Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (1) 1990, S. 85–96

Konvergenzbeschleunigung bei Potenzreihen durch asymptotische Entwicklung der Restsummen

R. RIEDEL

Es werden asymptotische Entwicklungen für die Restsummen von Potenzreihen aus dem asymptotischen Verhalten der Koeffizienten hergeleitet. Endliche Teile davon werden zur Konvergenzbeschleunigung genutzt.

Выводятся асимптотические разложения для остаточных сумм степенных рядов из асимптотического поведения коэффициентов. Конечные части этих разложений используются для ускорения сходимости.

Asymptotic expansions for the residual sums of power series are derived by the asymptotical behavior of the coefficients. Finite parts at this expansions are used for the acceleration of convergence.

1. Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist ein Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung von komplexen Potenzreihen

$$s(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda z^\lambda \tag{1}$$

mit Konvergenzradius 1, bei denen das asymptotische Verhalten der Koeffizienten a_n für $n \to \infty$ in Form einer asymptotischen Entwicklung bekannt ist. Es wird diese Kenntnis zur Herleitung einer asymptotischen Entwicklung der Restsummen

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z), \qquad s_n(z) = \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda z^\lambda,$$

genutzt, um mittels eines endlichen Abschnittes $T_{n,k}$ dieser asymptotischen Entwicklung eine konvergenzbeschleunigende Transformation

$$\sigma_{n,k}(z) = s_n(z) + T_{n,k}(z) \tag{2}$$

zu gewinnen.

Diese Vorgehensweise ist in der mathematischen Literatur häufig zu finden, die Gewinnung solcher asymptotischer Entwicklungen für Restsummen erfolgt aber auf unterschiedliche Weise. Bei positiven Koeffizienten a_n, die in der Form $a_n = h(n)$ mit mehrfach differenzierbarer Funktion $h = h(x)$, $0 \leqq x < \infty$, darstellbar sind, kann man sie bei geeigneten Eigenschaften dieser Funktion im Fall $z = 1$ über die Euler-Maclaurinsche Summenformel erhalten (vgl. [6: 3.6]), im Fall $z = -1$ über eine von R. JOHNSONBAUGH [7] entwickelte modifizierte Euler-Maclaurinsche Summenformel. Bei anderen Untersuchungen bemüht man sich, die asymptotische Entwicklung der Restsummen aus einer asymptotischen Entwicklung der Koeffizienten

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \cdots\right), \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

zu gewinnen. Solche Ergebnisse wurden von W. G. BICKLEY und J. C. P. MILLER [3] im Fall $z = 1$, von A. C. SMITH [13] für reelle Variablenwerte und von E. RIEKSTINŠ [11] und J. WIMP [14] auch für komplexe Werte z des Konvergenzbereiches der Reihe (1) erzielt. Dabei sind von den beiden letztgenannten Autoren bereits andere Skalen als die in (3) benutzte Potenzskala verwendet worden.

In der vorliegenden Arbeit wird von einer asymptotischen Entwicklung der Koeffizienten von (1)

$$a_n \sim \gamma_0\varphi_0(n) + \gamma_1\varphi_1(n) + \cdots, \qquad n \to \infty, \tag{4}$$

nach einer allgemeinen Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathsf{N}}$ mit speziellen Eigenschaften ausgegangen. Das benutzte Herleitungsverfahren, man könnte es als Iteration mittels Parameterverschiebung bezeichnen, ist ein anderes als bei den obengenannten Autoren. Es wurde bereits in den Arbeiten des Autors [9, 10] zur Ermittlung des asymptotischen Verhaltens von Restsummen für spezielle Potenzreihen

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty} z^\lambda/(\lambda^\alpha \ln^\beta \lambda) \tag{5}$$

verwendet.

2. Spezielle Skaleneigenschaften

Wir bezeichnen im folgenden mit N die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich Null), mit $\mathsf{Z}, \mathsf{R}, \mathsf{C}$ die Mengen der ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen; es sei ferner N_k die Menge der natürlichen Zahlen ab k, und es finden die Landauschen Ordnungssymbole O und o Verwendung. Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}$ den Konvergenzbereich der jeweils betrachteten Potenzreihe (1) unter Ausschluß des Punktes $z = 1$, und es sei $\mathcal{K}_\varepsilon = \mathcal{K} \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(1)$, wobei $\mathcal{U}_\varepsilon(1)$ eine ε-Umgebung des Punktes $z = 1$ bedeutet. Im folgenden sollen asymptotische Entwicklungen (4) der Koeffizienten a_n für $n \to \infty$ nach einer Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathsf{N}}$, deren Skalenfunktionen einen gemeinsamen Definitionsbereich N_k haben, betrachtet werden.

