren wieder zwei Bilinearformen. Für $(u, v) \in H^3 \times H^0$ sei

$$[u, v]_0 = (-u_{xxx} + u_{xx} - u, v)_0 ,$$

und für $(u, v) \in H^{2s+1} \times H^0$ mit $s \geqq 1$ sei

$$[u, v]_s = (-1)^{s+1} \Big(\sum_{|\alpha|=s} \partial^{2\alpha} u - \partial_x^{2s+1} u, v \Big)_0 .$$

Lemma 2.1: *Zu jeder kompakten Menge $K \subseteqq \mathbb{R}^m$ und jedem $\delta > 0$ existiert eine Konstante $c = c(K, \delta) > 0$, so daß für alle $u \in H^1$ die Ungleichung $\|u\|_{0,K}^2 \leqq \delta(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2) + c\,\|u_y\|_0^2$ gilt.*

Beweis: Es sei E eine der 2dimensionalen Ebenen in $\mathbb{R}^m$ mit $z_1 = \text{const}, \ldots, z_n = \text{const}$; ihr Flächendifferential sei $dv = dx\,dy$. Nach einer einfachen Ungleichung (siehe NIRENBERG [5], GAGLIARDO [2]) haben wir zunächst $\int\limits_E \psi^2\,dv \leqq \frac{1}{4} \int\limits_E |\psi_x|\,dv \times \int\limits_E |\psi_y|\,dv$ für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Ersetzen wir hier ψ durch φ^3 mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{4}{9} \int\limits_E \varphi^6\,dv &\leqq \int\limits_E \varphi^2\,|\varphi_x|\,dv \int\limits_E \varphi^2\,|\varphi_y|\,dv \\ &\leqq \int\limits_E \varphi^4\,dv \left(\int\limits_E \varphi_x^2\,dv\right)^{1/2} \left(\int\limits_E \varphi_y^2\,dv\right)^{1/2} \\ &\leqq \left\{\int\limits_E \varphi^6\,dv \int\limits_E \varphi^2\,dv \int\limits_E \varphi_x^2\,dv \int\limits_E \varphi_y^2\,dv\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Damit folgt nun sofort

$$\begin{aligned}\int\limits_{K\cap E} \varphi^2\,dv &\leqq c_1 \left(\int\limits_{K\cap E} \varphi^6\,dv\right)^{1/3} \leqq c_1 \left(\int\limits_E \varphi^6\,dv\right)^{1/3} \\ &\leqq c_2 \left\{\int\limits_E \varphi^2\,dv \int\limits_E \varphi_x^2\,dv \int\limits_E \varphi_y^2\,dv\right\}^{1/3}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe einer elementaren Ungleichung erhalten wir hieraus

$$\int\limits_{K\cap E} \varphi^2\,dv \leqq \delta \left(\int\limits_E \varphi^2\,dv + \int\limits_E \varphi_x^2\,dv\right) + c(K,\delta) \int\limits_E \varphi_y^2\,dv.$$

Integration dieser Ungleichung über $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ liefert die Behauptung für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Wegen der Dichtheit von $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ in H^1 gilt diese dann allgemein ∎

Lemma 2.2: *Es gibt ein $\varrho \in (0, 1)$, so daß für alle $u \in H^3$ die Ungleichung $[u, N_\varrho u]_0 \geqq \frac{1}{4} \varrho \|u\|_1^2$ gilt.*

Beweis: Nach partieller Integration und Beachtung von $\partial_x^s f = 0$, $\partial_x^s g = 0$ in $\mathbb{R}^m \setminus K_1$ erhalten wir für $u \in H^3$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}&(-u_{xxx} + u_{xx} - u, f u_{xx} + g u_x - g u)_0 \\ &\geqq ([f + g + f_x/2]\,u_{xx}, u_{xx})_0 + ([f + g]\,u_x, u_x)_0 + (gu, u)_0 \\ &\quad - c_1\{(u, u)_{0,K_1} + (u_x, u_x)_{0,K_1}\}.\end{aligned}$$

Beachten wir hier die Ungleichungen (6), so können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned}&(-u_{xxx} + u_{xx} - u, f u_{xx} + g u_x - g u)_0 \\ &\geqq \frac{1}{2} (\|u_{xx}\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2) - c_2(\|u\|_{0,K_1}^2 + \|u_x\|_{0,K_1}^2).\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1 gibt es eine Konstante c_3 mit

$$c_2(\|u\|_{0,K_1}^2 + \|u_x\|_{0,K_1}^2) \leqq \frac{1}{4} (\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2) + c_3(\|u_y\|_0^2 + \|u_{xy}\|_0^2).$$

