Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (1) 1990, S. 65–72

Langzeitverhalten einer parabolischen Evolutionsgleichung mit zufälligen Einflüssen

B. Schmalfuss

Es wird die Konvergenz der Lösungsverteilungen der statistischen Navier-Stokes-Gleichung gegen eine kompakte Menge von Verteilungen nachgewiesen. Außerdem werden die Eigenschaften dieser Menge untersucht.

Показывается сходимость распределений решений статистического уравнения Навье-Стокса к компактному множеству распределений. Кроме того исследуются свойства этого множества.

The convergence of solution distributions of the statistical Navier-Stokes equation to a compact set of distributions is shown. Moreover, properties of this set are observed.

1. Einleitung

Das Studium der Eigenschaften hydrodynamischer Gleichungen unter statistischen Gesichtspunkten geht schon auf Arbeiten aus dem vergangenen Jahrhundert zurück (O. Reynolds [9]). Während es in diesen Arbeiten darum ging, Aussagen über die Momente statistischer Größen des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung zu erhalten, werden in der vorliegenden Arbeit Aussagen über die Verteilungen des Geschwindigkeitsfeldes gemacht. Speziell wird die Navier-Stokes-Gleichung betrachtet. Es sei $u(t, x)$ der Vektor des Strömungsfeldes zur Zeit t am Ort x, p der Druck, g eine von außen wirkende Kraft und ν eine positive Zähigkeit; dann ist die Navier-Stokes-Gleichung gegeben durch

$$\partial u/\partial t + (u, \nabla) u = \nu \Delta u + \nabla p + g, \qquad u(0, x) = u_0(x). \tag{1.1}$$

Zufällige Einflüsse werden durch die vom Zufall abhängenden Anfangsbedingungen induziert, und die Randbedingungen werden später als periodisch vorausgesetzt werden (s. (2.3)).

In dieser Arbeit werden spezielle Eigenschaften der Menge der Verteilungen für große Zeiten untersucht. Dabei soll es darum gehen, Beziehungen zwischen den deterministischen Ergebnissen aus [1] und [2] und statistischen Gesichtspunkten darzulegen. Speziell soll die Existenz einer Menge von Verteilungen nachgewiesen werden, die bezüglich der zeitlichen Entwicklung invariant ist und der sich für $t \to \infty$ jede beliebige Lösungsverteilung nähert, und es soll auf deren Eigenschaften eingegangen werden. Diese Menge beinhaltet auch die stationären Lösungsverteilungen, unter denen sich die ergodischen besonders auszeichnen. Diese Verteilungen sind die Extremalpunkte der Menge der stationären Lösungsverteilungen. Außerdem sind sie dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen räumlicher Erwartungswert und zeitlicher Mittelwert der Trajektorien (fast sicher) zusammenfallen. Es können die ergodischen Verteilungen charakterisiert werden, die gleichzeitig Extremalpunkte der oben genannten invarianten Menge von Verteilungen sind.

2. Voraussetzungen

Es sei $\mathbf{T}$ der dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$ äquivalente Torus. Es sei weiterhin $H^p_{loc}(\mathbf{R}^2)$ der Sobolev-Raum der zweidimensionalen quadratisch integrierbaren Vektorfunktionen mit verallgemeinerten Ableitungen p-ter Ordnung in $\left(L_{2,loc}(\mathbf{R}^2)\right)^2$. Der Raum $H^p(\mathbf{T})$ bestehe aus den Funktionen aus $H^p_{loc}(\mathbf{R}^2)$, die bezüglich $\mathbf{T}$ periodisch sind. Dann sind

$$\mathsf{H} = \left\{u \in \left(L_2(\mathbf{T})\right)^2 : \operatorname{div} u = 0, \quad \int_{\mathbf{T}} u(x)\,dx = (0, 0)\right\}$$

und

$$\mathsf{H}^1 = \left\{u \in H^1(\mathbf{T}) : \operatorname{div} u = 0, \quad \int_{\mathbf{T}} u(x)\,dx = (0, 0)\right\}$$

