Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (1) 1990, S. 15–32

О нетеровости и символах Михлина операторов типа сингулярных интегральных операторов со сдвигом

Ю. И. Карлович, В. Г. Кравченко и Г. С. Литвинчук

Посвящается С. Г. Михлину к восьмидесятилетию его рождения

Es wird eine Übersicht über allgemeine Untersuchungsmethoden der Noetherschen Bedingung für solche linearen Operatoren gegeben, die vom Typ eindimensionaler singulärer Integraloperatoren mit Translation und mit Koeffizienten mit Unstetigkeiten 1. und 2. Art sind.

Даётся обзор общих методов исследования на нетеровость линейных операторов типа одномерных сингулярных интегральных операторов со сдвигами и коэффициентами, имеющими разрывы 1-го и 2-го рода.

A review of general methods of investigation of the noetheriannes is given for operators being of the type of one-dimensional singular integral operators with shifts and coefficients having discontinuities of the 1st and 2nd kind.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутая подалгебра алгебры $\mathcal{L}(X)$ всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X (или, более общо, $\mathfrak{M}$ — некоторая фиксированная совокупность замкнутых операторов, действующих в X), I — тождественный оператор, P_+ — непрерывный проектор в X и $P_- = I - P_+$. Любой оператор вида

$$T_{A,B} = AP_+ + BP_-, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathfrak{M}$, будем называть *парным оператором* (см., например, [33]). Классическим примером парного оператора является одномерный сингулярный интегральный оператор, получающийся из (1), если A и B — операторы умножения на функции заданного класса, $P_\pm = (I \pm S)/2$, S — оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши. Хорошо известно, что теория одномерных сингулярных интегральных операторов послужила отправным моментом для разработки общих методов исследования нетеровости различных классов линейных операторов. В работах З. И. Халилова, Ю. И. Черского, И. Ц. Гохберга, И. А. Фельдмана, З. Прёсдорфа и других авторов (см. [33], а также [9]) абстрагировались некоторые свойства оператора S и строилась теория Нетера получаемых при этом парных операторов. Такой подход позволил создать единую общую схему построения нетеровской теории, в которую укладываются как сингулярные интегральные уравнения, так и некоторые классы интегральных и дискретных уравнений в свёртках. Заметим, что среди других важную роль при построении упомянутой абстрактной схемы играет свойство

(a) Обратимые в $\mathfrak{M}$ операторы образуют плотное множество в $\mathfrak{M}$.

Однако в дальнейшем обнаружилось, что в эту общую схему исследования нетеровости не укладываются сингулярные интегральные операторы со сдвигом (определение см. ниже). Так, например, в теории этих операторов в качестве $\mathfrak{M}$ может фигурировать алгебра функциональных операторов, которая не удовлетворяет свойству (а).

В середине 60-х годов И. Б. Симоненко разработал ([35], см. также [36]) новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, которые, в принципе, можно рассматривать как далеко идущее обобщение парных операторов на тот случай, когда вместо пары проекторов вводится бесконечная абелева полугруппа проекторов. Точнее, им были рассмотрены операторы, названные *операторами локального типа*, которые с точностью до компактного оператора коммутируют с любым оператором умножения на непрерывную функцию. Локальный метод получил дальнейшее развитие в работах Г. Аллана, Р. Дугласа и Д. Сарасона, И. Ц. Гохберга и Н. Я. Крупника и других авторов (см., например, [1, 2, 8, 11]). Однако оказалось, что такого рода варианты и обобщения локального метода нельзя применить к сингулярным интегральным операторам со сдвигом, во всяком случае, если сдвиг некарлемановский, т. е. порождает бесконечную циклическую группу итераций. Дело в том, что сингулярные интегральные операторы с некарлемановским сдвигом не являются операторами локального типа и требуют принципиально нового подхода. Отсюда понятно, что развитие теории сингулярных интегральных операторов со сдвигом позволило разработать общие методы исследования нетеровости новых классов операторов. Частично эти методы нашли отражение в обзорной статье авторов [18]. Подробное изложение содержится в [17]. С помощью этих методов в [17] построена нетеровская теория для алгебр сингулярных интегральных операторов с линейчатыми коэффициентами (т. е. равномерными пределами кусочно-непрерывных функций) и циклической группой сдвигов, имеющих конечное множество неподвижных точек.

Основная цель настоящей статьи состоит в том, чтобы дать обзорное (без доказательств) изложение ряда последних результатов в разработке методов исследования нетеровости сингулярных интегральных операторов со сдвигом. Первое направление, развиваемое В. Г. Кравченко [23, 24] и отражённое в п. 2, обобщает метод [17] на неограниченные операторы и тесно связано с проблемой исследования неэллиптических (по терминологии З. Прёсдорфа [33]) сингулярных интегральных операторов со сдвигом (см. [25, 26]). Второе направление, развиваемое Ю. И. Карловичем [16], связано с разработкой локальных методов исследования нетеровости ограниченных операторов нелокального типа и приложением этих методов к алгебрам операторов типа свёртки с дискретными группами сдвигов и коэффициентами, допускающими разрывы 1-го и 2-го рода (см. [14—16]). В этом направлении разработано два общих абстрактных метода соответственно для банахова и гильбертова пространства. Первый метод (см. п. 3) существенно развивает метод [17], что позволяет, в частности, строить символы Михлина и исследовать на нетеровость в пространствах L_p алгебры сингулярных интегральных операторов с нециклическими и некоммутативными дискретными группами сдвигов, а также алгебры сингулярных интегральных операторов с циклическими группами, порождёнными эргодическим (без периодических точек) сдвигом. Второй метод (см. п. 5), тесно связанный с изучением скрещенных произведений C^*-алгебр $\mathfrak{U}$ на группы, действующие $*$-автоморфизмами на $\mathfrak{U}$, позволяет по единой схеме исследовать нетеровость в пространстве L_2 для различных алгебр как одномерных, так и многомерных операторов типа свёртки с дискретными группами сдвигов по прямым и двойственным по Фурье переменным при наличии разрывов у коэффициентов и предсимволов. В п. 4—6 рассмотрены различные приложения упомянутых выше двух локальных методов к построению символов Михлина и исследованию нетеровости операторов из конкретных алгебр функциональных операторов, сингулярных интегральных операторов со сдвигом и операторов типа свёртки со сдвигами и осциллирующими коэффициентами.

Критерии нетеровости операторов выражаются нами в терминах символов Михлина. Понятие символа оператора впервые было введено С. Г. Михлиным в 1936 г. ([29, 30], см. также [31]). В дальнейшем под *алгеброй символов Михлина* рассматриваемой алгебры $\mathfrak{N}$ операторов понимается банахова алгебра $\mathcal{S}$, изоморфная фактор-алгебре $\mathfrak{N}/\mathcal{L}_0(X)$, где $\mathcal{L}_0(X)$ — идеал компактных в X операторов. Как правило, алгебра символов Михлина устроена проще исходной алгебры операторов. Обычно алгебры $\mathcal{S}$ и $\mathfrak{N}/\mathcal{L}_0(X)$ являются наполненными и тогда нетеровость операторов из $\mathfrak{N}$ эквивалентна обратимости в $\mathcal{S}$ их символов Михлина.

С. Г. Михлин вот уже четверть века внимательно следит за развитием теории сингулярных интегральных операторов со сдвигом. Каждый из авторов этой статьи за эти годы не раз ощутил на себе его доброжелательное отношение и заботливую поддержку старшего коллеги. Это придало нам смелости предложить данную статью в номер журнала, посвящённый 80-летию дорогого Соломона Григорьевича.

2. Неограниченные парные операторы

Пусть $\mathcal{C}(X)$ — совокупность всех замкнутых операторов, действующих из X в X. Через $\mathfrak{M}_1$ обозначим множество операторов $A \in \mathcal{C}(X)$, для которых операторы P_+AP_- и P_-AP_+ компактны относительно AP_- и AP_+ соответственно. (По поводу определений и свойств неограниченных операторов, использованных нами, мы отсылаем читателя к монографии [21].) Пусть $T_A = AP_+ + AP_-$ и $K_A = AP_+ - P_+A = P_-A - AP_-$. Отметим, что $T_A \subset A$, но не обязательно $T_A = A$.

Лемма 1: *Оператор $A \in \mathcal{C}(X)$ принадлежит $\mathfrak{M}_1$ тогда и только тогда, когда оператор K_A компактен относительно оператора T_A.*

Таким образом, $\mathfrak{M}_1 \cap \mathcal{L}(X)$ — это совокупность всех линейных ограниченных операторов, коммутирующих с точностью до компактного с проекторами $P_\pm$. Как известно (см., например, [33]), для $A, B \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathcal{L}(X)$ из нетеровости A и B следует нетеровость $T_{A,B}$. В случае неограниченных $A, B \in \mathfrak{M}_1$ это, вообще говоря, не так. Напомним что замкнутый оператор называется *n (d)-нормальным* или *Φ_+ (Φ_-)-оператором*, если он нормально разрешим и его ядро (коядро) конечномерно. Справедлива

Лемма 2: *Если $A, B \in \mathfrak{M}_1$ и операторы T_A и T_B нетеровы (одновременно n- или d-нормальны), то оператор $T_{A,B}$ нетеров (соответственно n- или d-нормален).*

Рассмотрим вопрос о необходимости условий нетеровости замкнутого парного оператора. Как легко понять, условие $A, B \in \mathfrak{M}_1$, вообще говоря, не связано с этой задачей. Необходимы другие ограничения на коэффициенты. Одно из них связано со свойством (a) множества $\mathfrak{M}$, отмеченном во введении. Мы рассмотрим другие подходы к этой проблеме. Пусть $\mathcal{D}(A)$ — область определения оператора A.

Определение 1: Будем говорить, что *оператор $A \in \mathcal{C}(X)$ имеет существенное ядро (коядро) относительно оператора $E \in \mathcal{L}(X)$*, если существует такой оператор $\Pi \in \mathcal{L}(X)$, что $\operatorname{im} \Pi \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(AE)$ и оператор $A\Pi$ (соответственно ΠA) является, а оператор $E\Pi$ (ΠE) не является A- и AE-компактным оператором.