Definition 1: Eine Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathsf{N}}$ heißt *iterativ verschiebbar*, wenn für jedes $\nu \in \mathsf{N}$ die Differenzenfolge $\big(\varphi_\nu(n+1) - \varphi_\nu(n)\big)_{n\in\mathsf{N}_k}$ eine asymptotische Entwicklung nach derselben Skala in der Form

$$\varphi_\nu(n+1) - \varphi_\nu(n) \sim \sum_{\xi=1}^{\infty} b_\xi(\nu)\, \varphi_{\nu+\xi}(n), \qquad n \to \infty, \tag{6}$$

besitzt.

Folgende Beispiele iterativ verschiebbarer Skalen seien angeführt.

Skala I: $\varphi_\nu(n) = 1/n^{\alpha+\nu/\varrho}$, $\nu \in \mathsf{N}$, mit $\varrho \in \mathsf{N}_1$, $\alpha \in \mathsf{C}$. Man findet hierfür eine Beziehung (6) aus der Darstellung

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\nu/\varrho}} - \frac{1}{n^{\alpha+\nu/\varrho}} = \frac{1}{n^{\alpha+\nu/\varrho}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\nu/\varrho} - 1\right]$$

nach Entwicklung des Ausdrucks $[\ldots]$ nach Potenzen von $1/n$ mittels Binomialreihe. Dabei erhält man die Koeffizienten

$$b_\xi(\nu) = \begin{cases} \binom{-\alpha - \nu/\varrho}{\varkappa} & \text{für } \xi = \varkappa\varrho,\ \varkappa \in \mathbf{N}_1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7}$$

Skala II: Die Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ bestehe aus den Folgen $(1/n^{\alpha+i}\ln^{\beta+j} n)_{n\in\mathbf{N}_1}$ mit festen $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ und für alle $i, j \in \mathbf{N}$ mit $j \leqq i$. Die Eigenschaft (6) geht aus der Differenzdarstellung

$$\frac{1}{n^{\alpha+i}\ln^{\beta+j} n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-i}\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^{-\beta-j} - 1\right]$$

bei Entwicklung des Ausdrucks $[\ldots]$ nach Potenzen von $1/n$ bzw. $1/n^p \ln n$ hervor. Eine geschlossene Darstellung der Koeffizienten dieser Entwicklungen ist in [9: Formel (14)] zu finden.

Skala III: Analog wie soeben bilden wir die Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ mittels der Folgen $(1/n^{\alpha+i}\ln^{\beta+j} n \ln^{\gamma+k}\ln n)_{n\in\mathbf{N}_1}$ mit festen Werten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ und für alle $i, j, k \in \mathbf{N}$ mit $k \leqq j \leqq i$. Die Eigenschaft (6) kann man jetzt aus der Differenzdarstellung

$$\frac{1}{n^{\alpha+i}\ln^{\beta+j} n \ln^{\gamma+k}\ln n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-i}\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)^{-\beta-j}\right.$$
$$\left.\times\left(1+\frac{\ln(1+\ln(1+1/n)/\ln n)}{\ln\ln n}\right)^{-\gamma-k} - 1\right]$$

durch Entwicklung nach Potenzen von $1/n$, $1/n^p \ln n$ und $1/n^p \ln^q n \ln\ln n$ gewinnen. Eine geschlossene Darstellung für die hierbei entstehenden Koeffizienten scheint noch nicht bekannt zu sein.

Bei einer vorgegebenen Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(i)$ den Konvergenzbereich der Reihe

$$\sum_{\lambda=k}^{\infty} \varphi_i(\lambda)\, z^\lambda \tag{8}$$

unter Ausschluß der Stelle $z = 1$.

Definition 2: Eine Skala $\{\varphi_\nu(n)\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ heißt (für Potenzreihen) *konvergenzmonoton*, wenn folgendes gilt:

a) für jedes Indexpaar $i, j \in \mathbf{N}$ mit $i < j$ ist $\mathcal{K}(i) \subset \mathcal{K}(j)$;
b) für jedes Indexpaar $i, j \in \mathbf{N}$ mit $i < j$ ist

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_j(\lambda)\, z^\lambda = o\left(\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_i(\lambda)\, z^\lambda\right), \quad n \to \infty,\ \forall\, z \in \mathcal{K}(i); \tag{9}$$

c) zu jedem natürlichen Indexwert i gibt es einen Indexwert $j \geqq i$ mit

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} |\varphi_j(\lambda)\, z^\lambda| = O\big(z^n \varphi_i(n)\big), \quad n \to \infty,\ \forall\, z \in \mathcal{K}(i). \tag{10}$$

Die obigen Skalen I—III erweisen sich als konvergenzmonoton. Die Eigenschaft a), bei der es nur für Werte z auf der Einheitskreislinie einer Untersuchung bedarf, ist mit dem Konvergenzkriterium von du Bois-Reymond und Dedekind [8: Abschnitte