Ferner gilt nun noch

$$(-u_{xxx} + u_{xx} - u, u_{yy} + \Delta u)_0 = \|u_{xy}\|_0^2 + \|u_y\|_0^2 + \sum_{i=1}^{n} (\|u_{xz_i}\|_0^2 + \|u_{z_i}\|_0^2).$$

Aus diesen drei Abschätzungen erhalten wir schließlich

$$[u, N_\varrho u] \geqq \frac{9}{4} (\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2)$$
$$+ (1 - \varrho c_3) (\|u_{xy}\|_0^2 + \|u_y\|_0^2) + \sum_{i=1}^{n} \|u_{z_i}\|_0^2.$$

Wählen wir nun ein $\varrho \in (0, 1)$, so daß $1 - \varrho c_3 \geqq \varrho/4$ gilt, so ergibt sich sofort die Behauptung. ∎

Vereinbarung: Wir denken uns hinfort $\varrho \in (0, 1)$ fest gewählt, so daß $[u, N_\varrho u]_0 \geqq \frac{1}{4} \varrho \|u\|_1^2$ gilt. Der Einfachheit halber schreiben wir dann Nu statt $N_\varrho u$.

Lemma 2.3: *Für* $u \in H^{2s+1}$, $s \geqq 1$ *gilt die Ungleichung* $[u, Nu]_s \geqq \frac{1}{2} \varrho \|u\|_{s+1}^2 - \varrho c \|u\|_s \|u\|_{s+1}$.

Beweis: Wir haben zunächst

$$(-1)^{s+1} \sum_{|\alpha|=s} (\partial^{2\alpha} u, Nu)_0 = -\sum_{|\alpha|=s} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha Nu)_0$$
$$\geqq -\sum_{|\alpha|=s} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha u_{yy} + \varrho f \partial^\alpha u_{xx} + \partial^\alpha \Delta u)_0 - c_1 \|u\|_s \|u\|_{s+1}$$
$$\geqq \varrho \sum_{|\alpha|=s} \left\{ (\partial^\alpha u_y, \partial^\alpha u_y)_0 + (f \partial^\alpha u_x, \partial^\alpha u_x)_0 + \sum_{i=1}^{n} (\partial^\alpha u_{z_i}, \partial^\alpha u_{z_i})_0 \right\} - c_2 \|u\|_s \|u\|_{s+1}.$$

Hieraus folgt wegen $|f| \leqq 1/2$ in $\mathbb{R}^m$ leicht

$$(-1)^{s+1} \sum_{|\alpha|=s} (\partial^{2\alpha} u, Nu)_0$$
$$\geqq \frac{1}{2} \varrho \sum_{|\alpha|=s+1} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha u)_0 + \varrho([f - 1/2]\, \partial_x^{s+1} u, \partial_x^{s+1} u)_0 - c_2 \|u\|_s \|u\|_{s+1}.$$

Andererseits haben wir

$$(-1)^s (\partial_x^{2s+1} u, Nu)_0 = (\partial_x^{s+1} u, \partial_x^s Nu)_0$$
$$\geqq (\partial_x^{s+1} u, \varrho f \partial_x^{s+2} u + \varrho s f_x \partial_x^{s+1} u + \varrho g \partial_x^{s+1} u)_0 - c_3 \|u\|_s \|u\|_{s+1}$$
$$= \varrho([s - 1/2) f_x + g]\, \partial_x^{s+1} u, \partial_x^{s+1} u)_0 - c_3 \|u\|_s \|u\|_{s+1}.$$

Aus diesen beiden Abschätzungen und (6) folgt leicht die Behauptung. ∎

Lemma 2.4: *Zu jedem* $s \geqq 1$ *gibt es ein* $\lambda_0 = \lambda_0(s, f, g) > 0$, *so daß für alle* $\lambda \in (0, \lambda_0]$ *und* $u \in H^{2s+1}$ *die Ungleichung* $[u, Nu]_0 + \lambda [u, Nu]_s \geqq 1/8 \varrho (\|u\|_1^2 + \lambda \|u\|_{s+1}^2)$ *gilt.*