Пусть $\mathcal{O}(\varepsilon, A)$ — совокупность таких операторов $A_\varepsilon \in \mathscr{C}(X)$, что $\hat{\delta}(A_\varepsilon, A) < \varepsilon$, где $\delta(A_\varepsilon, A)$ — раствор между замкнутыми операторами A_ε и A. Через $\mathfrak{M}_0$ обозначим множество операторов $A \in \mathscr{C}(X)$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся операторы $A_\varepsilon \in \mathscr{C}(X)$ и $\Pi_\varepsilon \in \mathscr{L}(X)$, для которых $A_\varepsilon P_\pm \in \mathcal{O}(\varepsilon, AP_\pm)$ и выполняется хотя бы одно из условий

(i) $\operatorname{im} \Pi_\varepsilon \subset \mathscr{D}(A_\varepsilon) \cap \mathscr{D}(K_{A_\varepsilon})$ и $A_\varepsilon \Pi_\varepsilon, K_{A_\varepsilon}\Pi_\varepsilon'$ — компактные, а $P_+\Pi_\varepsilon, P_-\Pi_\varepsilon$ — не компактные операторы;

(ii) операторы $\Pi_\varepsilon A_\varepsilon$ и $\Pi_\varepsilon K_{A_\varepsilon}$ компактны относительно T_{A_ε}, а $\Pi_\varepsilon P_+, \Pi_\varepsilon P_-$ — не компактные операторы. Отметим, что оператор $A \in \mathfrak{M}_0$ не обязан принадлежать множеству $\mathfrak{M}_1$. Однако, если для любого $\varepsilon > 0$ удаётся построить $A_\varepsilon \in \mathfrak{M}_1$, то для принадлежности $A \in \mathfrak{M}_0$ достаточно, чтобы A_ε имел существенное ядро или коядро относительно $P_\pm$.

Лемма 3: *Пусть $T_{A,B} \in \mathscr{C}(X)$. Если хотя бы один из операторов A или B принадлежит $\mathfrak{M}_0$, то оператор $T_{A,B}$ не нетеров.*

Пусть $\Phi(X)$ — совокупность всех нетеровых операторов из $\mathscr{C}(X)$ и $\tilde{\Phi}(X)$ — совокупность всех таких операторов $A \in \mathscr{C}(X)$, что $T_A \in \Phi(X)$. Из лемм 2 и 3 следует

Теорема 1: *Если $A, B \in \left(\mathfrak{M}_1 \cap \tilde{\Phi}(X)\right) \cup \mathfrak{M}_0$, то оператор $T_{A,B}$ нетеров тогда и только тогда, когда операторы T_A и T_B нетеровы.*

Теорему 1 можно обобщить на тот случай, когда нетеровы A и B не принадлежат $\mathfrak{M}_1$. Для этого введём понятие относительной нетеровости. Пусть X, Y, Z и W — банаховы пространства и $\mathscr{L}_0(X, Y)$ — совокупность компактных операторов из $\mathscr{L}(X, Y)$.

Определение 2: **1.** Пусть $T: X \to Y$, $H_1: X \to Z$ и $\mathscr{D}(H_1) \supset \mathscr{D}(T)$. Оператор $R_1: Y \to Z$ назовём *левым H_1-регуляризатором* оператора T, если $\mathscr{D}(R_1) \supset \operatorname{im} T$ и существует такой оператор $K_1 \in \mathscr{L}_0(X, Z)$, что $R_1Tx = H_1x + K_1x$, $x \in \mathscr{D}(T)$.

2. Пусть $T: X \to Y$, $H_2: W \to Y$. Оператор $R_2: W \to X$ назовём *правым H_2-регуляризатором* оператора T, если $\mathscr{D}(R_2) \supset \mathscr{D}(H_2)$, $R_2\mathscr{D}(H_2) \subset \mathscr{D}(T)$ и существует такой оператор $K_2 \in \mathscr{L}_0(W, Y)$, что $TR_2w = H_2w + K_2w$, $w \in \mathscr{D}(H_2)$.

3. Будем говорить, что оператор T *нетеров относительно пары операторов* H_1 и H_2 или, короче, (H_1, H_2)*-нетеров*, если у него существуют ограниченные левый H_1-регуляризатор и правый H_2-регуляризатор. Если $X = W$, $Z = Y$ и $H_1 = H_2 = H$, то говорим об *H-нетеровости* оператора T.

Заметим, что, если $T \in \mathscr{C}(X, Y)$ и нетеров, то он также (H_1, H_2)-нетеров для любых линейных ограниченных операторов $H_1: X \to Z$ и $H_2: W \to Y$. Однако, если хотя бы один из операторов H_1, H_2 не ограничен, то это, вообще говоря, не так. Более того, не всегда существует даже неограниченный правый H_2-регуляризатор. Справедлива

Лемма 4: *Пусть $T \in \mathscr{C}(X, Y)$, $H_1: X \to Z$, $H_2: W \to Y$, $\mathscr{D}(H_1) \supset \mathscr{D}(T)$ и оператор T нетеров. Тогда оператор T всегда имеет левый H_1-регуляризатор, а правый H_2-регуляризатор существует тогда и только тогда, когда для некоторого проектора $\Pi: Y \to \operatorname{im} T$ оператор $(I - \Pi)H_2$ допускает непрерывное расширение.*

Ясно, что в случае замкнутого оператора T и ограниченных нетеровых операторов H_1 и H_2 (H_1, H_2)-нетеровость оператора T эквивалентна его нетеровости.

Поэтому понятие относительной нетеровости непосредственно обобщает понятие нетеровости оператора. Оно оказывается особенно удобным при исследовании оператора, когда априори ясно, что условия нетеровости оператора содержат разнохарактерные части, так как позволяет изучить каждую из этих частей в отдельности.

В дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые нами операторы замкнуты.

Лемма 5: *Если операторы A и B n-нормальны и парный оператор $T_{A,B}$ имеет ограниченные левые P_-AP_+- и P_+BP_--регуляризаторы, то оператор $T_{A,B}$ n-нормален.*

Лемма 6: *Пусть операторы T_A и T_B имеют ограниченные правые регуляризаторы и парный оператор $T_{A,B}$ имеет правые K_A- и K_B-регуляризаторы R_A и R_B соответственно такие, что $\mathcal{D}(R_A) = \mathcal{D}(T_A)$ и $\mathcal{D}(R_B) = \mathcal{D}(T_B)$. Тогда оператор $T_{A,B}$ имеет ограниченный правый регуляризатор.*

Теорема 2: *Если $A, B \in \tilde{\Phi}(X) \cup \mathfrak{M}_0$, то оператор $T_{A,B}$ нетеров тогда и только тогда, когда операторы T_A и T_B нетеровы и для оператора $T_{A,B}$ выполняются условия лемм* 5 *и* 6.

Таким образом, условия нетеровости парного оператора $T_{A,B}$ состоят из двух разнохарактерных частей: условий, обеспечивающих нетеровость операторов T_A и T_B и условий, обеспечивающих относительную нетеровость парного оператора. На последнем мы остановимся более подробно ниже, рассматривая ограниченные операторы. А сейчас, для иллюстрации приведенных фактов рассмотрим некоторые неограниченные сингулярные интегральные операторы (см. также [23—26]).

Пусть Γ_0 — единичная окружность, S — оператор сингулярного интегрирования с ядром Коши, т.е. $(S\varphi)(t) = (\pi i)^{-1} \int\limits_{\Gamma_0} (\tau - t)^{-1} \varphi(\tau)\, d\tau$, $P_\pm = (I \pm S)/2$ и $T_{a,b} = aP_+ + bP_-\colon L_p \to L_p$, $1 < p < \infty$. С помощью леммы 3 легко доказывается

Лемма 7: *Если a, b — измеримые функции и оператор $T_{a,b}$ нетеров, то* $\operatorname{ess\,inf} \{|a(t)|: t \in \Gamma_0\} > 0$, $\operatorname{ess\,inf} \{|b(t)|: t \in \Gamma_0\} > 0$.

Пусть ϱ — неотрицательная измеримая функция на Γ_0 такая, что $\ln \varrho \in L_1$. Через $e(\varrho)$ будем обозначать угловое предельное значение (при $z \to t$, $|z| < 1$) внешней функции: $e_\varrho(z) = \exp\left\{(2\pi)^{-1} \int\limits_{\Gamma_0} \big((\tau + z)/(\tau - z)\big) \ln \varrho(\tau)\, |d\tau|\right\}$. Пусть измеримая функция a представлена в виде $a = \hat{a}\check{a}$, где $\hat{a}(t) = 1$, когда $|a(t)| > 1$, и $\check{a}(t) = 1$, когда $|a(t)| \leq 1$. Через $\widetilde{QC}$ обозначим совокупность измеримых функций a, для которых $\ln |\check{a}| \in L_1$ и $ae(|\check{a}|^{-1}), \bar{a}e(|\check{a}|^{-1}) \in H_\infty + C$. Напомним (см., например, [5: с. 374]), что через QC обозначается совокупность квазинепрерывных функций, т.е. $QC = (H_\infty + C) \cap \overline{H_\infty + C}$. Ясно, что $QC \subset \widetilde{QC}$. На основе теоремы 1 доказывается

Теорема 3: *Пусть $a, b \in \widetilde{QC}$. Тогда сингулярный интегральный оператор $T_{a,b}\colon L_p \to L_p$ нетеров в том и только том случае, когда нетеровы операторы $T_a = aP_+ + aP_-$ и $T_b = bP_+ + bP_-$.*

Теорему 3 дополняет

Теорема 4: *Пусть $a \in \widetilde{QC}$. Оператор $T_a\colon L_p \to L_p$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда* 1. $\operatorname{ess\,inf} \{|a(t)|: t \in \Gamma_0\} > 0$ *и* 2. $e(|a|)\, \overline{e(|a|^{-1})} \in QC$.

Пусть $\hat{QC}$ — совокупность таких функций $a \in \widetilde{QC}$, для которых либо не выполняется условие 1, либо выполняются одновременно два условия 1 и 2 теоремы 4. Ясно, что $QC \subset \hat{QC} \subset \widetilde{QC}$.