184, 227] nachweisbar. Die Eigenschaft b) läßt sich mit einer asymptotischen Beziehung

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_i(\lambda)\, z^\lambda \sim \frac{z^n}{1-z}\, \varphi_i(n), \qquad n \to \infty \tag{11}$$

(für Werte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{R}$ siehe [1: Th. 2] und [12: Th. 1], für $\alpha, \beta \in \mathsf{C}$ in der Skala II siehe [10: Satz 1]) begründen. Mit dieser Beziehung läßt sich auch bei Werten z mit $|z| < 1$ für jeden Index j mit $j \geqq i$ die Eigenschaft c) unmittelbar nachweisen. Für Werte z der Einheitskreislinie erhält man (10) aus der Abschätzung

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} |\varphi_j(\lambda)\, z^\lambda| = \sum_{\lambda=n}^{\infty} \big(|\varphi_j(\lambda)/\varphi_i(\lambda)|\big)|\varphi_i(\lambda)|$$

$$\leqq |\varphi_i(n)|\, M \sum_{\lambda=n}^{\infty} 1/\lambda \ln \lambda \ln^2 \ln \lambda = O\big(\varphi_i(n)\, z^n\big), \qquad n \to \infty,$$

die ausführbar ist, sobald j um soviel größer als i gewählt wird, daß $\varphi_j(n)/\varphi_i(n) = O(1/n \ln n \ln^2 \ln n)$ ist.

3. Asymptotische Entwicklung der Restsummen

Unter Benutzung von Skalen mit den oben beschriebenen speziellen Eigenschaften gelingt es nun, Aussagen über das asymptotische Verhalten der Restsummen von Potenzreihen in Abhängigkeit von asymptotischen Gegebenheiten der Koeffizientenfolgen zu formulieren.

Satz: *Bei einer Potenzreihe* (1) *möge die Koeffizientenfolge für $n \to \infty$ eine asymptotische Entwicklung*

$$a_n \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \varphi_\nu(n), \qquad \gamma_0 \neq 0, \tag{12}$$

nach einer iterativ verschiebbaren und konvergenzmonotonen Skala $\{\varphi_\nu(n)\}$ besitzen. Dann sind ihre Restsummen für jeden Wert $z \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}(0)$ nach derselben Skala asymptotisch entwickelbar:

$$r_n(z) \sim \frac{z^{n+1}}{1-z} \sum_{\lambda=0}^{\infty} d_\lambda(z)\, \varphi_\lambda(n+1), \qquad n \to \infty. \tag{13}$$

Hierbei sind die Koeffizienten d_λ aus den Koeffizienten der Entwicklung (12) *über die Beziehung*

$$d_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \gamma_\nu c_{\lambda-\nu}(\nu, z) \tag{14}$$

berechenbar, wobei die Größen $c_\mu(\nu, z)$ bei Kenntnis der Koeffizienten der Entwicklung (6) *rekursiv durch*

$$c_0(\nu, z) = 1, \qquad c_\mu(\nu, z) = \frac{z}{1-z} \sum_{\xi=1}^{\mu} b_\xi(\nu)\, c_{\mu-\xi}(\nu+\xi, z) \tag{15}$$

für $\nu \in \mathsf{N}$ bestimmt sind. Die Entwicklung (13) *gilt gleichmäßig bezüglich z in jedem Bereich $\mathcal{K}_\varepsilon \cap \mathcal{K}(0)$, sofern entsprechende Gleichmäßigkeitseigenschaften bei den Beziehungen* (9), (10) *vorliegen.*

Im Spezialfall der Skala I oder II sind die Angaben (14) und (15) in folgender Weise präzisierbar. Bei der Skala I erhält die Rekursion (15) die Form

$$
\begin{aligned}
&c_0(\nu, z) = 1, \\
&c_{\varkappa\varrho}(\nu, z) = \frac{z}{1-z} \sum_{i=1}^{\varkappa} \binom{-\alpha - \nu/\varrho}{i} c_{\varkappa\varrho - i\varrho}(\nu + i\varrho, z), \quad \varkappa \in \mathsf{N}_1, \\
&c_\mu(\nu, z) = 0 \qquad \text{für } \mu \neq \varkappa\varrho, \ \varkappa \in \mathsf{N},
\end{aligned}
$$

und für (14) ergibt sich

$$
d_\lambda(z) = \sum_{i=0}^{\omega} \gamma_{\lambda - i\varrho} c_{i\varrho}(\lambda - i\varrho, z), \tag{16}
$$

wobei ω die maximale natürliche Zahl mit $\omega\varrho \leqq \lambda$ ist. Die Entwicklung (13) hierfür findet man als Spezialfall in Ergebnissen von J. Wimp [14: Theorem 1], für $\varrho = 1$ auch bei A. C. Smith [13]. Die Koeffizientenbeziehung (16) ist eine modifizierte Darstellung der Formel (2.42) in [14].