Der Beweis verläuft analog dem von Lemma 1.3. ∎

Lemma 2.5: *Für jedes* $\lambda > 0$ *und* $s \geqq 1$ *wird durch* $[u, v] = [u, v]_0 + \lambda [u, v]_s$ *eine stetige, nichtentartete Bilinearform auf* $H^{2s+1} \times H^1$ *definiert.*

Beweis: Er ist eine einfache Modifikation des von Lemma 1.4; er benutzt ebenfalls die durch (5) definierte Funktion w ∎

§ 3

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung der Störungsglieder $F(\varepsilon, u)$ zu und beweisen zunächst

Lemma 3.1: *Es sei $s \geqq [m/2] + 3$, und es gelte* (F) $(s, \mathbb{R}^m)$. *Dann ist die Abbildung $F(\varepsilon, \cdot): H^{s+1} \to H^1$ schwach folgenstetig.*

Beweis: Aus den Sobolevschen Einbettungssätzen ergibt sich $\|\partial^\tau u\|_{L^\infty} \leqq c\,\|u\|_{s+1}$ für $u \in H^{s+1}$ und $|\tau| \leqq 3$ sowie $\|\partial^\tau a_\varepsilon\|_{L^\infty} \leqq c\,\|a_\varepsilon\|_s$ für $\varepsilon \in (0, 1)$ und $|\tau| \leqq 2$. Hieraus folgt für die einzelnen Terme von $F(\varepsilon, u)$ für $u \in H^{s+1}$ sofort

$$\|a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u\|_1 \leqq c\,\|a_\varepsilon\|_1\,\|u\|_{s+1}^k \leqq c'\,\|u\|_{s+1}^k. \tag{7}$$

Demzufolge ist die Abbildung $F(\varepsilon, \cdot): H^{s+1} \to H^1$ beschränkt. Es möge die Folge $\{u_k\}_{k \geqq 1}$ in H^{s+1} schwach gegen u konvergieren. Ist $\Omega \subseteqq \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, so ist die Einbettung $H^{s+1}(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$ kompakt, und deshalb gilt $\|\partial^\tau(u_k - u)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ $(|\tau| \leqq 2)$. Dann gilt aber auch $\|F(\varepsilon, u_k) - F(\varepsilon, u)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$. Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ folgt daraus $\big(F(\varepsilon, u_k) - F(\varepsilon, u), \varphi\big)_0 \to 0$. Da nun $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ dicht in H^0 und die Abbildung $F(\varepsilon, \cdot): H^{s+1} \to H^0$ beschränkt ist, folgt daraus die schwache Konvergenz $F(\varepsilon, u_k) \rightharpoonup F(\varepsilon, u)$ in H^0. Da ferner auch $F(\varepsilon, \cdot): H^{s+1} \to H^1$ beschränkt ist, muß $F(\varepsilon, u_k) \rightharpoonup F(\varepsilon, u)$ auch in H^1 schwach konvergieren ∎

Lemma 3.2: *Es sei $s \geqq [m/2] + 3$, und es gelte* (F) $(s, \mathbb{R}^m)$. *Dann gibt es ein $c > 0$, so daß für alle $u \in H^{2s+1}$ mit $\|u\|_{s+1} \leqq 1$ und alle $\varepsilon \in (0, 1]$ in beiden Fällen* (A) *und* (B) *die Ungleichungen $|[u, F(\varepsilon, u)]_0|$, $|[u, F(\varepsilon, u)]_s| \leqq c$ gelten.*

Beweis: Unter den gemachten Voraussetzungen gelten die Abschätzungen (7), aus denen sofort $\|F(\varepsilon, u)\|_0 \leqq c_1$ für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ folgt. Dann gilt auch $|[u, F(\varepsilon, u)]_0| \leqq c_2\,\|u\|_3\,\|F(\varepsilon, u)\|_0 \leqq c$. Damit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt.

Im weiteren machen wir Gebrauch von der folgenden allgemeinen Ungleichung: Sind $\tau_1, \ldots, \tau_k$ Multiindizes mit $|\tau_1| + \cdots + |\tau_k| = l \geqq [m/2] + 1$ und sind $v_1, \ldots, v_k \in H^l$, so gilt

$$\|\partial^{\tau_1} v_1 \cdots \partial^{\tau_k} v_k\|_0 \leqq c_3 \prod_{i=1}^k \|v_i\|_l. \tag{8}$$

Diese Abschätzung erhält man leicht aus der Hölderschen Ungleichung und den stetigen Einbettungen $H^l = W_2^l(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow W^{|\tau_i|}_{2l/|\tau_i|}(\mathbb{R}^m)$. Verschärfungen von (8) (siehe [3: Lemma A1]) beruhen auf Interpolationsabschätzungen vom Gagliardo-Nirenberg-Typ.