Теорема 5: *Пусть $a, b \in \hat{QC}$. Для того, чтобы оператор $T_{a,b}$ был нетеров, необходимо и достаточно выполнения условий леммы 7. Если оператор $T_{a,b}$ нетеров, то* $\operatorname{ind} T_{a,b} = \operatorname{ind} \overline{be(|b|^{-1})} - \operatorname{ind} ae\,(|a|^{-1})$.

3. Ограниченные парные операторы и их обобщения. Первый метод исследования нетеровости

В случае ограниченных парных операторов естественно предположить, как уже отмечалось, что его коэффициенты берутся из некоторой подалгебры $\mathfrak{M} \subset \mathcal{L}(X)$. А это, в свою очередь, приводит нас к необходимости рассмотрения операторов из наименьшей замкнутой алгебры $\mathfrak{N}$, содержащей $\mathfrak{M}$ и операторы $P_\pm$. Но оператор (1), вообще говоря, не является типичным представителем алгебры $\mathfrak{N}$. Любой оператор этой алгебры, конечно, может быть записан в виде (1), но тогда его коэффициенты не обязаны принадлежать $\mathfrak{M}$. А это, как показывает теорема 2, затрудняет его исследование на нетеровость. Удобней вместо оператора (1) рассматривать оператор

$$N = A_+P_+ + A_-P_- + H_0, \tag{2}$$

где $A_\pm \in \mathfrak{M}$, а H_0 принадлежит некоторому идеалу $\mathfrak{H}$ алгебры $\mathfrak{N}$. Прежде чем описывать идеал $\mathfrak{H}$, избавимся ещё от одного ограничения. В дальнейшем будем считать, что P_+ и P_- — ограниченные операторы (не обязательно проекторы), удовлетворяющие условию $P_+ + P_- = I$. Обозначим $P_+ - P_- = S$. Ясно, что $P_\pm = (I \pm S)/2$ и $P_+P_- = P_-P_+ = (I - S^2)/4$. Будем считать, что $\mathcal{L}_0(X) \subset \mathfrak{N}$, и под $\mathfrak{H}$ будем понимать минимальный двусторонний замкнутый идеал алгебры $\mathfrak{N}$, содержащий $\mathcal{L}_0(X)$, оператор $(I - S^2)/4$ и все коммутаторы $[A, S] = AS - SA$, $A \in \mathfrak{M}$. В статье [17] (см. также [18]) описана схема исследования на нетеровость операторов вида (2), когда $\mathfrak{M} \subset \Phi(X) \cup \mathfrak{M}_0$. Естественной реализацией парных операторов являются сингулярные интегральные операторы со сдвигом. Однако условие $\mathfrak{M} \subset \Phi(X) \cup \mathfrak{M}_0$ выполняется не для всех классов таких операторов. Исследование новых классов привело Ю. И. Карловича к необходимости обобщить понятие наличия у оператора существенного ядра (коядра).

Пусть $|T| = \inf\{\|T + K\|: K \in \mathcal{L}_0(X)\}$ — существенная норма оператора T. Сначала установим условия, при которых нетеровость N влечёт обратимость операторов $A_\pm \in \mathfrak{M}$. Пусть

(П1) для любого необратимого оператора $A \in \mathfrak{M}$, любого $H_0 \in \mathfrak{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие операторы $A_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ и $H_\varepsilon \in \mathfrak{H}$, что $|A - A_\varepsilon| < \varepsilon$, $|H_0 - H_\varepsilon| < \varepsilon$ и выполняется одно из двух условий:

(i) существуют две последовательности $\{f_n^\pm\}$ элементов $f_n^\pm \in X$ с единичной нормой такие, что последовательности $\{A_\varepsilon f_n^\pm\}$ и $\{Hf_n^\pm\}$ для всех $H \in \mathfrak{H}_\varepsilon = \{[A_\varepsilon, S], S^2 - I, P_\pm H_\varepsilon, H_\varepsilon P_\pm\}$ сходятся в X, а последовательности $\{P_+f_n^+\}$ и $\{P_-f_n^-\}$ не содержат сходящихся в X подпоследовательностей;

(ii) существуют две последовательности $\{\varphi_n^\pm\}$ элементов $\varphi_n^\pm \in X^*$ с единичной нормой такие, что последовательности $\{A_\varepsilon^*\varphi_n^\pm\}$ и $\{H^*\varphi_n^\pm\}$ для всех $H \in \mathfrak{H}_\varepsilon$ сходятся в X^*, а последовательности $\{P_+^*\varphi_n^+\}$ и $\{P_-^*\varphi_n^-\}$ не содержат сходящихся в X^* подпоследовательностей.

Обратимость слева (справа) операторов $A_\pm$ следует из $n(d)$-нормальности оператора N при более сильном предположении: (**П1'**) для любого необратимого слева (справа) оператора $A \in \mathfrak{M}$, любого $H_0 \in \mathfrak{H}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие операторы $A_\varepsilon \in \mathfrak{M}$ и $H_\varepsilon \in \mathfrak{H}$, что $|A - A_\varepsilon| < \varepsilon$, $|H_0 - H_\varepsilon| < \varepsilon$ и выполняется условие (i) (соответственно, условие (ii)).

Теорема 6: 1. *При выполнении* (П1') *из n (d)-нормальности оператора* (2) *вытекает обратимость слева (справа) операторов $A_\pm$;* 2. *если выполняется* (П1), *то оператор* (2) *нетеров тогда и только тогда, когда обратимы операторы $A_\pm \in \mathfrak{M}$ и оператор N H-нетеров для всех $H \in \mathfrak{H}(N) \setminus \mathcal{L}_0(X)$, где $\mathfrak{H}(N) = \{[A_\pm, S], [A_\pm, S^2], I - S^2, H_0\}$.*

Следствие 1: *При выполнении* (П1) (*соответственно,* (П1')) *оператор $A \in \mathfrak{M}$ нетеров* (n (d)-*нормален*) *тогда и только тогда, когда он обратим* (*обратим слева (справа)*).

Во второй части метода исследование H-нетеровости N сводится к локальному исследованию H-нетеровости, а оно, в свою очередь, сводится к исследованию обычной нетеровости локальных представителей.

Для $A, B \in \mathcal{L}(X)$ обозначим $A \simeq B$, если $A - B \in \mathcal{L}_0(X)$, и $A < B$, если $A \simeq AB \simeq BA$. Множество $\pi \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathcal{L}_0(X)$ называется *локализующим классом* (ср. [8: с. 353]), если для любых $a_1, a_2 \in \pi$ существует такой оператор $a \in \pi$, что $a < a_j$ $(j = 1, 2)$. Пусть $\mathcal{M} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathcal{J}_\lambda \times \{\lambda\})$, где Λ, $\mathcal{J}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ — некоторые непустые множества, и задана двухпараметрическая система локализующих классов $\{\pi_\lambda^\alpha : (\alpha, \lambda) \in \mathcal{M}\}$, удовлетворяющая следующему условию:

(**П2**) 1. множество $\mathfrak{P} = \bigcup_{(\alpha,\lambda)\in\mathcal{M}} \pi_\lambda^\alpha$ равномерно ограничено по существенной норме;

2. коммутаторы любых двух операторов из множества $\mathfrak{P}$ являются компактными операторами;

3. для любого конечного множества $\Lambda_0 \subset \Lambda$ и любых $\alpha_\lambda \in \mathcal{J}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda_0)$ существует система $\{\Pi_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ попарно ортогональных проекторов $\Pi_\lambda \in \pi_\lambda^{\alpha_\lambda}$;

4. существует такая константа $c > 0$, что для любой конечной системы попарно ортогональных проекторов $\{\Pi_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$, где $\Pi_\lambda \in \pi_\lambda := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}_\lambda} \pi_\lambda^\alpha$, и любого конечного множества $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\} \subset \mathcal{L}(X)$ выполняется неравенство $|\sum \Pi_\lambda A_\lambda \Pi_\lambda| \leqq c \max |\Pi_\lambda A_\lambda \Pi_\lambda|$;

5. для любого $\varepsilon > 0$ и любых $\lambda \in \Lambda$, $\alpha, \beta \in \mathcal{J}_\lambda$ и $W_\lambda^\alpha, \widetilde{W}_\lambda^\alpha \in \pi_\lambda^\alpha$ существует оператор $W_\lambda^\beta \in \pi_\lambda^\beta$ такой, что $|(W_\lambda^\alpha - \widetilde{W}_\lambda^\alpha) W_\lambda^\beta| < \varepsilon$;

6. для любых $\lambda \in \Lambda$, $\alpha \in \mathcal{J}_\lambda$ и $W_\lambda^\alpha \in \pi_\lambda^\alpha$ существует такой проектор $\Pi_\lambda^\alpha \in \pi_\lambda^\alpha$, что $\Pi_\lambda^\alpha < W_\lambda^\alpha$.

Операторы $A, B \in \mathcal{L}(X)$ назовём *λ-эквивалентными* ($A \overset{\lambda}{\sim} B$), если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in \mathcal{J}_\lambda$ существует оператор $W_\lambda^\alpha \in \pi_\lambda^\alpha$ такой, что $|(A - B) W_\lambda^\alpha| < \varepsilon$, $|W_\lambda^\alpha(A - B)| < \varepsilon$. В частности, согласно условиям (П2)/2, 5 в каждом локализующем классе π_λ^α любые два элемента λ-эквивалентны. *Носителем оператора* $A \in \mathcal{L}(X)$ назовём множество $s(A) = \Lambda \setminus \{\lambda \in \Lambda : A \overset{\lambda}{\sim} 0\}$.

(**П3**) Для любого $\lambda \in \Lambda$ существуют двусторонние замкнутые идеалы $\mathfrak{H}_\lambda \subset \mathfrak{H}$, состоящие из операторов H_λ с одноточечным носителем $s(H_\lambda) = \{\lambda\}$.