Bezüglich der Skala II ist eine (13) entsprechende Entwicklung

$$
\sum_{\lambda=n}^{\infty} \frac{z^\lambda}{\lambda^\alpha \ln^\beta \lambda} \sim \frac{z^n}{(1-z)\, n^\alpha \ln^\beta n} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} \frac{D_{r,s}(\alpha, \beta, z)}{n^r \ln^s n} \tag{17}
$$

in den Arbeiten [9, 10] hergeleitet worden. Dabei erwiesen sich die Koeffizienten dieser Entwicklung von der Gestalt

$$
D_{r,s}(\alpha, \beta, z) = A_r(z)\, B_s(\beta)\, C_{r,s}(\alpha), \tag{18}
$$

wobei die Funktionen A_r durch

$$
A_0(z) = 1, \qquad A_{r+1}(z) = (-1)^{r+1} \frac{z}{1-z} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r+1}{\nu} A_\nu(z) \tag{19}
$$

rekursiv bestimmt und die restlichen in der Form

$$
\begin{aligned}
&B_0(\beta) = 1, \qquad C_{0,0}(\alpha) = 1, \\
&B_s(\beta) = \beta(\beta+1) \cdots (\beta + s - 1) \qquad \text{für } s \in \mathsf{N}_1, \\
&C_{r,0}(\alpha) = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha + r - 1)/r! \qquad \text{für } r \in \mathsf{N}_1, \\
&C_{r,s}(\alpha) = (1/s!)\, d^s C_{r,0}(\alpha)/d\alpha^s, \qquad \text{für } r \in \mathsf{N}_1,\ 1 \leqq s \leqq r
\end{aligned} \tag{20}
$$

geschlossen darstellbar sind (die Darstellung für $C_{r,s}$ ist gegenüber der in [9: Satz 3] stark vereinfacht).

Besonders häufig treten Koeffizientenentwicklungen (12) nach der Skala II in der Form

$$
a_n \sim \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n^2} + \cdots \right), \qquad \alpha, \beta \in \mathsf{C}, \tag{21}
$$

auf. Nach (13) ist in diesem Fall eine Entwicklung

$$
r_n(z) \sim \frac{z^{n+1}}{1-z} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \frac{d_{\lambda,\varrho}(\alpha, \beta, z)}{(n+1)^{\alpha+\lambda} \ln^{\beta+\varrho}(n+1)} \tag{22}
$$

zu erwarten, deren Koeffizienten gemäß der Beziehungen (14), (17) durch

$$
d_{\lambda,\varrho}(\alpha, \beta, z) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} \delta_\nu D_{\lambda-\nu,\varrho}(\alpha + \nu, \beta, z) \tag{23}
$$

mit $D_{r,s} = 0$ für $r < s$ zu berechnen sind. Im Spezialfall $-\beta \in \mathbf{N}_1$ sind diesbezügliche Resultate bereits von J. WIMP [14: Th. 2] angegeben worden.

Bezüglich der Skala III sei erwähnt, daß bei der zu (17) analogen Entwicklung für die Restsummen $\sum_{\lambda=n}^{\infty} (\lambda^\alpha \ln^\beta \lambda \ln^\gamma \ln \lambda)^{-1} z^\lambda$ geschlossene Darstellungen für die Koeffizienten noch nicht bekannt sind.

4. Beweise

Der nachfolgende Beweis zum Satz im Abschnitt 3 wird in zwei Schritten ausgeführt. Beim ersten Beweisschritt wird gezeigt, daß Restsummen von (8)

$$r_n^{(i)}(z) = \sum_{\lambda=n+1}^{\infty} \varphi_i(\lambda) z^\lambda \tag{24}$$

nach der vorliegenden Skala $\{\varphi_\nu(n)\}$ asymptotisch entwickelbar sind. Dabei wird die iterative Verschiebbarkeit der Skalenfunktionen von Bedeutung sein. Im zweiten Beweisschritt wird über die Koeffizientenasymptotik (12) und mit der im ersten Beweisschritt erhaltenen Entwicklung für die Reihenreste (24) die asymptotische Entwicklung (13) gewonnen. Um die Beweisdarstellung zu vereinfachen, untersuchen wir dabei jeweils r_{n-1} anstelle von r_n.