Banach-Räume. Ihre Normen werden mit $\|\ \|$ beziehungsweise mit $\|\ \|_1$ bezeichnet. Es ist H zudem ein separabler Hilbert-Raum. Wir betrachten das Evolutionstripel $\mathsf{H}^1 \subset \mathsf{H} \subset (\mathsf{H}^1)'$. Der Wert eines linearen Funktionals v' aus $(\mathsf{H}^1)'$ für ein v aus H^1 sei $\langle v', v\rangle$. Der orthogonale Projektor von $\left(L_2(\mathbf{T})\right)^2$ in H sei π. Weiterhin ist H^1 vollstetig in H eingebettet, und es gilt

$$\|u\|^2 \leqq \lambda \|u\|_1^2 \quad \textit{für alle} \quad u \in \mathsf{H}^1 \tag{2.1}$$

mit einem gewissen $\lambda > 0$. Der Operator $-\pi\Delta$, definiert auf $\mathsf{H}^1 \cap H^2(\mathbf{T})$, kann zu einem selbstadjungierten positiven Operator A bezüglich H erweitert werden. Der Operator B sei definiert durch $B(u, v) = \pi(u, \nabla)\, v$ und $B(u) := B(u, u)$ für alle $u, v \in \mathsf{H}^1$. Speziell werden im folgenden die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\langle B(u), u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in \mathsf{H}^1, \\ &\langle B(u), Au\rangle = 0 \text{ für alle } u \in \operatorname{dom}(-\pi\Delta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

benutzt. Es wird bezüglich des oben gegebenen Evolutionstripels das Problem (1.1) als Evolutionsgleichung

$$\frac{du(t)}{dt} + \nu A u(t) + B\big(u(t)\big) = f, \qquad u(0) = u_0 \in \mathsf{H}, \nu > 0, f = \pi g \in \mathsf{H} \tag{2.3}$$

aufgefaßt (vgl. [12: Kap. 3]), wobei die Randbedingung periodisch bezüglich $\mathbf{T}$ ist, d. h., es gilt $u(t, x_1, x_2) = u(t, x_1 + 1, x_2 + 1)$ für alle $t \geqq 0$ und $x \in \mathbf{R}^2$. Es ist weiterhin bekannt, daß für jedes u_0 aus H eine eindeutige stetige Lösung u in $C([0, \infty); \mathsf{H})$ existiert. Für diese gelten ferner die Abschätzungen

$$\|u(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|_1^2\, ds \leqq \|u_0\|^2 + \frac{\lambda t}{\nu} \|f\|^2 \qquad \textit{für } t \geqq 0 \tag{2.4}$$

und

$$\|u(t)\|_1^2 \leqq (t\nu)^{-1} \|u_0\|^2 + (2\nu)^{-1} t \|f\|^2 + \lambda \nu^{-2} \|f\|^2 \qquad \textit{für } t > 0 \tag{2.5}$$

(vgl. [12: Kap. 3]), wobei speziell für (2.5) wegen der Periodizitätsforderung (2.2) benutzt werden muß. Durch die Zuordnung eines Anfangswertes zu dem Momentanwert der Lösungstrajektorie von (2.3) wird eine nichtlineare Halbgruppe $\left(S(t)\right)_{t \geqq 0}$ definiert:

$$S(t) \circ S(s) = S(t + s) \qquad \textit{für alle } t, s \geqq 0, \quad S(0) = \hat{I}, \tag{2.6}$$

wobei $\hat{I}$ die identische Abbildung in H ist. Für beliebiges $t \geqq 0$ ist die Abbildung $S(t)$ stetig. Es ist bekannt, daß die Halbgruppe $(S(t))$ einen (maximalen) Attraktor $\hat{\mathsf{A}}$ besitzt. Dies ist eine von H verschiedene Teilmenge mit den Eigenschaften:

$$S(t)\,\hat{\mathsf{A}} = \hat{\mathsf{A}} \qquad \textit{für alle } t \geqq 0 \tag{2.7}$$

und

$$\sup_{x \in S(t)\hat{B}} \inf_{y \in \hat{\mathsf{A}}} \|x - y\| =: d_{\mathsf{H}}(S(t)\,\hat{B}, \hat{\mathsf{A}}) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{2.8}$$

für jede beschränkte Menge $\hat{B}$ aus H. Die Menge $\hat{\mathsf{A}}$ ist kompakt, besitzt eine endliche Hausdorff-Dimension und ist beschränkt in H^1. Außerdem sind die stationären Lösungen u_s (d. h., es gilt $S(t)\,u_s = u_s$ für alle $t \geqq 0$) von (2.3) in $\hat{\mathsf{A}}$ enthalten (nach [12: Kap. 2] gibt es immer stationäre Lösungen).