Определение 3: Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ назовём *аппроксимативно локализуемым* (*по множеству* Λ), если для любого $\varepsilon > 0$ и любой выборки $\{W_\lambda^\alpha : (\alpha, \lambda) \in \mathcal{M}\}$ операторов $W_\lambda^\alpha \in \pi_\lambda^\alpha$ существует конечное множество $\Lambda_0 \subset \Lambda$ и такая система $\{\Pi_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$

попарно ортогональных проекторов $\Pi_\lambda \in \pi_\lambda$, что $\left|A - \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \Pi_\lambda A \Pi_\lambda\right| < \varepsilon$ и для каждого $\lambda \in \Lambda_0$ $\Pi_\lambda < W_\lambda{}^\alpha$ при некотором $\alpha \in \mathcal{J}_\lambda$.

Аппроксимативная локализуемость является аналогом понятия оператора локального типа [35] и обобщением понятия локализуемости из [17]. Согласно [17] оператор $H \in \mathfrak{H}$ называется *расслаиваемым*, если для любого $\lambda \in \Lambda$ $H \overset{\lambda}{=} H_\lambda$ и $H_\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$.

(П4) Пусть каждый оператор $H \in \mathfrak{H}$ аппроксимативно локализуем и расслаиваем.

Из (П2)—(П4) следует, что для любого $H \in \mathfrak{H}$ множество $s(H)$ не более чем счётно. Пусть

(П5) фактор-алгебра $\hat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}/\mathcal{L}_0(X)$ наполнена, т. е. для каждого обратимого элемента из $\hat{\mathfrak{N}}$ его обратный тоже принадлежит $\hat{\mathfrak{N}}$.

(П6) существует равномерно ограниченное семейство гомоморфизмов ψ_λ алгебры $\mathfrak{N}$ в некоторые банаховы алгебры $\mathcal{L}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, удовлетворяющее условиям:

1. существуют такие постоянные $c_1, c_2 > 0$, что для любых $\lambda \in \Lambda$ и $H_\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$ выполняются неравенства $c_1 |H_\lambda| \leqq \|\psi_\lambda(H_\lambda)\| \leqq c_2 |H_\lambda|$;

2. для каждого $\lambda \in \Lambda$ замыкание $\mathfrak{N}_\lambda$ множества $\psi_\lambda(\mathfrak{N})$ — наполненная банахова подалгебра алгебры $\mathcal{L}_\lambda$.

Определение 4: Оператор $N_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda$ назовём *локальным представителем оператора N в точке λ*, если для любого $H_\lambda \in \mathfrak{H}_\lambda$ справедливы равенства $\psi_\lambda(NH_\lambda) = N_\lambda \psi_\lambda(H_\lambda)$, $\psi_\lambda(H_\lambda N) = \psi_\lambda(H_\lambda) N_\lambda$.

Обозначим $\Lambda(N) = \bigcup_{H \in \mathfrak{H}(N)} s(H)$. С помощью теоремы 6 доказывается

Теорема 7: *Если выполняются условия* (П1)—(П6), *то оператор* (2) *нётеров тогда и только тогда, когда обратимы операторы* $A_\pm \in \mathfrak{M}$, *для любого* $\lambda \in \Lambda(N)$ *обратимы локальные представители* $N_\lambda = \psi_\lambda(N)$ *и* $\sup \{\|N_\lambda^{-1}\| : \lambda \in \Lambda(N)\} < \infty$.

4. Нетеровость и символы Михлина сингулярных интегральных операторов со сдвигом

Применим теорему 7 к сингулярным интегральным операторам со сдвигом. Пусть для простоты Γ — замкнутый гладкий контур, G — дискретная группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов контура Γ на себя с кусочно-непрерывными производными, действующая на Γ топологически свободно, т. е. для любого конечного множества $F \subset G$ на любой дуге $\gamma \subset \Gamma$ существует точка $t \in \gamma$ с попарно различными образами $g(t)$ $(g \in F)$. В пространстве $X = L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим банахову алгебру $\mathfrak{M}$ функциональных операторов, порождённую операторами умножения на кусочно-непрерывные функции и изометрическими операторами сдвига U_g $(g \in G)$, где $(U_g\varphi)(t) = |g'(t)|^{1/p} \varphi[g(t)]$, $t \in \Gamma$. Пусть $\mathfrak{N}$ — банахова алгебра сингулярных интегральных операторов со сдвигом, получаемая расширением алгебры $\mathfrak{M}$ с помощью оператора S сингулярного интегрирования по Γ с ядром Коши. Ясно, что идеал $\mathfrak{H}$ $(\supset \mathcal{L}_0(X))$ порождается коммутаторами $[A, S]$ $[(A \in \mathfrak{M})$ и характеризует особенности коэффициентов и сдвигов (а в общем случае, и контура). Локализация проводится по G-орбитам $G(t) = \{g(t) : g \in G\}$ точек $t \in \Gamma$. В её основу положено свойство отделимости любых конечных множеств, лежащих на разных орбитах. Пусть Λ — множество всех различных G-орбит точек $t \in \Gamma$, $\mathcal{J}_\lambda$ — совокупность всех конечных подмножеств на орбите $\lambda \in \Lambda$. Тогда локализующие классы π_λ^α $((\alpha, \lambda) \in \mathcal{M})$ состоят из операторов умножения на характеристические функции окрестностей конечных множеств α орбит λ. Двусторонний замкнутый идеал $\mathfrak{H}_\lambda \subset \mathfrak{H}$ порождается любым оператором $[\zeta_t I, S]$, где $t \in \lambda$, функция ζ_t непрерывна на $\Gamma \setminus \{t\}$ и в точке t имеет разрыв 1-го рода. Хотя, как правило, сингулярные интегральные операторы со сдвигом не аппроксимативно локализуемы, операторы $H \in \mathfrak{H}$ аппроксимативно локализуемы и расслаиваемы. В качестве $\mathcal{L}_\lambda$ выбирается алгебра $\mathcal{L}\big(L_p(\mathbb{R}, l_p(\lambda, \mathbb{C}^2))\big)$, где $\mathbb{C}^2$ — пространство двумерных комплексных векторов $\xi = \{\xi_i\}_1^2$ с нормой $\|\xi\| = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p}$. В случае произвольного конечного множества $F \subset G$ каждому функциональному оператору

$$A = \sum_{s \in F} a_s U_s \tag{3}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами a_s и каждой орбите $\lambda \in \Lambda$ сопоставим действующие в пространстве $l_p(G)$ дискретные операторы $A_\lambda^\pm$ по правилу $(A_\lambda^\pm f)(g) = \sum_s a_s[g(t_\lambda \pm 0)]\, f(gs)$, $g \in G$, где t_λ — произвольная фиксированная точка орбиты λ и группа G действует на Γ справа, т. е. $(gs)(\cdot) = s[g(\cdot)]$.

Лемма 8: *Если группа G действует на Γ топологически свободно и $1 \leqq p \leqq \infty$, то для любого $\lambda \in \Lambda$ соответствие $A \to A_\lambda^\pm$ продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{M}$ в $\mathcal{L}\big(l_p(G)\big)$, причём для всех $A \in \mathfrak{M}$ $\|A_\lambda^\pm\| \leqq \|A\|$, $\|A\|_0 := \inf \{\|Af\| : \|f\| = 1\} \leqq \|A_\lambda^\pm\|_0$.*

Напомним, что группа G называется *субэкспоненциальной* [3], если для любого конечного множества $F \subset G$ $\lim |F^n|^{1/n} = 1$, где $|F^n|$ — число различных слов длины n, составленных из элементов $g \in F$. В частности, субэкспоненциальны конечные группы, коммутативные, группы полиномиального роста и другие. Локальные условия обратимости функциональных операторов даёт

Теорема 8: *Если группа G субэкспоненциальна и действует на Γ топологически свободно, то алгебра функциональных операторов $\mathfrak{M}$ наполнена и для обратимости операторов $A \in \mathfrak{M}$ в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, необходимо, а при условии*

$$\|A\| = \sup \{\|A_\lambda^\pm\| : \lambda \in \Lambda\}, \qquad A \in \mathfrak{M}, \tag{4}$$

и достаточно, чтобы для любого $\lambda \in \Lambda$ в пространстве $l_p(G)$ были обратимы операторы $A_\lambda^\pm$ и $\sup \{\|(A_\lambda^\pm)^{-1}\| : \lambda \in \Lambda\} < \infty$.

Если $p = 2$, то равенство (4) выполняется автоматически. Все условия теоремы 8 выполняются, например, если G — циклическая группа сдвигов, порождённая поворотом окружности на угол, не соизмеримый с 2π, или диффеоморфизмом гладкого замкнутого контура, имеющим конечное множество периодических точек. При этом в первом случае для любого оператора $A \in \mathfrak{M}$ и любого $\lambda \in \Lambda$ $\|A\| = \|A_\lambda^\pm\|$, $\|A\|_0 = \|A_\lambda^\pm\|_0$, и оператор $A \in \mathfrak{M}$ обратим в $L_p(\Gamma)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, тогда и только тогда, когда обратим хотя бы один оператор $A_\lambda^\pm$ (эквивалентно, все $A_\lambda^\pm$). Заметим, что в случае конечного $F \subset G$ условие (4) для обратимости операторов (3) с линейчатыми коэффициентами является лишним.

Оператор-функцию $\mathcal{A}(\lambda) = \operatorname{diag}\{A_\lambda^+, A_\lambda^-\}$, $\lambda \in \Lambda$, со значениями в алгебре $\mathcal{L}\big(l_p(G) + l_p(G)\big)$ и нормой $\|\mathcal{A}\| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\mathcal{A}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(l_p(G)+l_p(G))}$ естественно назвать *символом* функционального оператора A. В силу (4) множество $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ символов операторов $A \in \mathfrak{M}$ является банаховой алгеброй, изоморфной алгебре $\mathfrak{M}$ (можно добиться изометричности!).