Beweisschritt 1: Es soll eine Beziehung

$$r_{n-1}^{(i)}(z) = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\nu=0}^{k} c_\nu(i, z) \varphi_{i+\nu}(n) + O\big(z^n \varphi_{i+k+1}(n)\big) \tag{25}$$

durch vollständige Induktion nach k bewiesen werden. Für jeden Variablenwert $z \in \mathcal{K}(i)$ und jeden Index $j \geqq i$ gilt

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z} \varphi_j(n) + \frac{z}{1-z} \sum_{\lambda=n}^{\infty} [\varphi_j(\lambda+1) - \varphi_j(\lambda)] z^\lambda. \tag{26}$$

Nach (6) ist

$$\varphi_j(\lambda+1) - \varphi_j(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\xi} b_\nu(j) \varphi_{j+\nu}(\lambda) + O\big(\varphi_{j+\xi+1}(\lambda)\big), \tag{27}$$

wobei $\sum_{\lambda=n}^{\infty} |\varphi_{j+\xi+1}(\lambda) z^\lambda| = O\big(z^n \varphi_{j+1}(n)\big)$ bei gemäß (10) hinreichend groß gewähltem $\xi = \xi_1(j)$ ist. Zusammen mit (26) erhält man hieraus

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z} \varphi_j(n) + \frac{z}{1-z} \sum_{\nu=1}^{\xi} b_\nu(j) \sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_{j+\nu}(\lambda) z^\lambda + O\big(z^n \varphi_{j+1}(n)\big). \tag{28}$$

Die dabei rechts auftretenden unendlichen Reihen sind wegen der Konvergenzmonotonie der Skala $\{\varphi_\nu(n)\}$ sämtlich konvergent. Für alle ν mit $1 \leqq \nu \leqq \xi$ geht aus (9) $\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_{j+\nu}(\lambda) z^\lambda = o\left(\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_j(\lambda) z^\lambda\right)$ hervor; aus (28) ergibt sich somit

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z} \varphi_j(n) + o\big(z^n \varphi_j(n)\big). \tag{29}$$

Wenn man dieses Ergebnis bei den Reihen auf der rechten Seite von (28) zur Anwendung bringt, erhält man anstelle von (29) sogar

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z}\,\varphi_j(n) + O\big(z^n \varphi_{j+1}(n)\big), \qquad n \to \infty. \tag{30}$$

Diese Gleichung sei der Induktionsanfang im Induktionsbeweis, sie gilt insbesondere für $j = i$ und ergibt $c_0(i, z) = 1$.

Wir gehen nun von der Induktionsannahme aus, bei festem $z \in \mathcal{K}(i)$ gebe es zu natürlichem k Darstellungen der Form

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\nu=0}^{k-1} c_\nu(j, z)\, \varphi_{j+\nu}(n) + O\big(z^n \varphi_{j+k}(n)\big) \tag{31}$$

für jeden natürlichen Index $j \geqq i$. Wie bei der Herleitung von (28) aus (26) erhält man

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z}\,\varphi_j(n) + \frac{z}{1-z} \sum_{\nu=1}^{\xi} b_\nu(j) \sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_{j+\nu}(\lambda)\, z^\lambda + O\big(z^n \varphi_{j+k+1}(n)\big), \tag{32}$$

indem man $\xi = \xi_{k+1}(j)$ so groß wählt, daß $\sum\limits_{\lambda=n}^{\infty} |\varphi_{j+\xi+1}(\lambda)\, z^\lambda| = O\big(z^n \varphi_{j+k+1}(n)\big)$ ausfällt. Nach der Induktionsannahme ist für $\nu = 1, 2, \ldots, \xi$ stets

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_{j+\nu}(\lambda)\, z^\lambda = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\mu=0}^{k-1} c_\mu(j+\nu, z)\, \varphi_{j+\nu+\mu}(n) + O\big(z^n \varphi_{j+\nu+k}(n)\big), \tag{33}$$

das, in (32) eingesetzt,

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z}\,\varphi_j(n) + \frac{z^{n+1}}{(1-z)^2} \sum_{\nu=1}^{\xi} \sum_{\mu=0}^{k-1} b_\nu(j)\, c_\mu(j+\nu, z)\, \varphi_{j+\nu+\mu}(n)$$
$$+ O\big(z^n \varphi_{j+k+1}(n)\big) \tag{34}$$

ergibt, wenn man alle Restglieder zusammenfaßt. In dieses Restglied lassen sich nun alle Glieder der rechten Seite von (34) mit Indexpaaren ν, μ der Eigenschaft $\nu + \mu \geqq k + 1$ einbeziehen. Durch das Zusammenfassen von verbleibenden Gliedern in der Doppelsumme (34) mit äquivalentem asymptotischem Verhalten erhält man eine Darstellung

$$r_{n-1}^{(j)}(z) = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\mu=0}^{k} c_\mu(j, z)\, \varphi_{j+\mu}(n) + O\big(z^n \varphi_{j+k+1}(n)\big) \tag{35}$$

für jeden natürlichen Index $j \geqq i$. Der Unitätssatz über asymptotische Entwicklungen läßt hierbei den Schluß zu, daß die Koeffizienten c_ν für $\nu = 0, 1, \ldots, k-1$ mit denen von (31) übereinstimmen. Damit ist der Induktionsschritt vollzogen und die Beziehung (14) bewiesen. Aus dem Übergang von (34) zu (35) ist überdies erkennbar, daß eine Beziehung

$$c_\mu(i, z) = \frac{z}{1-z} \sum_{\nu=1}^{\mu} b_\nu(i)\, c_{\mu-\nu}(i+\nu, z) \tag{36}$$

besteht.