3. Die Konvergenz der Verteilungen

Es sei $\mathbf{V}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße μ, definiert auf der Borelschen Sigma-Algebra $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ von H, für die $\int_{\mathsf{H}} \|u\|^2\,\mu(du) < \infty$ gilt. Es sei weiterhin $C_b(\mathsf{H})$ die Menge der stetigen beschränkten Funktionen über H. Auf der Menge $\mathbf{V}$ wird die Topologie τ eingeführt, die festgelegt ist durch eine Umgebungsbasis für jedes $\xi \in \mathbf{V}$. Für $\varepsilon_i > 0$, $f_i \in C_b(\mathsf{H})$, $i = 1, \ldots, n$, sei ein Element ${}^{\xi}V^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ dieser Umgebungsbasis definiert durch

$${}^{\xi}V^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \left\{\mu \in \mathbf{V} : \left|\int_{\mathsf{H}} f_i(u)\,\xi(du) - \int_{\mathsf{H}} f_i(u)\,\mu(du)\right| < \varepsilon_i\ \forall\, i\right\}.$$

Diese Topologie ist metrisierbar, die entsprechende Metrik werde mit $\bar{d}$ bezeichnet (vgl. [8: Kap. 2]). Durch die Topologie τ wird folgende Konvergenz induziert:

$$\mu_i \to \mu \text{ in } \mathbf{V} \Leftrightarrow \int_{\mathsf{H}} f(u)\,\mu_i(du) \to \int_{\mathsf{H}} f(u)\,\mu(du)\ \forall\, f \in C_b(\mathsf{H}). \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.1: Es folgt aus dem Satz von B. Levi, daß sich für eine beliebige stetige Funktion f über H aus $\sup_i \left|\int_{\mathsf{H}} f(u)\,\mu_i(du)\right| \leqq c < \infty$ auch $\left|\int_{\mathsf{H}} f(u)\,\mu(du)\right| \leqq c$ ergibt.

Es wird eine Familie von Abbildungen $T(t)\colon \mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}$ für alle $t \geqq 0$ definiert:

$$T(t)\,\mu = \mu_t, \qquad \mu_t(\omega) := \mu(S(t)^{-1}\,\omega) \qquad \textit{für alle } \omega \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}) \tag{3.2}$$

($S(t)^{-1}\,X$ bezeichnet das Urbild der Menge X bezüglich der Abbildung $S(t)$). Integriert man (2.4) bezüglich μ, so folgt, daß $T(t)$ die Menge $\mathbf{V}$ tatsächlich in sich abbildet.

Lemma 3.1: *Die Familie $(T(t))_{t\geq 0}$ besitzt die Eigenschaften $T(0) = I$ (I identische Abbildung auf $\mathbf{V}$) und $T(t + s) = T(t) \circ T(s)$ für alle $t, s \geqq 0$.*

Beweis: Die Behauptung $T(0) = I$ folgt aus (2.6). Es sei nun $\mu \in \mathbf{V}$, dann ist nach (2.6)

$$\begin{aligned} T(t + s)\,\mu(\omega) &= \mu(S(t + s)^{-1}\,\omega) = \mu(S(t)^{-1}\,(S(s)^{-1}\,\omega)) \\ &= T(t)\,\mu(S(s)^{-1}\,\omega) = T(t) \circ T(s)\,\mu(\omega) \qquad \forall\,\omega \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Die nachfolgenden beiden Lemmata geben topologische Eigenschaften von $T(t)$ an.

Lemma 3.2: *Für beliebiges $t \geqq 0$ ist die Abbildung $T(t)$ stetig bezüglich der Metrik $\bar{d}$.*

Beweis: Es sei $(\mu_j) \subset \mathbf{V}$ eine Folge, die für $j \to \infty$ gegen ein Maß $\mu \in \mathbf{V}$ konvergiert. Da $S(t)$ für beliebiges $t \geqq 0$ stetig ist, liegt für beliebiges f aus $C_b(\mathsf{H})$ ebenfalls $f(S(t)\,\cdot)$ in $C_b(\mathsf{H})$. Dann ist nach (3.1), (3.2)

$$\lim_j \int_{\mathsf{H}} f(u)\, \mu_{jt}(du) = \lim_j \int_{\mathsf{H}} f(S(t)\, u)\, \mu_j(du)$$

$$= \int_{\mathsf{H}} f(S(t)\, u)\, \mu(du) = \int_{\mathsf{H}} f(u)\, \mu_t(du) \qquad \forall f \in C_b(\mathsf{H}).$$

Aus (3.1) folgt nun die Behauptung ∎

Die Mengen $B_0^r \subset \mathbf{V}$, $r \geqq 0$, seien wie folgt definiert:

$$B_0^r = \left\{\mu \in \mathbf{V} : \int_{\mathsf{H}} \|u\|^2\, \mu(du) \leqq r^2\right\}.$$

Lemma 3.3: *Für beliebige $t > 0$ und $r \geqq 0$ ist die Menge $T(t)\, B_0^r$ relativ kompakt in $\mathbf{V}$ bezüglich der Topologie τ.*