Теорема 9: *Пусть* $1 < p < \infty$ *и выполнены условия теоремы* 8. *Тогда*

1. *любой оператор* $N \in \mathfrak{N}$ *представим в виде* (2), *где* $A_\pm \in \mathfrak{M}$, $H_0 \in \mathfrak{H}$ *и соответствия* $N \to A_\pm$ *являются гомоморфизмами алгебры* $\mathfrak{N}$ *на алгебру* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющими условию* $\|A_\pm\| \leq c_p |N|$, $c_p = \max\{tg(\pi/2p), ctg(\pi/2p)\}$;

2. *алгебра* $\mathfrak{N}$ *удовлетворяет предположениям* (П1)—(П6), *причём гомоморфизмы* ψ_λ *алгебры* $\mathfrak{N}$ *в алгебры* $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}, l_p(\lambda, \mathbb{C}^2)))$ *задаются формулой* $\psi_\lambda(N) = \mathcal{F}_x^{-1}\psi_{\lambda,x}(N)\mathcal{F}_x$, *где* $\psi_{\lambda,x}: \mathfrak{N} \to \mathcal{L}(l_p(\lambda, \mathbb{C}^2))$ $(\lambda \in \Lambda, x \in \mathbb{R})$ — *гомоморфизмы с ядром, содержащим* $\mathcal{L}_0(L_p(\Gamma))$, *определяемые на образующих алгебры* $\mathfrak{N}$ *равенствами*

$$\psi_{\lambda,x}(aI) = \operatorname{diag}\left\{\operatorname{diag}\{a(t+0), a(t-0)\}\right\}_{t\in\lambda},$$

$$\psi_{\lambda,x}(S) = \operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} cth\,[\pi(x+ip^{-1})] & -(sh\,[\pi(x+ip^{-1})])^{-1} \\ (sh\,[\pi(x+ip^{-1})])^{-1} & -cth\,[\pi(x+ip^{-1})] \end{pmatrix}\right\}_{t\in\lambda},$$

$$\psi_{\lambda,x}(U_g) = (u_{t,\tau})_{t,\tau\in\lambda},$$

$$u_{t,\tau} = \begin{cases} \operatorname{diag}\{|g'(t+0)|^{ix}, |g'(t-0)|^{ix}\}, & \text{если } g(t) = \tau; \\ 0, & \text{если } g(t) \neq \tau; \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ — *преобразование Фурье*: $(\mathcal{F}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\varphi(y)\,dy$, $x \in \mathbb{R}$.

В итоге, в случае $1 < p < \infty$ каждому сингулярному интегральному оператору со сдвигом N, кроме символов $\mathcal{A}_\pm$ функциональных операторов $A_\pm$ сопоставляется семейство оператор-функций $\mathcal{N}_\lambda = \psi_{\lambda,\cdot}(N): \mathbb{R} \to \mathcal{L}(l_p(\lambda, \mathbb{C}^2))$ $(\lambda \in \Lambda)$ с нормой $\|\mathcal{N}_\lambda\| \doteq \|\mathcal{F}_x^{-1}\psi_{\lambda,x}(N)\mathcal{F}_x\|_{\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}, l_p(\lambda, \mathbb{C}^2)))}$. Множество наборов оператор-функций $\mathcal{N} = \{\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-, \mathcal{N}_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)\}$ с поэлементными операциями сложения и умножения, а также умножения на комплексные скаляры, снабжённых нормой $\|\mathcal{N}\| = \max\{\|\mathcal{A}_\pm\|, \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|\mathcal{N}_\lambda\|\}$, становится нормированной алгеброй $\mathcal{S}(\mathfrak{N})$. Набор $\mathcal{N}$ естественно назвать *символом сингулярного интегрального оператора со сдвигом* N.

Теорема 10: *Пусть выполнены условия теоремы* 8. *Тогда*

1. *фактор-алгебра* $\mathfrak{N}/\mathcal{L}_0(L_p(\Gamma))$ *изоморфна банаховой алгебре* $\mathcal{S}(\mathfrak{N})$;

2. *оператор* $N \in \mathfrak{N}$ *нетеров в пространстве* $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, *тогда и только тогда, когда в* $L_p(\Gamma)$ *обратимы операторы* $A_\pm \in \mathfrak{M}$, *для любого* $\lambda \in \Lambda$ *и всех* $x \in \mathbb{R}$ *в пространстве* $l_p(\lambda, \mathbb{C}^2)$ *обратимы операторы* $N_{\lambda,x} = \psi_{\lambda,x}(N)$ *и нормы операторов* $[\psi_\lambda(N)]^{-1} = \mathcal{F}_x^{-1}(N_{\lambda,x})^{-1}\mathcal{F}_x$ *в* $L_p(\mathbb{R}, l_p(\lambda, \mathbb{C}^2))$ *равномерно ограничены по* $\lambda \in \Lambda$.

Следствие 2: *При выполнении условий теоремы* 8 *нетеровость функционального оператора* $A \in \mathfrak{M}$ *в пространстве* $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, *эквивалентна его обратимости.*

Получены также обобщения теорем 8—10 для пространств $L_p^n(\Gamma)$, $n \geq 1$, на кусочно-гладких контурах без нулевых углов и дискретных групп сдвигов, как сохраняющих, так и изменяющих ориентацию, допускающих разрывы 1-го рода у себя и своих первых производных, а также имеющих „массивные" множества периодических точек. В ряде случаев удаётся получить достаточно эффективные критерии обратимости дискретных операторов $A_\lambda^\pm$ и $N_{\lambda,x}$. В частности, в случае циклической группы сдвигов с конечным множеством неподвижных точек в [15] получен более эффективный (по сравнению с теоремой 10) критерий нетеровости в L_p и вычислены индексы значительно более общих операторов типа свёртки со сдвигом.

5. C^*-алгебры операторов. Второй метод исследования нетеровости

Если $p = 2$, то алгебры функциональных операторов $\mathfrak{M}$ и сингулярных интегральных операторов со сдвигом $\mathfrak{N}$ являются C^*-алгебрами, и тогда применим второй метод изучения обратимости операторов $A \in \mathfrak{M}$ и нетеровости операторов $N \in \mathfrak{N}$. При этом сингулярные интегральные операторы со сдвигом удобно записывать (ср. с (2)) в виде предела операторов вида $\sum A_g U_g$, где A_g являются сингулярными интегральными операторами без сдвига, а g пробегает конечное подмножество группы G. Упомянутый метод является вариантом локально-траекторного метода (ср. [3, 28]), естественно обобщающим локальный метод [11, 35] на операторы нелокального типа. Суть его состоит в получении критерия нетеровости операторов вида $\sum A_g U_g$ (и их пределов) в терминах обратимости локальных представителей, отвечающих порождённым группой G орбитам точек компакта максимальных идеалов некоторой центральной подалгебры C^*-алгебры операторных коэффициентов A_g. Этот метод, хотя и применим только в случае гильбертова пространства X, вместе с тем позволяет изучить значительно более широкие классы операторов со сдвигами (в частности, расширить множество групп сдвигов, допустить у коэффициентов наряду с разрывами 1-го рода разрывы полу-почти-периодического [34] типа, исследовать содержащие $\mathfrak{N}$ алгебры операторов типа свёртки со сдвигами). Перейдём к его изложению (см. [16]).

Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторая C^*-подалгебра (с единицей) алгебры $\mathcal{L}(H)$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, Z — некоторая центральная C^*-подалгебра $\mathfrak{U}$ с единицей, G — дискретная группа, $U: g \to U_g$ — унитарное представление G в H, $\mathfrak{B} = C^*(\mathfrak{U}, U_G)$ — C^*-подалгебра $\mathcal{L}(H)$, порождённая операторами $a \in \mathfrak{U}$ и U_g $(g \in G)$. Пусть

(У1) для любого $g \in G$ отображения $\alpha_g: a \to U_g a U_g^*$ являются $*$-автоморфизмами C^*-алгебр $\mathfrak{U}$ и Z.

Пусть M — компакт максимальных идеалов алгебры Z. При выполнении (У1) устанавливается гомоморфизм группы G в группу гомеоморфизмов M по правилу: $g \to g(\cdot)$, где гомеоморфизм $g(\cdot)$ определяется равенствами $z(g(t)) = [\alpha_g(z)](t)$ $(z \in Z, t \in M)$, в которых $z(\cdot)$ — преобразование Гельфанда элемента z.

(У2) G — дискретная аменабельная группа.

Напомним, что дискретная группа G называется *аменабельной* [10: с. 13], если на пространстве $B(G)$ всех ограниченных комплексных функций на G с sup-нормой существует левоинвариантный (или правоинвариантный) положительный линейный функционал с единичной нормой, называемый *состоянием*. Заметим, что субэкспоненциальные группы аменабельны, но не наоборот [6].

Пусть $\mathcal{J}_t$ — двусторонний замкнутый идеал C^*-алгебры $\mathfrak{U}$, порождённый идеалом $t \in M$, $P_{\mathfrak{U}}$ — множество чистых состояний [4: с. 61] C^*-алгебры $\mathfrak{U}$, $\mathcal{P}_t = P_{\mathfrak{U}} \cap \mathcal{J}_t^{\perp}$. Ясно, что $P_{\mathfrak{U}} = \bigcup\limits_{t \in M} \mathcal{P}_t$.

(У3) Для любого $\varepsilon > 0$, любых конечных множеств $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$, $F \subset G$, и любого $\mu \in P_{\mathfrak{U}}$ существуют $\tau \in M$ и $\nu \in \mathcal{P}_\tau$ такие, что а) $|\nu(a) - \mu(a)| < \varepsilon$ для любого $a \in \mathfrak{U}_0$ и б) $g(\tau) \neq \tau$ для любого $g \in F \setminus \{e\}$.

Наряду с C^*-алгеброй $\mathfrak{B}$ рассмотрим скрещенное произведение $\mathfrak{U} \otimes_\alpha G$ [4: с. 145], получаемое из инволютивной банаховой алгебры $l_1(G, \mathfrak{U})$ с нормой $\|x\|_1 = \sum \|x(g)\|_{\mathfrak{U}} < \infty$, обычными операциями линейного пространства, умножением и инволюцией вида

$$(xy)(g) = \sum_{h \in G} x(h)\, \alpha_h[y(h^{-1}g)]; \quad x^*(g) = \alpha_g([x(g^{-1})]^*), \quad g \in G,$$

пополнением по новой норме $\|x\| = \sup \|\pi(x)\| \leqq \|x\|_1$, где π пробегает множество всех представлений $l_1(G, \mathfrak{U})$ в гильбертовых пространствах.