Die Darstellung (25) gilt unter den im Satz ausgeführten Zusatzvoraussetzungen bei festem Index i und fester natürlicher Zahl k sogar gleichmäßig für alle $z \in \mathcal{K}_\varepsilon(i)$.

In der Tat wirkt sich beim Nachweis der Restgliedordnung in (25) die Abhängigkeit von der Variablen z nur in Bedingungen der Form (9), (10) mit endlich vielen Indexwerten j und in der Form der in $\mathcal{K}_\varepsilon(i)$ beschränkten Koeffizientenfunktion $w = z/(1-z)$ aus.

Beweisschritt 2: Wir weisen nach, daß es für jeden Wert $z \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}(0)$ zu jedem natürlichen k eine Darstellung

$$r_{n-1}(z) = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\lambda=0}^{k} d_\lambda(z)\, \varphi_\lambda(n) + O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big) \tag{37}$$

gibt. Aus (12) erhält man

$$a_n = \sum_{\nu=0}^{\omega} \gamma_\nu \varphi_\nu(n) + O\big(\varphi_{\omega+1}(n)\big), \tag{38}$$

wobei $\omega = \omega(k)$ so gewählt sei, daß gemäß (10)

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} |\varphi_{\omega+1}(\lambda)\, z^\lambda| = O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big), \qquad n \to \infty, \tag{39}$$

ist. Aus (38) folgt dann unmittelbar

$$r_{n-1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\omega} \gamma_\nu \sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_\nu(\lambda)\, z^\lambda + O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big). \tag{40}$$

Die Konvergenz der rechtsstehenden unendlichen Reihen ist dabei aufgrund der Konvergenzmonotonie gewährleistet. Nach dem Ergebnis des ersten Beweisschrittes ist für $\nu = 0, 1, \ldots, k$ stets

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_\nu(\lambda)\, z^\lambda = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\mu=0}^{k-\nu} c_\mu(\nu, z)\, \varphi_{\nu+\mu}(n) + O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big) \tag{41}$$

und für $\nu = k+1, \ldots, \omega$

$$\sum_{\lambda=n}^{\infty} \varphi_\nu(\lambda)\, z^\lambda = O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big). \tag{42}$$

Durch Einsetzen dieser Beziehungen in die Gleichung (40) erhält man

$$r_{n-1}(z) = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\mu=0}^{k-\nu} \gamma_\nu c_\mu(\nu, z)\, \varphi_{\nu+\mu}(n) + O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big)$$

oder in anderer Darstellung

$$r_{n-1}(z) = \frac{z^n}{1-z} \sum_{\lambda=0}^{k} d_\lambda(z)\, \varphi_\lambda(n) + O\big(z^n \varphi_{k+1}(n)\big), \tag{43}$$

wobei die Koeffizienten d_λ über die Beziehung (14) bestimmt sind.

Die behauptete Gleichmäßigkeit bezüglich $z \in \mathcal{K}_\varepsilon \cap \mathcal{K}(0)$ ist aus folgenden Überlegungen ersichtlich. Nach der Voraussetzung über (10) ist die Gleichmäßigkeit in (39), somit auch in (40) gewährleistet, und dem im ersten Beweisschritt erzielten Ergebnis kann man sie für die Restglieder in (41) und (42) entnehmen. Hieraus folgt die angestrebte Gleichmäßigkeit für das Restglied in (43).

5. Konvergenzbeschleunigende Transformationen

Die im Satz vom Abschnitt 3 beschriebenen Ergebnisse zum asymptotischen Verhalten von Restsummen ermöglichen es, für Potenzreihen (1) mit bekanntem asymptotischem Verhalten ihrer Koeffizienten konvergenzbeschleunigende Transformationen in der Form

$$\sigma_{n,k}(z) = s_n(z) + T_{n,k}(z) \tag{44}$$

(k feste natürliche Zahl) zu gewinnen. Dabei seien die zu den n-ten Partialsummen hinzugefügten Korrekturglieder $T_{n,k}$ endliche Bestandteile der asymptotischen Entwicklung der Restsummen:

$$T_{n,k}(z) = \frac{z^{n+1}}{1-z} \sum_{\lambda=0}^{k} d_\lambda(z)\, \varphi_\lambda(n+1).$$