Beweis: Die Abbildung $u \mapsto \|u\|_1$ ist meßbar bezüglich $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$. Wird (2.5) für beliebiges $\mu \in B_0^r$ integriert, so gilt

$$\int_{\mathsf{H}} \|u\|_1^2\, \mu(du) \leqq \frac{r^2}{\nu t} + \frac{t}{2\nu}\, \|f\|^2 + \frac{\lambda}{\nu^2}\, \|f\|^2 =: c(t).$$

Nach der Tschebyschevschen Ungleichung gibt es dann für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$, unabhängig von $\mu \in B_0^r$, so daß $\mu_t(\{u : \|u\|_1^2 > R\}) < R^{-1}c(t) < \varepsilon$ für alle $\mu \in B_0^r$ gilt. Aufgrund der vollstetigen Einbettung $\mathsf{H}^1 \hookrightarrow \mathsf{H}$ ist die Menge $\{u : \|u\|_1^2 \leqq R\}$ kompakt in H. Nach dem Satz von Prochorov (vgl. [6: Satz 2.6.7]) ist die Menge $\{T(t)\, \mu : \mu \in B_0^r\}$ für beliebiges $t > 0$ relativ kompakt in der Topologie τ ∎

Die beiden folgenden Lemmata stellen eine Übertragung der Theorie des Attraktors der deterministischen Navier-Stokes-Gleichung auf maßtheoretische Verhältnisse dar (vgl. [1: Kap. 1]).

Lemma 3.4: *Für beliebiges $r > 0$ existiert ein t_r, so daß $T(t)\, B_0^r \subset B_0^\varkappa$ mit $\varkappa^2 = 2\lambda\, \|f\|^2/\nu$ für alle $t \geqq t_r$ gilt.*

Beweis: Wendet man (2.1) auf die linke Seite von (2.4) an, so ergibt sich nach Integration bezüglich $\mu \in B_0^r$ die Abschätzung

$$\int_{\mathsf{H}} \|u\|^2\, \mu_t(du) \leqq \left(\int_{\mathsf{H}} \|u\|^2\, \mu(du) - \frac{\lambda}{\nu}\, \|f\|^2\right) e^{-t\nu/\lambda} + \frac{\lambda}{\nu}\, \|f\|^2.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung ∎

Aus der letzten Ungleichung folgt für beliebiges $t \geqq 0$ die Beziehung $T(t)\, B_0^\varkappa \subsetneq B_0^\varkappa$. Es sei $B_1^\varkappa := T(1)\, B_0^\varkappa$. Nach Lemma 3.3 ist diese Menge relativ kompakt. Weiterhin gilt

$$T(t)\, B_1^\varkappa \subset B_1^\varkappa \qquad \textit{für alle } t \geqq 0. \tag{3.3}$$

Wir setzen

$$\mathsf{A} = \cap\, \{\bar{F}_s : s > 1\} \quad \text{mit} \quad F_s = \cup\, \{T(t)\, B_0^\varkappa : t > s\},$$

wobei die Abschließung $\bar{F}_s$ in der Topologie τ zu bilden ist. Da F_s für beliebiges $s > 1$ in B_1^* enthalten ist, sind die Mengen $\bar{F}_s$ komapkt. Weiterhin ist $(\bar{F}_s)_{s>1}$ monoton fallend. Daraus ergibt sich, daß A nicht leer und kompakt ist. Wegen der Bemerkung 3.1 für $f(\cdot) = \|\cdot\|^2$ ist $\bar{F}_s \subset \mathbf{V}$.

Lemma 3.5: *Für jedes $t > 1$ und jede Menge $X \subset B_1^*$ gilt $\overline{T(t)\,X} \subset T(t)\,\bar{X}$.*

Beweis: Es sei $\bar{\mu} \in \overline{T(t)\,X}$. Dann gibt es eine Folge $(\mu_i) \subset X$, so daß $T(t)\,\mu_i \to \bar{\mu}$ gilt. Da $X \subset B_1^*$ relativ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(\mu_{i'})$, die gegen ein Element $\tilde{\mu} \in \bar{X}$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von $T(t)$ folgt $T(t)\,\tilde{\mu} = \bar{\mu}$, also $\bar{\mu} \in T(t)\,\bar{X}$. Das Maß $\bar{\mu}$ gehört nach Bemerkung 3.1 für $f(\cdot) = \|\cdot\|^2$ wieder zu $\mathbf{V}$ ∎

Lemma 3.6: *Für $\mu \in \mathbf{V}$ und $X, Y \subset \mathbf{V}$ sei*

$$\bar{d}(\mu, X) := \bar{d}(\{\mu\}, X) \qquad \text{und} \qquad \bar{d}(X, Y) = \sup_{\mu \in X} \inf_{\nu \in Y} \bar{d}(\mu, \nu).$$