Теорема 11: *При выполнении* (У1)—(У3) *C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{U} \otimes_\alpha G$ (изометрически)*-изоморфны: $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{U} \otimes_\alpha G$.*

При более жёстких условиях теорема 11 для дискретных групп получена в целом ряде работ (см., например, [3, 27, 32] и имеющуюся там библиографию).

Пусть M_0 — такое замкнутое подмножество M, что точку τ в условии (У3) можно выбрать из орбиты $G(M_0)$ множества M_0; $\Omega(X)$ — множество G-орбит точек $t \in X$ ($\subset M$), $\Omega_0 = \Omega(M_0)$, $t = t_\omega$ — произвольная фиксированная точка орбиты $\omega \in \Omega_0$, H_ω — гильбертово пространство изометрического представления $\tilde{\pi}_t$ фактор-алгебры $\mathfrak{U}/\mathfrak{I}_t$, ϱ_t — естественный гомоморфизм $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}/\mathfrak{I}_t$, $\pi_t' = \tilde{\pi}_t \circ \varrho_t$. Рассмотрим представление $\pi_\omega\colon \mathfrak{B} \to \mathcal{L}(l_2(G, H_\omega))$, определяемое формулами

$$[\pi_\omega(a)\, f](g) = \pi_t'(\alpha_g(a))\, f(g), \; [\pi_\omega(U_h)\, f](g) = f(gh) \qquad (a \in \mathfrak{U};\, h, g \in G).$$

Для набора представлений $\{\pi_\omega\colon \omega \in \Omega_0\}$ формулируем условие

(У4) Ω_0 конечно или существуют системы $\mathfrak{M}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) измельчающихся замкнутых подмножеств из M_0 такие, что

1. множество $\mathfrak{M}_0$ состоит из одного элемента M_0;
2. для любого элемента $X \in \mathcal{M}_n$ множество G-орбит $\Omega(X)$ конечно;
3. для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и любых $\varepsilon > 0$, $X \in \mathcal{M}_i$, $x \in X$ и $a \in \operatorname{Ker} \pi_{G(x)}$ существуют открытая окрестность $u(x) \subset M$ и такое множество $Y \in \mathcal{M}_{i+1}$, что $Y \subset X$ и для всех $\omega \in \Omega(u(x) \cap X) \setminus \Omega(Y)$ выполняется неравенство $\|\pi_\omega(a)\| < \varepsilon$. С помощью теоремы 11 доказывается (ср. [3, 28])

Теорема 12: *Если выполняются условия* (У1)—(У3), *то оператор $b \in \mathfrak{B}$ обратим в пространстве H тогда и только тогда, когда для каждой орбиты $\omega \in \Omega_0$ оператор $\pi_\omega(b)$ обратим в пространстве $l_2(G, H_\omega)$ и $\sup \left\{\|(\pi_\omega(b))^{-1}\|\colon \omega \in \Omega_0\right\} < \infty$.*

При выполнении условий (У1)—(У4) *обратимость операторов $b \in \mathfrak{B}$ эквивалентна одновременной обратимости всех операторов $\pi_\omega(b)$ ($\omega \in \Omega_0$).*

В [16] получен также аналог теоремы 12 в случае нарушения (У3), ориентированный на исследование нетеровости операторов $N \in \mathfrak{N}$ при наличии у сдвигов на M „массивных" множеств неподвижных точек.

Применяя теоремы 12 и 7 соответственно к C^*-алгебрам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, получаем следующий результат.

Теорема 13: *Если G — аменабельная группа сдвигов, действующая топологически свободно на Γ, то при $p = 2$ справедливы утверждения теорем 8—10, причём в теореме 10 $\mathfrak{N}/\mathcal{L}_0(L_2(\Gamma)) \cong \mathcal{S}(\mathfrak{N})$ и $\sup \{\|\mathcal{N}_\lambda^{-1}\|\colon \lambda \in \Lambda\} = \sup \{\|N_{\lambda,x}^{-1}\|\colon (\lambda, x) \in \Lambda \times \mathbb{R}\}$.*

Так как C^*-алгебра $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию (П1′), то из теоремы 6 вытекает

Следствие 3: *При выполнении условий теоремы 13 n (d)-нормальность в $L_2(\Gamma)$ функционального оператора $A \in \mathfrak{M}$ эквивалентна его обратимости слева (справа).*

6. Сингулярные интегральные операторы со сдвигом с осциллирующими коэффициентами

С помощью метода, изложенного в п. 5, в терминах обратимости дискретных операторов получены критерии нетеровости в пространстве $L_2^n(\mathbb{R})$, $n \geqq 1$, для широкого класса C^*-алгебр сингулярных интегральных операторов с дискретными группами сдвигов и коэффициентами, допускающими разрывы полу-почти-периодического типа. При этом рассматриваемые операторы представляются в виде операторов типа свёртки со сдвигами по прямой и двойственной по Фурье переменными. Опишем получаемые C^*-алгебры операторов типа свёртки и для ряда алгебр приведём критерии нетеровости их элементов. Для простоты рассмотрим случай $n = 1$.

Пусть теперь $\mathfrak{U}$ — минимальное расширение алгебры сингулярных интегральных операторов в $L_2(\mathbb{R})$ с линейчатыми коэффициентами, инвариантное относительно преобразований $A \to U_g A U_g^{-1}$, $A \to e^{ixh} A\, e^{-ixh}$ ($g \in \mathcal{D}$, $h \in \mathbb{R}$), где $\mathcal{D}$ — множество сохраняющих ориентацию сдвигов на $\mathbb{R}$, получаемых пересадкой с единичной окружности на ось с помощью дробно-линейного преобразования диффеоморфизмов, имеющих вторые тейлоровские [33: с. 87] производные; $(U_g\varphi)(t) \doteq |g'(t)|^{1/2}\, \varphi[g(t)]$, $t \in \mathbb{R}$. Помимо сингулярных интегральных операторов и операторов свёртки с функциями класса L_1, C^*-алгебра $\mathfrak{U}$ содержит операторы вида $aU_g\mathcal{F}^{-1}b\mathcal{F}U_g^{-1}$ (a, b — линейчаты, $g \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье), суммы произведений таких операторов и их равномерные пределы. Рассмотрим C^*-алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ порождённые операторами вида

$$B = \sum_g A_g U_g, \qquad C = \sum_{h,\lambda} A_{h,\lambda}\, e^{ih\eta_\lambda(\cdot)} I, \qquad D = \sum_g C_g U_g,$$

где A_g, $A_{h,\lambda} \in \mathfrak{U}$, $C_g \in \mathfrak{C}$, $\eta_\infty(x) = x$ и $\eta_\lambda(x) = (\lambda - x)^{-1}(\lambda x + 1)$ ($\lambda, x \in \mathbb{R}$), g, h и λ пробегают произвольные конечные подмножества G, $\mathbb{R}$ и $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, G — некоторая аменабельная группа сдвигов класса $\mathcal{D}$. Очевидно, C^*-алгебры $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ совпадают соответственно с алгебрами сингулярных интегральных операторов и сингулярных интегральных операторов со сдвигом в $L_2(\mathbb{R})$, коэффициенты которых допускают разрывы полу-почти-периодического типа.

Сначала опишем теорию Нетера операторов $A \in \mathfrak{U}$. Она построена в [14, 15] для всех $p \in (1, \infty)$. Для подалгебры $\mathfrak{U}_\infty \subset \mathfrak{U}$, порождённой операторами $a\mathcal{F}^{-1}b\mathcal{F}$ с кусочно-непрерывными функциями a и b, теория Нетера в случае $1 < p < \infty$ построена ранее Р. В. Дудучавой (см. [12, 13]). Итак, пусть $\dot{\mathbb{R}}$ — одноточечная, а $\overline{\mathbb{R}}$ — двухточечная компактификация вещественной оси $\mathbb{R}$, $Q = (\dot{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus (\{\infty\} \times \mathbb{R})$ — компакт с введенной в [7] топологией, $\mathbb{C}^2$ — двумерное комплексное евклидово пространство. Образующими C^*-алгебры $\mathfrak{U}$ являются операторы $A \doteq aW_{b,\lambda} := aV_\lambda\mathcal{F}^{-1}b\mathcal{F}V_\lambda^{-1}$, где $\lambda \in \dot{\mathbb{R}}$, a и b — кусочно-непрерывные функции, $V_\infty = I$, $(V_\lambda\varphi)(x) = (x - \lambda)^{-1}\,\varphi[\eta_\lambda(x)]$ ($x, \lambda \in \mathbb{R}$). Им сопоставляются заданные на $Y = \dot{\mathbb{R}} \times Q$ символы

$$\mathcal{A}(t, x, \xi) =$$

$$\begin{bmatrix} a(t-0)\left[b(x+0)\,\mu(\xi) + b(x-0)\left(1 - \mu(\xi)\right)\right] & a(t-0)\,\nu(\xi)\,[b(x+0) - b(x-0)] \\ a(t+0)\,\nu(\xi)\,[b(x+0) - b(x-0)] & a(t+0)\left[b(x+0)\left(1 - \mu(\xi)\right) + b(x-0)\,\mu(\xi)\right] \end{bmatrix},$$

в которых $\mu(\xi) = (1 + \operatorname{th} \pi\xi)/2$, $\nu(\xi) = (2 \operatorname{ch} \pi\xi)^{-1}$ и при $t \neq \lambda$ функция b заменяется на b^∞ ($b^\infty(\pm x) = b(\pm\infty)$ при $x > 0$). Соответствие $A \to \mathcal{A}(t, x, \xi)$ продолжается до $*$-гомоморфизма C^*-алгебры $\mathfrak{U}$ на C^*-алгебру $\mathcal{S}$ заданных на Y матриц-функций $\mathcal{A}(t, x, \xi) = \big(a_{ij}(t, x, \xi)\big)_{i,j=1}^2$ с нормой оператора $\mathcal{A}I$ в пространстве $l_2(Y, \mathbb{C}^2)$ и свойствами:

1. для любого фиксированного $t \in \dot{\mathbb{R}}$ функции $a_{11}(t, x, \xi)$, $a_{12}(t, x, \xi)$, $a_{21}(t, x, \xi)$ и $a_{22}(t, x, -\xi)$ непрерывны по $(x, \xi) \in Q$;

2. $a_{ij}(t, x, \pm\infty) = 0$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и $i \neq j$;

3. Функции $a_{ii}(\cdot, \infty, \pm\infty)$ линейчаты на $\dot{\mathbb{R}}$ при $i = 1, 2$;

4. в каждой точке $t_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ элементы матрицы-функции $\mathcal{A}(t, x, \xi) - \mathcal{N}_A(t, x, \xi)$ имеют нулевые пределы по $t \to t_0$ равномерно относительно $(x, \xi) \in Q$, где $\mathcal{N}_A$ — символ сингулярного интегрального оператора $N_A = a_+P_+ + a_-P_-$ с коэффициентами $a_\pm = a_{11}(\cdot, \infty, \mp\infty)$ и проекторами Рисса $P_\pm = \mathcal{F}^{-1}\big[\big(1 \pm \operatorname{sign}(\cdot)\big)/2\big]\mathcal{F}$.