Es seien nun $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ Multiindizes mit $|\alpha| = s$, $2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $|\alpha_1| = s - 1$ und $|\alpha_2| = s + 1$; ferner sei $a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u$ $(k \geqq 0,\ |\beta_i| \leqq 2,\ a_\varepsilon \in H^s)$ einer der Terme von $F(\varepsilon, u)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|(a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u, \partial^{2\alpha} u)_0| &= |(\partial^{\alpha_1}[a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u], \partial^{\alpha_2} u)_0| \\
&\leqq \|\partial^{\alpha_1}[a_\varepsilon\, \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u]\|_0\, \|u\|_{s+1} \\
&\leqq c_4\,\|a_\varepsilon\|_{s-1}\,\|u\|_{s+1}^{k+1} \leqq c_5.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir (8) mit $l = s - 1$ und $(k + 1)$ Faktoren benutzt. Nun haben wir noch

$$|(\partial_y^{2s+1} u, a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u)_0| = |(\partial_y^{s+1} u, \partial_y^s[a_\varepsilon \partial^{\beta_1} u \cdots \partial^{\beta_k} u])_0| \tag{9}$$

und die analogen Ausdrücke mit $\partial_x^{2s+1}u$ oder $\partial_y^{2s}u_x$ anstelle von $\partial_y^{2s+1}u$ zu betrachten. Im zweiten Faktor auf der rechten Seite denken wir die Differentiation ausgeführt und behandeln zunächst Terme mit $(s+2)$-ten Ableitungen von u. Dazu muß mindestens ein β_i, etwa β_1, gleich 2 sein. Man erhält so Ausdrücke der Gestalt

$$I := \int_{\mathbb{R}^m} AD_1vD_2D_3v\,d\mu\,; \qquad A = a_\varepsilon\partial^{\beta_1}u\cdots\partial^{\beta_k}u, \qquad v = \partial_y^{s}u,$$

wobei D_1, D_2, D_3 irgend drei der Differentiationssymbole $\partial_x, \partial_y, \partial_i$ sind. Durch partielle Integration findet man $I = e_1I_1 + e_2I_2 + e_3I_3$, $e_i \in \mathbb{R}$, $I_1 = \int_{\mathbb{R}^m} D_1AD_2vD_3v\,d\mu$; I_2 und I_3 erhält man durch zyklische Vertauschung der Ziffern 1, 2, 3. Nun ist mit Hilfe des Einbettungssatzes leicht zu sehen, daß

$$|I_1| \leqq c_6\,\|u\|_{s+1}^2\,\|D_1(a_\varepsilon\partial^{\beta_1}u\cdots\partial^{\beta_k}u)\|_{L^\infty} \leqq c_7$$

ist. Also sind auch die Integrale I unabhängig von u und ε beschränkt.

Die noch verbleibenden Ausdrücke in (9) gestatten die Abschätzung

$$|(\partial_y^{s+1}u, \partial^\alpha a_\varepsilon\partial^{\alpha_1}u\cdots\partial^{\alpha_k}u)_0| \leqq \|u\|_{s+1}\,\|\partial^\alpha a_\varepsilon\partial^{\alpha_1}u\cdots\partial^{\alpha_k}u\|_0.$$

Dabei gilt $|\alpha| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| = s + |\beta_1| + \cdots + |\beta_k|$ und $|\alpha_i| \leqq s+1$, $\beta_i \leqq \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann genügt es zu zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen

$$\|\partial^\alpha a_\varepsilon\partial^{\alpha_1}u\cdots\partial^{\alpha_k}u\|_0 \leqq c_8 \tag{10}$$