Für jedes $r > 0$ gilt dann

$$\bar{d}\left(T(t)\,B_0^r, \mathsf{A}\right) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty. \tag{3.4}$$

Beweis: Nach Lemma 3.4 und den sich daran anschließenden Bemerkungen ist es hinreichend zu zeigen, daß $\bar{d}\left(T(t)\,B_1^*, \mathsf{A}\right) \to 0$ für $t \to \infty$ ist. Angenommen, diese Beziehung gilt nicht. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, eine monotone Folge (t_j), $t_j \to \infty$, und Elemente $\mu_j \in T(t_j)\,B_1^*$, so daß $\bar{d}\left(T(t_j)\,\mu_j, \mathsf{A}\right) > \varepsilon$ für alle j gilt. Nach (3.3) sind alle μ_j in B_1^* enthalten, also existiert eine Teilfolge $(\mu_{j'})$, so daß $\mu_{j'} \to \mu \in \overline{B_1^*}$ ist. Wegen $\mu_i \in \cup\,\{T(t)\,B_1^*: t > t_j\}$ für alle $i > j$ ist $\mu \in \mathsf{A}$. Andererseits gilt auch $\bar{d}(\mu, \mathsf{A}) \geqq \varepsilon$. Das ist ein Widerspruch. Das Maß μ gehört wieder nach Bemerkung 3.1 zu $\mathbf{V}$ ∎

Lemma 3.7: *Es gilt $T(t)\,\mathsf{A} = \mathsf{A}$ für alle $t > 0$.*

Beweis: Wegen der Monotonie von $(\bar{F}_s)_{s>1}$ und Lemma 3.4 ist

$$T(t)\,\mathsf{A} = T(t) \bigcap_{s>1} \bar{F}_s = \bigcap_{s>1} T(t)\,\bar{F}_s \supset \bigcap_{s>1} \overline{T(t)\,F_s} = \bigcap_{s>t+1} \bar{F}_s = \mathsf{A}. \tag{3.5}$$

Andererseits ergibt sich aus Lemma 3.6 die Inklusion $T(t+s)\,\mathsf{A} \subset O(\mathsf{A})$ für jede Umgebung O von A und hinreichend großes s. Aus (3.5) folgt dann $T(t)\,\mathsf{A} \subset T(t+s) \times \mathsf{A}$, also $T(t)\,\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$ ∎

Der folgende Satz charakterisiert die Elemente aus A.

Satz 3.1: *Es gilt folgendes:*

1. *Der Träger* supp $\bar{\mu}$ *jedes Elementes $\bar{\mu} \in \mathsf{A}$ ist in $\hat{\mathsf{A}}$ enthalten.*
2. *Die Menge von Dirac-Maßen $D(\hat{\mathsf{A}}) = \{\delta_u : u \in \hat{\mathsf{A}}\}$ ist in A enthalten.*

Beweis: 1. Angenommen, $\bar{\mu}$ besitzt einen Träger $\tilde{A}$, so daß $\tilde{A} \setminus \hat{\mathsf{A}} \neq \emptyset$ ist. Dann folgt aus der Stetigkeit eines Maßes, daß für ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ für die Menge $\hat{\mathsf{A}}_\delta = \{u \in \mathsf{H} : d_{\mathsf{H}}(u, \hat{\mathsf{A}}) < \delta\}$ die Beziehung $\bar{\mu}(\mathsf{H} \setminus \hat{\mathsf{A}}_\delta) = \varepsilon$ gilt. Da nach (3.3) A in B_0^* enthalten ist, gibt es für beliebiges $\mu \in \mathsf{A}$ ein $r > 0$, so daß nach der Tschebyschevschen Ungleichung $\mu(\{u : \|u\|^2 > r\}) < \varepsilon/2$ gilt. Nach (2.8) existiert eine Zahl t_r, so daß $d_{\mathsf{H}}\left(S(t_r)\,\{u : \|u\|^2 \leq r\}, \hat{\mathsf{A}}\right) < \delta/2$ ist. Außerdem folgt nach Lemma 3.7 die Existenz eines Maßes $\mu \in \mathsf{A}$, so daß $\bar{\mu} = T(t_r)\,\mu$ ist. Dann gilt

$$\bar{\mu}(\hat{\mathsf{A}}_{\delta/2}) = \mu\left(S(t_r)^{-1}\,\hat{\mathsf{A}}_{\delta/2}\right) \geqq \mu(\{u : \|u\|^2 \leqq r\}) \geqq 1 - \varepsilon/2$$

$$\left(S(t_r)^{-1}\,\hat{\mathsf{A}}_{\delta/2} = \{u : S(t_r)\,u \in \hat{\mathsf{A}}_{\delta/2}\} \supset \{u : \|u\|^2 \leqq r\}\right),$$

also $\bar{\mu}(\mathsf{H} \setminus \hat{\mathsf{A}}_{\delta/2}) < \varepsilon/2$ im Widerspruch zu $\bar{\mu}(\mathsf{H} \setminus \hat{\mathsf{A}}_\delta) = \varepsilon$.