Теорема 14: *Имеет место изоморфизм* $\mathfrak{U}/\mathcal{L}_0\big(L_2(\mathbb{R})\big) \cong \mathcal{S}$.

Операторы $A \in \mathfrak{U}$ являются операторами локального типа и их символы строятся на основе модификации [8] локального метода (см. [14], ср. также [13]).

Пусть $\mathfrak{U}^0$ — плотное в $\mathfrak{U}$ множество операторов вида

$$A \simeq \sum_{i=1}^{n} (c_{i1} W_{b_{i1},\lambda_{i1}} c_{i2} W_{b_{i2},\lambda_{i2}} \dots c_{im} W_{b_{im},\lambda_{im}}),$$

где c_{ij} и b_{ij} — кусочно-непрерывные функции, $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$. Для $A \in \mathfrak{U}^0$ обозначим $\Lambda_A = \bigcup_{i,j} \{\lambda_{ij}\}$.

Теорема 15: *Оператор $A \in \mathfrak{U}$ нетеров в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда* $\det \mathcal{A}(t, x, \xi) \neq 0$ *для всех $(t, x, \xi) \in Y$. При выполнении этого условия для операторов $A \in \mathfrak{U}^0$*

$$\operatorname{ind} A = \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda \in \Lambda_A} \left\{\arg \frac{\det \mathcal{A}(\lambda, x, \xi)}{a_{22}(\lambda, x, +\infty)\, a_{22}(\lambda, x, -\infty)}\right\}_{(x,\xi)\in Q} - \frac{1}{2\pi} \left\{\arg \frac{\det \mathcal{A}(t, 0, -\xi)}{a_{11}(t, 0, -\infty)\, a_{22}(t, 0, +\infty)}\right\}_{(t,\xi)\in Q\setminus(\Lambda_A \times \mathbb{R})},$$

и $\operatorname{ind} A = \lim \operatorname{ind} A_k$, *если* $A \simeq \lim A_k$ $(A_k \in \mathfrak{U}^0)$. *Здесь приращения аргументов понимаются согласно* [7].

Рассмотрим теперь алгебру $\mathfrak{B}$. Пусть G — группа сдвигов на $\dot{\mathbb{R}}$ класса $\mathcal{D}$ и для любой точки $(t, x, \xi) \in Y$ $\pi_{t,x,\xi}$ — представление $\mathfrak{B}$ в $l_2(G, \mathbb{C}^2)$, определяемое равенством

$$\left[\pi_{t,x,\xi}\Big(\sum_s A_s U_s\Big) f\right](g) = \sum_s \theta_g(t)\, \mathcal{A}_s\big(g(t), k_g(t)\, x, \xi\big)\, \theta_g^{-1}(t)\, f(gs), \quad g \in G, \tag{5}$$

где $k_g(t) = \lim_{x\to t}\big[(1 + x^2)\,\big(1 + [g(x)]^2\big)^{-1} g'(x)\big]$, матрица $\theta_g(t) = \operatorname{diag}\{1, -1\}$, если $g(\infty) \neq \infty$ и $g(t) \in \{\infty, g(\infty)\}$, и $\theta_g(t)$ — единичная матрица для остальных $(g, t) \in G \times \dot{\mathbb{R}}$. Аналогично [22: с. 79] доказывается

Лемма 9: *Если $G \neq \{e\}$ — группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов замкнутого (разомкнутого) жорданова контура Γ на себя, свободно (т. е. сдвиги $g \in G \setminus \{e\}$ не имеют неподвижных точек на Γ) действующая на Γ (соответственно на $\Gamma^0 = \Gamma \setminus \{\tau_\pm\}$, где $\tau_\pm$ — концы Γ), то множество $P = P[G(t)]$ предельных точек орбиты $G(t) = \{g(t)\colon g \in G\}$ не зависит от $t \in \Gamma$ $(t \in \Gamma^0)$, $g(P) = P$ для всех $g \in G$ и либо $P = \Gamma$, либо P — совершенное нигде не плотное подмножество Γ, либо $P = \varnothing$ $(P = \{\tau_\pm\})$.*

Пусть $\mathcal{T}(u)$ — множество точек $t \in u$, порождающих все различные G-орбиты на $u \subset \mathbb{R}$. В случае свободного действия G на $\Gamma = \mathbb{R}$ полагаем

$$Y_G = \begin{cases} \left(\mathcal{T}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}\right) \cup \{(t_0, \infty, \pm\infty)\}, & \text{если} \quad P = \mathbb{R}, \\ \mathcal{T}(\mathbb{R}) \times Q, & \text{если} \quad P \neq \mathbb{R}, \end{cases}$$

где t_0 — произвольная фиксированная точка $\mathbb{R}$. В качестве Z выберем C^*-подалгебру алгебры $\mathfrak{U}$, порождённую операторами $aW_{b,\lambda}\left(a, b \in C(\dot{\mathbb{R}}), \lambda \in \mathbb{R}\right)$. Тогда на основе теоремы 12 доказывается

Теорема 16: *Если G — аменабельная группа сдвигов класса $\mathcal{D}$, свободно действующая на $\dot{\mathbb{R}}$, то для нетеровости операторов $B \in \mathfrak{B}$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $(t, x, \xi) \in Y_G$ были обратимы операторы $\pi_{t,x,\xi}(B)$ и, кроме того, в случае $\emptyset \neq P \neq \mathbb{R}$ были равномерно ограничены нормы $\left\|(\pi_{t,x,\xi}(B))^{-1}\right\|$ на Y_G.*

C^*-алгебру $\pi(\mathfrak{B})$, состоящую из операторов $\bigoplus \{\pi_{t,x,\xi}(B) : (t, x, \xi) \in Y_G\}$ $(B \in \mathfrak{B})$, действующих в пространстве $l_2\left(Y_G, l_2(G, \mathbb{C}^2)\right)$, естественно назвать *алгеброй символов Михлина операторов типа свёртки* с указанной дискретной группой G. Очевидно, $\mathfrak{B}/\mathcal{L}_0\left(L_2(\mathbb{R})\right) \cong \pi(\mathfrak{B})$.

Следствие 4: *Если G — некоторая группа сдвигов η_λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, порождённых поворотами окружности, то операторы $B \in \mathfrak{B}$ нетеровы тогда и только тогда, когда для всех $(t, x, \xi) \in Y_G$ обратимы операторы $\pi_{t,x,\xi}(B)$, где $Y_G = \mathcal{T}(\mathbb{R}) \times Q$ и $Y_G = \left(\mathcal{T}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}\right) \cup \{(t_0, \infty, \pm\infty)\}$ соответственно для конечной и бесконечной группы G, причём в (5) $k_g(t) = 1$.*

C^*-алгебра $\mathfrak{B}$ изучена также в случаях: 1. G — аменабельная группа сдвигов класса $\mathcal{D}$ с непустым множеством Λ общих неподвижных точек, фактор-группы $\hat{G}_j = G/G_{\gamma_j}$, где $G_{\gamma_j} = \{g \in G : g(t) = t$ для любого $t \in \gamma_j\}$ — нормальная подгруппа G, свободно действуют на связных компонентах γ_j множества $\dot{\mathbb{R}} \setminus \Lambda$ и множество групп $\{G_{\gamma_j}\}$ конечно (в частности, сюда входят циклические группы сдвигов с произвольным множеством неподвижных точек у образующих); 2. G — произвольная группа линейных сдвигов на оси.

В указанных случаях C^*-алгебры символов Михлина устроены значительно сложнее. Это связано с более сложной структурой множеств неподвижных точек: если в теореме 16 все сдвиги из $G \setminus \{e\}$ не имели неподвижных точек, то в случае 1 они имеют произвольное множество общих неподвижных точек, а других не имеют, а в случае 2 имеют как общую неподвижную точку $t = \infty$, так и не общие неподвижные точки. Представления в указанных случаях являются неоднородными: они различаются для неподвижных точек сдигов и для остальных точек $\dot{\mathbb{R}}$.

Во всех приведенных случаях исследована и C^*-алгебра $\mathfrak{D}$. Для примера сформулируем результат для группы G, рассматриваемой в теореме 16. Образующими C^*-алгебры $\mathfrak{D}$ являются операторы

$$K = \sum_{h,\lambda,s} A_{h,\lambda,s}\, e^{ih\eta_\lambda(\cdot)} U_s \quad (A_{h,\lambda,s} \in \mathfrak{U} : h \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, s \in G).$$

Условимся, что в дальнейшем множество значений h всегда содержит 0.