Durch eine solche Transformation ist eine Beschleunigungsrate der Ordnung

$$(s - \sigma_{n,k})/(s - s_n) = O\big(\varphi_{k+1}(n)/\varphi_0(n)\big)$$

erzielbar, die für jeden Wert $z \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}(0)$ bzw. unter den im Satz erwähnten Zusatzvoraussetzungen gleichmäßig bezüglich z in jedem Bereich $\mathcal{K}_\varepsilon \cap \mathcal{K}(0)$ gilt. Der erforderliche Ausschluß des Wertes $z = 1$ bei der benutzten Untersuchungsmethode läßt eine nur geringe Beschleunigung für z-Werte dicht bei 1 erwarten, was sich bei numerischen Auswertungen bestätigt. Mit der Festlegung von k hat man bei numerischen Berechnungen abzuwägen zwischen einer erwünschten hohen Beschleunigungsrate einerseits und dem zur Bestimmung der Koeffizienten erforderlichen Rechenaufwand andererseits. Da bei Vergrößerung von k letzterer meist schnell anwächst, wird man sich in der Regel mit einem kleinen k-Wert begnügen und die erwünschte Genauigkeit des Näherungswertes durch größere Wahl von n zu erreichen versuchen. Bedacht werden sollte auch der asymptotische Charakter der zur Beschleunigung verwendeten Korrekturglieder. Die in den O-Gliedern enthaltenen Konstanten können bei Vergrößerung von k wachsen, was zur Folge hat, daß dann die höhere Beschleunigungsrate erst für größere Werte n numerisch wirksam wird. In der Regel tritt dieser Effekt aber nur bei z-Werten dicht bei 1 auf (vgl. die nachfolgende Tabelle 3); erklärbar ist dies mit der Einflußnahme k-ter Potenzen von $1/(1-z)$ auf diese Konstanten.

6. Numerische Ergebnisse

Das im vorigen Abschnitt vorgestellte konvergenzbeschleunigende Verfahren soll jetzt an der speziellen Reihe

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty} \left(\sqrt{\ln \lambda}/(\lambda + 0{,}5)\right) z^\lambda \tag{45}$$

mit dem Konvergenzbereich $\mathcal{K} = \{z : |z| \leqq 1, z \neq 1\}$ numerisch erprobt werden. Eine Koeffizientenentwicklung dieser Reihe nach der Skala II liegt in der Form

$$a_n \sim \frac{\sqrt{\ln n}}{n}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{16n^4} \mp \cdots\right)$$

vor, also eine Entwicklung (21) mit $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $\delta_\nu = (-1)^\nu/2^\nu$. Nach (22) erhält man

$$T_{n,14} = \frac{z^{n+1}\sqrt{\ln (n+1)}}{(1-z)(n+1)} \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \frac{d_{\lambda,\varrho}}{(n+1)^\lambda \ln^\varrho (n+1)}, \tag{46}$$

wobei die Koeffizienten $d_{\lambda,\varrho}$ über die Beziehungen (23) und (18) zu berechnen sind und man dazu die aus (19), (20) hervorgehenden Funktionen

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1, \quad A_1 = z/(z-1), \quad A_2 = (z^2+z)/(z-1)^2,\\
&A_3 = (z^3+4z^2+z)/(z-1)^3, \quad A_4 = (z^4+11z^3+11z^2+z)/(z-1)^2,\\
&B_0 = 1, \quad B_1 = \beta, \quad B_2 = B_1(\beta+1); \quad B_3 = B_2(\beta+2),\\
&B_4 = B_3(\beta+3),\\
&C_{0,0} = C_{1,1} = 1, \quad C_{1,0} = \alpha, \quad C_{2,0} = \alpha(\alpha+1)/2,\\
&C_{2,1} = (2\alpha+1)/2,\\
&C_{2,2} = 1/2, \quad C_{3,0} = C_{2,0}(\alpha+2)/3, \quad C_{3,1} = (3\alpha^2+6\alpha+2)/6,\\
&C_{3,2} = (\alpha+1)/2, \quad C_{3,3} = 1/6, \quad C_{4,0} = C_{3,0}(\alpha+3)/4,\\
&C_{4,1} = (2\alpha^3+9\alpha^2+11\alpha+3)/12, \quad C_{4,2} = (6\alpha^2+18\alpha+11)/24,\\
&C_{4,3} = (2\alpha+3)/12, \quad C_{4,4} = 1/24
\end{aligned}$$

zu benutzen hat. In den folgenden Tabellen sind zur Reihe (45) numerische Ergebnisse von der konvergenzbeschleunigenden Transformation (44), (46) wiedergegeben. Es wurden dabei Argumente gewählt, bei denen diese Reihe langsam konvergiert. In Klammern sind jeweils die (grob gerundeten) relativen Abweichungen zum exakten Reihenwert vermerkt.