2. Da $T(t)\,\delta_u = \delta_{S(t)u}$ für alle $t \geqq 0$ gilt, folgt aus (2.7) $T(t)\,D(\hat{\mathsf{A}}) = D(\hat{\mathsf{A}})$ für alle $t \geqq 0$. Da $\hat{\mathsf{A}}$ beschränkt in H ist, folgt daraus, daß $D(\hat{\mathsf{A}})$ in einer Menge B_0^{r} enthalten ist. Dann gilt aber $0 = \lim\limits_{t\to\infty} \bar{d}\big(T(t)\,D(\hat{\mathsf{A}}), \mathsf{A}\big) = \bar{d}\big(D(\hat{\mathsf{A}}), \mathsf{A}\big)$. Da $\hat{\mathsf{A}}$ kompakt ist, folgt die Behauptung ∎

4. Die Eigenschaften der Menge A

Es sei $\mathbf{M}$ die lineare Menge der beschränkten verallgemeinerten Maße auf $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$. Dann gilt $\mathbf{V} \subset \mathbf{M}$. Durch das System der für beliebige $\varepsilon_i > 0$, $f_i \in C_b(\mathsf{H})$, $i = 1, \ldots, n$, gegebenen Mengen

$$ {}^{0}U^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \left\{\mu \in \mathbf{M} : \left|\int_{\mathsf{H}} f_i(u)\,\mu(du)\right| < \varepsilon_i\ \forall_i\right\}, $$

wird $\mathbf{M}$ zu einem lokalkonvexen Raum mit der Topologie $\bar{\tau}$, da diese Mengen konvex, symmetrisch und absorbierend sind (vgl. [7: Kap. 11.2]). Eine Umgebungsbasis für ein beliebiges $\xi \in \mathbf{M}$ wird dann durch die Mengen ${}^{\xi}U^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \{\mu \in \mathbf{M} : \mu - \xi \in {}^{0}U^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}\}$ gebildet. Bezeichnet $(\mathbf{V}, \bar{\tau})$ die Spur der Topologie $(\mathbf{M}, \bar{\tau})$ auf $\mathbf{V}$, dann soll gezeigt werden, daß die Topologien $(\mathbf{V}, \bar{\tau})$ und $(\mathbf{V}, \tau)$ identisch sind. Einerseits ist für beliebige $\varepsilon_i > 0$ und $f_i \in C_b(\mathsf{H})$, $i = 1, \ldots, n$, wegen ${}^{\xi}V^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \mathbf{V} \cap {}^{\xi}U^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ für alle $\xi \in \mathbf{V}$ jede $(\mathbf{V}, \tau)$-offene Menge auch $(\mathbf{V}, \bar{\tau})$-offen. Zum anderen folgt daraus, daß für ein beliebiges Maß ϱ aus $\mathbf{V} \cap {}^{\eta}U^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ für $\varepsilon_i > \varepsilon_i^{1} \geqq 0$ und $\eta \in \mathbf{M}$ die Beziehung $\left|\int_{\mathsf{H}} f_i(u)\,\eta(du) - \int_{\mathsf{H}} f_i(u)\,\varrho(du)\right| = \varepsilon_i^{1}$ gilt. Dann enthält aber die Menge $\mathbf{V} \cap {}^{\eta}U^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$ gerade die Menge ${}^{\varrho}V^{f_1,\ldots,f_n}_{\varepsilon_1-\varepsilon_1^{1},\ldots,\varepsilon_1-\varepsilon_n^{1}}$, woraus folgt, daß jede $(\mathbf{V}, \bar{\tau})$-offene Menge auch $(\mathbf{V}, \tau)$-offen ist. Also sind beide Topologien identisch. Aus der Gleichheit der Topologien $(\mathbf{V}, \bar{\tau})$ und $(\mathbf{V}, \tau)$ folgt, daß die Menge $\hat{\mathsf{A}}$ ebenfalls kompakt in $(\mathbf{M}, \bar{\tau})$ ist. Weiterhin folgt aus (3.2), daß die Abbildung $T(t)$ für beliebiges $t \geqq 0$ auf $\mathbf{M}$ definiert werden kann und sogar linear ist, da durch die Transformation eines Maßes bezüglich einer Abbildung $S(t)$ eine lineare Abbildung vermittelt wird. Es sei nun für eine Menge $X \subset \mathbf{M}$ mit $\operatorname{conv}(X)$ ihre konvexe Hülle und mit $\operatorname{ex}(X)$ die Menge ihrer Extremalpunkte bezeichnet.