Теорема 17: *Если выполняются условия теоремы 16, то оператор $D \in \mathfrak{D}$ нетеров тогда и только тогда, когда для всех $(t, \xi) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}) \times \overline{\mathbb{R}}$ обратимы операторы $\pi_{t,\xi}(D)$ и в случае $\emptyset \neq P \neq \mathbb{R}$* $\sup\left\{\left\|(\pi_{t,\xi}(D))^{-1}\right\| : (t, \xi) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}) \times \overline{\mathbb{R}}\right\} < \infty$, *где $\pi_{t,\xi}$ — представления C^*-алгебры $\mathfrak{D}$ в $l_2(G \times \mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$, имеющие вид*

$$[\pi_{t,\xi}(K)\, f]\,(g, x) = \sum_{h,s} \theta_g(t)\, \tilde{\mathcal{A}}_{h,s}\big(g(t), k_g(t)\, x, \xi\big)\, e^{ihh_g(t)} \times \theta_g^{-1}(t)\, f\big(gs, x - hk_g^{-1}(t)\big), \qquad (g, x) \in G \times \mathbb{R};$$

$$h_g(t) = \lim_{x\to\infty}\left[\eta_{g(t)}\big(g(\eta_{-t}(x))\big) - k_g^{-1}(t)\, x\right],$$

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_{0,s}(t, x, \xi) = \mathcal{A}_{0,t,s}(t, x, \xi) + \sum\limits_{h} \sum\limits_{\lambda \neq t} \mathcal{A}_{h,\lambda,s}(t, x, \xi)\, e^{ih\eta_\lambda(t)}, \\ \tilde{\mathcal{A}}_{h,s}(t, x, \xi) = \mathcal{A}_{h,t,s}(t, x, \xi), \qquad h \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

В этом случае C^*-алгебра $\pi_1(\mathfrak{D})$ символов Михлина операторов $D \in \mathfrak{D}$ состоит из операторов $\bigoplus \{\pi_{t,\xi}(D) : (t, \xi) \in \mathcal{T}(\mathbb{R}) \times \overline{\mathbb{R}}\}$ $(D \in \mathfrak{D})$, действующих в гильбертовом пространстве $l_2\big(\mathcal{T}(\mathbb{R}) \times \overline{\mathbb{R}}, l_2(G \times \mathbb{R}, \mathbb{C}^2)\big)$, причём $\pi_1(\mathfrak{D}) \cong \mathfrak{D}/\mathcal{L}_0\big(L_2(\mathbb{R})\big)$.

В случае C^*-алгебры $\mathfrak{C}$ ситуация упрощается.

Теорема 18: *Оператор $C \in \mathfrak{C}$ нетеров тогда и только тогда, когда для всех $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ обратимы операторы $\tilde{\pi}_{t,\xi}(C)$, где $\tilde{\pi}_{t,\xi}$ — представления алгебры $\mathfrak{C}$ в $l_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ определяемые равенствами*

$$\left[\tilde{\pi}_{t,\xi}\Big(\sum_{h,\lambda} A_{h,\lambda}\, e^{ih\eta_\lambda(\cdot)} I\Big) f\right](x) = \sum_{h} \tilde{\mathcal{A}}_h(t, x, \xi)\, f(x - h), \qquad x \in \mathbb{R},$$

и $\tilde{\mathcal{A}}_h$ получаются из $\tilde{\mathcal{A}}_{h,s}$ заменой в (6) $\mathcal{A}_{h,\lambda,s}$ на $\mathcal{A}_{h,\lambda}$.

Ранее в [19, 20, 34] была построена теория Нетера сингулярных интегральных операторов вида $a_+P_+ + a_-P_- \in \mathfrak{C}$ в пространствах L_p^n $(1 < p < \infty,\ n \geqq 1)$ со степенным весом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Allan, G. R.: On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector-valued functions. J. London Math. Soc. 42 (1967), 463—470.

[2] Allan, G. R.: Ideals of vector-valued functions. Proc. London Math. Soc. (3) 18 (1968), 193—162.

[3] Антоневич, А. Б.: О двух методах исследования обратимости операторов из C^*-алгебр, порождённых динамическими системами. Мат. сб. 166 (1984) 5, 3—23.

[4] Браттели, У., и Д. Робинсон: Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. Москва: Изд-во Мир 1982.

[5] Гарнетт, Дж.: Ограниченные аналитические функции. Москва: Изд-во Мир 1984.

[6] Голодец, В. Я.: Скрещенные произведения неймановских алгебр. Успехи мат. наук 26 (1971) 5, 3—50.

[7] Гохберг, И. Ц., и Н. Я. Крупник: Об алгебре, порождённой одномерными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами. Функц. анализ и его прил. 4 (1970) 3, 27—38.

[8] Гохберг, И. Ц., и Н. Я. Крупник: Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинёв: Изд-во Штиинца 1973.

[9] Гохберг, И. Ц., и И. А. Фельдман: Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения. Москва: Изд-во Наука 1971.

[10] Гринлиф, Ф. П.: Инвариантные средние на топологических группах. Москва: Изд-во Мир 1973.

[11] Douglas, R. G.: Banach algebra techniques in operator theory. New York: Academic Press 1972.

[12] Дудучава, Р. В.: Интегральные уравнения типа свёртки с разрывными коэффициентами. Сооб-ия Акад. Наук Груз ССР **92** (1978), 281—284.
[13] Дудучава, Р. В.: Интегральные уравнения свёртки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Труды Тбил. мат. ин-та Акад. Наук ГрузССР **60** (1979), 2—136.
[14] Карлович, Ю. И.: Теория Нетера одного класса операторов типа свёртки. В кн.: Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И. Н. Векуа (Тбилиси) **1** (1985) 1, 102—105.
[15] Карлович, Ю. И.: Теория Нетера одного класса операторов типа свёртки со сдвигом. Докл. Акад. Наук СССР **295** (1987), 24—29.
[16] Карлович, Ю. И.: Локально-траекторный метод изучения обратимости в C^*-алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов. Докл. Акад. Наук СССР **299** (1988), 546—550.
[17] Карлович, Ю. И., и В. Г. Кравченко: Алгебра сингулярных интегральных операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами и кусочно-гладким сдвигом на сложном контуре. Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. **47** (1983), 1030—1077.
[18] Карлович, Ю. И., Кравченко, В. Г., и Г. С. Литвинчук: Теория Нетера сингулярных интегральных операторов со сдвигом. Изв. вузов: Математика **4** (1983), 3—27.
[19] Карлович, Ю. И., и И. М. Спитковский: О нетеровости некоторых сингулярных интегральных операторов с матричными коэффициентами класса *SAP* и связанных с ними систем уравнений свёртки на конечном промежутке. Докл. Акад. Наук СССР **269** (1983), 531—536.
[20] Карлович, Ю. И., и И. М. Спитковский: Факторизация почти-периодических матриц-функций и (полу)фредгольмовость некоторых классов уравнений типа свёртки. Деп. ВИНИТИ, 1985, № 4421-85, 138 с.
[21] Като, Т.: Теория возмущений линейных операторов. Москва: Изд-во Мир 1972.
[22] Корнфельд, И. П., Синай, Н. Г., и С. В. Фомин: Эргодическая теория. Москва: Изд-во Наука 1980.
[23] Кравченко, В. Г.: О некоторых парных операторах. В кн.: Краевые задачи (ред.: Н. В. Азбелев). Пермь: Изд-во Пермского политехн. ин-а 1982, 151—154.
[24] Кравченко, В. Г.: О нетеровости некоторых абстрактных сингулярных операторов. В кн.: Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвящённого 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Минск: Изд-во Университетское 1985, 165—167.
[25] Кравченко, В. Г.: О нормализации сингулярных интегральных операторов. Докл. Акад. Наук СССР **285** (1985), 1314—1317.
[26] Кравченко, В. Г.: О нормализации сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом. Сооб-ия Акад. Наук ГрузССР **124** (1986), 29—32.
[27] Лебедев, А. В.: О теоремах Винера в скрещенных произведениях и алгебрах, ассоциированных с автоморфизмами. Докл. Акад. Наук БССР **30** (1986), 493 до 495.
[28] Лебедев, А. В.: Об обратимости и компактности элементов в алгебрах, ассоциированных с автоморфизмами. Докл. Акад. Наук БССР **30** (1986), 589—592.
[29] Михлин, С. Г.: Композиция двойных сингулярных интегралов. Докл. Акад. Наук СССР 2 (11), 1 (87) (1936), 3—6.
[30] Михлин, С. Г.: Сингулярные интегральные уравнения с двумя независимыми переменными. Мат. Сб. 1 (43), 4 (1936), 535—550.
[31] Michlin, S. G., und S. Prössdorf: Singuläre Integraloperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1980.
[32] O'Donovan, D. P.: Weighted shifts and covariance algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **208** (1975), 1—25.
[33] Прёсдорф, З.: Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений. Москва: Изд-во Мир 1979.
[34] Сагинашвили, А. И.: Сингулярные интегральные уравнения с коэффициентами, имеющими разрывы полу-почти-периодического типа. Труды Тбил. мат. ин-та Акад. Наук ГрузССР **66** (1980), 84—95.

[35] Симоненко, И. Б.: Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений I. Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. 29 (1965), 567–586.
[36] Симоненко, И. Б., и Чинь Нгок Минь: Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост-го унив-та 1986.

Примечание при корректуре

Как сообщено авторам при корректуре, алгебры $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ из п. 6 изучены в [37], а первый метод исследования нетеровости, его обобщения и приложения (см. п. 3 и 4) анонсированы в [38].

[37] Карлович, Ю. И.: C^*-алгебры операторов типа свертки с дискретными группами сдвигов и осциллирующими коэффициентами. Докл. Акад. Наук СССР 302 (1988), 535–540.
[37] Карлович, Ю. И.: Об алгебрах сингулярных интегральных операторов с дискретными группами сдвигов в пространствах L_p. Докл. Акад. Наук СССР 304 (1989), 274–280.

Manuskripteingang: 31. 05. 1988; in revidierter Fassung 18. 10. 1988

VERFASSER:

Юрий Иванович Карлович
СССР-270069 Одесса, ул. акад. Заболотного 45, кв. 45

Виктор Григорьевич Кравченко
СССР-270088 Одесса, Черноморская дорога 125, корп. 4, кв. 5

Проф. Д-р Георгий Семенович Литвинчук
СССР-270009 Одесса, пер. Светлый 8, кв. 41