gilt. Ist hier $|\alpha_i| \leqq 3$ für irgendein i, so kann man den Faktor $|\partial^{\alpha_i}u|$ mittels $\|\partial^\tau u\|_{L^\infty} \leqq c\,\|u\|_{s+1}$ $(u \in H^{s+1}, |\tau| \leqq 3)$ durch const $\|u\|_{s+1} \leqq$ const abschätzen. Demnach können wir in (10) noch $|\alpha_i| \geqq 4$ für $i = 1, \ldots, k$ annehmen. Ist jetzt $k \geqq 2$, so können wir Multiindizes ϱ_1, ϱ_2 finden, so daß $|\varrho_j| = |\beta_j| + 1 \leqq 3$, $\varrho_j \leqq \alpha_j$ für $j = 1, 2$ gilt. Dann folgt aus (8) mit $l = s - 2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha a_\varepsilon\partial^{\alpha_1}u\cdots\partial^{\alpha_k}u\|_0 &\leqq c_9\,\|a_\varepsilon\|_l\,\|\partial^{\varrho_1}u\|_l\,\|\partial^{\varrho_2}u\|_l\,\|\partial^{\beta_3}u\|_l\cdots\|\partial^{\beta_k}u\|_l \\ &\leqq c_{10}\,\|\alpha_\varepsilon\|_l\,\|u\|_{s+1}^k.\end{aligned}$$

Hieraus und aus den Voraussetzungen folgt jetzt sofort (10). Ist dagegen in (10) $k = 1$, so muß $|\alpha_1| \leqq s+1$ sein, da keine $(s+2)$-ten Ableitungen vorkommen sollten. Ist schließlich $k = 0$, so ist $|\alpha| = s$, und (10) ist trivial. Damit haben wir gezeigt, daß unter unseren Voraussetzungen alle in $[u, F(\varepsilon, u)]_s$ vorkommenden Terme beschränkt sind, und zwar sowohl im Fall (A) als auch im Fall (B) ∎

Beweis von Satz 1.A und Satz 1.B: Wir wollen das in der Einleitung zitierte Lemma anwenden. Als separable, reflexive Banachräume wählen wir dazu die Hilberträume $W = H^{2s+1}$, $X = H^{s+1}$ und $Y = H^1$ mit $s \geqq [m/2] + 3$. In jedem der beiden Fälle (A) und (B) wählen wir ein festes $\lambda > 0$, so daß für alle $u \in H^{2s+1}$ mit einem $a > 0$ die Ungleichung

$$[u, Pu]_0 + \lambda[u, Pu]_s \geqq a(\|u\|_1^2 + \lambda\,\|u\|_{s+1}^2) \tag{11}$$

gilt, wobei $P = L$ im Falle (A) und $P = N$ im Falle (B) ist (vgl. Lemma 1.3 bzw. Lemma 2.4). Nach Lemma 1.4 und Lemma 2.5 ist $[\cdot,\cdot] = [\cdot,\cdot]_0 + \lambda[\cdot,\cdot]_s$ eine stetige nichtentartete Bilinearform auf $H^{2s+1} \times H^1$. Wir setzen ferner $A(\varepsilon, u) = Pu - \varepsilon F(\varepsilon, u)$. Nach Lemma 3.1 ist die Abbildung $A(\varepsilon, \cdot)\colon H^{s+1} \to H^1$ schwach folgenstetig. Es gilt außerdem nach Lemma 3.2 und (11) für alle $u \in H^{2s+1}$ mit $\|u\|_{s+1} = 1$ und alle $\varepsilon \in (0, 1]$ die Abschätzung $[u, A(\varepsilon, u)] \geqq a\lambda - \varepsilon c$. Wählen wir also $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt auch $[u, A(\varepsilon, u)] \geqq 0$. Das oben erwähnte Lemma liefert die Existenz einer Funktion $u \in H^{s+1}$ mit $\|u\|_{s+1} \leqq 1$, für die $A(\varepsilon, u) = 0$ gilt ∎

LITERATUR

[1] ADAMS, R. A.: Sobolev spaces. New York: Acad. Press 1975.
[2] GAGLIARDO, E.: Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ric. Mat. 7 (1958), 102–137.
[3] KATO, T.: Locally coercive nonlinear equations, with applications to some periodic solutions. Duke Math. J. 51 (1984), 923–936.
[4] LIN, C.-S.: The local isometric embedding in $\mathbb{R}^3$ of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly. Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), 867 to 887.
[5] NIRENBERG, L.: On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), 115–162.
[6] WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1982.
[7] ZEIDLER, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis II — Monotone Operatoren (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 9). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1977.

Manuskripteingang: 03. 03. 1988

VERFASSER:

Dr. MATTHIAS GÜNTHER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10