Lemma 4.1: *Die Menge* A *ist konvex.*

Beweis: Zuerst wird gezeigt, daß $\operatorname{conv}\big(T(t)\,\mathsf{A}\big) = T(t)\,\big(\operatorname{conv}(\mathsf{A})\big)$ *für alle* $t \geqq 0$ gilt. Tatsächlich, da $T(t)$ linear ist, ist $T(t)\operatorname{conv}(\mathsf{A})$ konvex und folglich $T(t)\operatorname{conv}(\mathsf{A}) \supset \operatorname{conv}\big(T(t)\,\mathsf{A}\big)$. Andererseits folgt für $\mu \in T(t)\,\big(\operatorname{conv}(\mathsf{A})\big)$, also $\mu = T(t)\,\xi$ mit $\xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \left(\xi_i \in \mathsf{A}, \lambda_i^{0} > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ aus der Linearität die Beziehung $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(t)\,\xi_i \in \operatorname{conv}\big(T(t)\,\mathsf{A}\big)$. Nach Lemma 3.7 ist $T(t)\operatorname{conv}(\mathsf{A}) = \operatorname{conv}\big(T(t)\,\mathsf{A}\big) = \operatorname{conv}(\mathsf{A})$ für alle $t \geqq 0$. Da $\operatorname{conv}(\mathsf{A})$ auch in B_0^{x} enthalten ist, folgt aus (3.4), daß $\operatorname{conv}(\mathsf{A})$ in A enthalten ist. Andererseits gilt $\mathsf{A} \subset \operatorname{conv}(\mathsf{A})$ ∎

Nach dem Satz von Krein-Milman (vgl. [4: Kap. V, 8.4]) ist damit A die abgeschlossene konvexe Hülle seiner Extremalpunkte. Die Dirac-Maße $D(\hat{\mathsf{A}})$ (vgl. Satz 3.1) gehören zu den Extremalpunkten von A.

Satz 4.1: *Es sei* $\mu \in \mathbf{V}$ *mit* $\operatorname{supp}\mu \in \hat{\mathsf{A}}$. *Dann ist* $\mu \in \mathsf{A}$.

Beweis: Nach [8: Satz 2.6.3] ist $\overline{\text{conv}}\,(D(\hat{A}))$ dicht in der Menge der Maße mit Träger in $\hat{A}$. Andererseits gilt $D(\hat{A}) \subset \text{ex}\,(A)$. Wendet man wiederum den Satz von Krein-Mil'man an, dann ist $\overline{\text{conv}}\,(D(\hat{A})) \subset A$, da A konvex und kompakt ist ∎

Bemerkung 4.1: Aus Satz 3.1/1 und Satz 4.1 folgt damit die Beziehung $A = \{\mu \in V;\ \text{supp}\,\mu \subset \hat{A}\}$.

Es bezeichne S die Menge der stationären statistischen Lösungen aus V, d. h., es gilt $\mu_t = \mu$ für alle $t > 0$. Wegen (3.4) und $T(t)\,\mu = \mu$ gilt $S \subset A$. Entsprechend [6: Kap. 6] wird ein stationäres Maß $\mu \in V$ ergodisch genannt, wenn für eine Menge ω, die μ-fast sicher die Beziehung $S(t)^{-1}\,\omega = \omega$ für alle $t \geqq 0$ erfüllt, $\mu(\omega) = 1$ oder $\mu(\omega) = 0$ folgt. Die Menge der ergodischen Maße ist nicht leer. Da (2.3) immer stationäre Lösungen u_s besitzt, sind die Dirac-Maße δ_{u_s} immer ergodisch. Da die Menge $\hat{A}$ in H^1 beschränkt ist (s. Abschnitt 2) sind die Integrale $\int_H \|u\|_1^2\,\mu(du)$ gleichmäßig beschränkt. Deswegen ist S nach dem Satz von Prochorov ([8: Satz 2.6.7]) eine kompakte Menge in (V, τ), die außerdem konvex ist. Nach [6: Seite 39] sind die ergodischen Maße die Extremalpunkte von S. Es ergibt sich die Frage, wann die Extremalpunkte von A und S zusammenfallen.

Satz 4.2: *Ein ergodisches Maß ist nur dann Extremalpunkt von A, wenn es ein Dirac-Maß ist.*

Beweis: Angenommen, μ sei ein ergodisches Maß, dessen Träger aus mehr als nur einem Punkt besteht. Dann gehört μ zu A und besitzt nach Satz 3.1 einen Träger in $\hat{A}$. Dieses Maß ist außerdem stationär. Dann existiert eine Menge $\omega_1 \in \mathfrak{B}(H)$, für die $\mu(\omega_1) \in (0, 1)$ gilt. Weiterhin seien die Wahrscheinlichkeitsmaße μ_1 und μ_2 durch $\mu_1(\omega) = \mu(\omega \cap \omega_1)/\mu(\omega_1)$ und $\mu_2(\omega) = \mu(\omega \cap C\omega_1)/\mu(C\omega_1)$ für alle $\omega \in \mathfrak{B}(H)$ definiert. Nach Satz 4.1 sind diese Maße Elemente aus A, da ihr Träger auch in $\hat{A}$ enthalten ist. Dann gilt aber $\mu = \psi\mu_1 + (1 - \psi)\,\mu_2$ mit $\psi = \mu(\omega_1)$. Dem widerspricht aber, daß μ ein Extremalpunkt von A ist ∎

Bemerkung 4.2: Werden anstatt periodischer Randbedingungen Nullrandbedingungen bezüglich eines beschränkten hinreichend glatten zweidimensionalen Gebietes G für (2.3) betrachtet, so gilt das Lemma 3.3 nicht, da (2.2) nur für periodische Randbedingungen richtig ist. Anstatt (2.5) gilt nach [5: Formel 2.16] die Abschätzung

$$\|u(t)\|_1^2 \leqq \|u(0)\|^2\,ct^{-1}\exp\left(c_1(\|u(0)\|^4 + 1)\right) \qquad \textit{für alle } t > 0.$$

Es lassen sich aber die Resultate der Sätze 3.1, 4.1 und 4.2 und die anschließenden Bemerkungen beweisen, wenn man als V die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße μ wählt, die die Abschätzung $\int_H \|u\|^2 \exp(\bar{c}_1\,\|u\|^4)\,\mu(du) < \infty$ mit einer von f, G und ν abhängigen Konstante $\bar{c}_1$ erfüllen.

Bemerkung 4.3: Eine Anwendung ist auch auf stochastische Differentialgleichungen (mit zufälligen Rauschen) möglich, wobei die Operatoren $T(t)$ durch die Markovschen Übergangswahrscheinlichkeiten gebildet werden (vgl. [10, 11]).

Bemerkung 4.4: In [3] wird aus der Existenz eines deterministischen Attraktors auf die Existenz von stationären statistischen Lösungen geschlossen.

LITERATUR

[1] БАБИН, А. В., и М. И. ВИШИК: Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. Успехи мат. наук **38** (1983) 4, 133–187.

[2] БАБИН, А. В., и М. И. ВИШИК: Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям. Мат. сб. **126** (168) (1985), 379–419.

[3] BIEHONNEK, J.: Über asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichung. Karl-Marx-Stadt (DDR): Inst. Mech. Akad. Wiss. Report **10** (1987), 1–20.

[4] DUNFORD, N., and J. T. SCHWARTZ: Linear Operators. Part 1: General Theory. New York: Intersc. Publ. 1958.

[5] FOIAS, C.: Statistical study of Navier-Stokes equation I. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. **48** (1973), 219–348.

[6] FOIAS, C.: Statistical study of Navier-Stokes equations II. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **49** (1973), 9–123.

[7] KANTOROWITSCH, L. W., und G. P. AKILOW: Funktionalanalysis in normierten Räumen. 2. Auflage. Berlin: Akademie-Verlag 1978 (Übers. a. d. Russ.).

[8] PARTHASARATHY, K. R.: Probability measures on metric spaces. New York: Academic Press 1967.

[9] REYNOLDS, O.: On dynamical theory of the incompressible viscous fluid and the determination of the criterion. Phil. Trans. Royal Soc. London **186** (1895), 123–161.

[10] SCHMALFUSS, B.: Long-time behaviour of the stochastic Navier-Stokes equation. (In Vorbereitung)

[11] SCHMALFUSS, B.: Invariant attracting sets of nonlinear stochastic evolution equations. In: ISAM. Proc. Conf. Gaußig (GDR), January 11–15, 1988 (ed.: H. Langer). Berlin: Akademie-Verlag (erscheint).

[12] TEMAM, R.: Navier-Stokes equation — theory and numerical analysis. Amsterdam—New York—Oxford: North Holland Publ. Comp. 1979.

Manuskripteingang: 09. 02. 1988; in revidierter Fassung 16. 06. 1988

VERFASSER:

Dr. B. SCHMALFUSS
Abteilung Mathematik/Rechentechnik der Ingenieurhochschule
Bernburger Str. 52–57
DDR-4370 Köthen