Ein Vergleich des hier vorgestellten mit anderen konvergenzbeschleunigenden Verfahren (siehe [4, 5, 15, 16]) läßt Vorzüge und Nachteile desselben erkennen. In der erzielbaren Beschleunigungsgüte ist es mit anderen vergleichbar oder anderen überlegen. Ein Nachteil liegt im höheren analytischen und Programmieraufwand bei größerer Wahl von k. Als vorteilhaft erweist sich im Vergleich mit linearen Transformationen (Euler-, Tschebyscheff-Transformation) sein garantierter Beschleuni-

Tabelle 1: Näherungswerte für $z = 0.9999 \exp(3\pi i/4)$ zum Reihenwert $s = 0.07083157 - 0.17495136i$

n	s_n	$\sigma_{n,0}$	$\sigma_{n,5}$	$\sigma_{n,14}$
5	0.11317265 −0.28428159i	0.06699601 −0.17279479i $(2.3 \cdot 10^{-2})$	0.07093127 −0.17502539i $(6.6 \cdot 10^{-4})$	0.07082566 −0.17494298i $(5.4 \cdot 10^{-5})$
10	0.04102924 −0.24403821i	0.07015535 −0.17372569i $(7.4 \cdot 10^{-3})$	0.07083738 −0.17496297i $(6.8 \cdot 10^{-5})$	0.07083143 −0.17495104i $(1.8 \cdot 10^{-6})$
15	0.01899857 −0.19578697i	0.07095308 −0.17426797i $(3.7 \cdot 10^{-3})$	0.07083110 −0.17495460i $(1.7 \cdot 10^{-5})$	0.07083157 −0.17495132i $(2.1 \cdot 10^{-7})$

Tabelle 2: Näherungswerte für $z = 0.9999 \exp(\pi i/4)$ zum Reihenwert $s = -0.396283 + 0.244093i$

n	s_n	$\sigma_{n,0}$	$\sigma_{n,2}$	$\sigma_{n,5}$	$\sigma_{n,9}$	$\sigma_{n,14}$
5	−0.636257 +0.381629i	−0.367120 +0.270111i ($8.4 \cdot 10^{-2}$)	−0.389559 +0.233670i ($2.7 \cdot 10^{-2}$)	−0.401534 +0.241998i ($1.2 \cdot 10^{-2}$)	−0.396872 +0.247371i ($7.2 \cdot 10^{-3}$)	−0.393958 +0.243886i ($5.0 \cdot 10^{-3}$)
10	−0.225084 +0.298998i	−0.394844 +0.228705i ($3.3 \cdot 10^{-2}$)	−0.399338 +0.244117i ($6.6 \cdot 10^{-3}$)	−0.396178 +0.244967i ($1.9 \cdot 10^{-3}$)	−0.395958 +0.244013i ($7.2 \cdot 10^{-4}$)	−0.396346 +0.243939i ($3.6 \cdot 10^{-4}$)
15	−0.454968 +0.123491i	−0.402999 +0.248913i ($1.7 \cdot 10^{-2}$)	−0.395537 +0.244991i ($2.5 \cdot 10^{-3}$)	−0.396117 +0.243921i ($5.1 \cdot 10^{-4}$)	−0.396341 +0.244050i ($1.5 \cdot 10^{-4}$)	−0.396303 +0.244113i ($1.2 \cdot 10^{-4}$)

Tabelle 3: Näherungswerte für $z = 0.9999 \exp(\pi i/32)$ zum Reihenwert $s = 1.03198 + 1.85713i$

n	s_n	$\sigma_{n,0}$	$\sigma_{n,2}$	$\sigma_{n,5}$	$\sigma_{n,9}$	$\sigma_{n,14}$
25	1.53018 +2.25528i	1.10926 +1.68895i ($8.7 \cdot 10^{-2}$)	0.92298 +1.83029i ($5.3 \cdot 10^{-2}$)	1.02257 +1.96079i ($4.9 \cdot 10^{-2}$)	1.16256 +1.85335i ($6.1 \cdot 10^{-2}$)	1.00633 +1.65091i ($9.8 \cdot 10^{-2}$)
50	0.65426 +1.82392i	1.03673 +1.91930i ($2.9 \cdot 10^{-2}$)	1.05280 +1.85255i ($1.0 \cdot 10^{-2}$)	1.02830 +1.84671i ($5.2 \cdot 10^{-3}$)	1.02505 +1.86045i ($3.6 \cdot 10^{-3}$)	1.03544 +1.86289i ($3.2 \cdot 10^{-3}$)
75	1.26267 +1.71420i	1.01246 +1.83285i ($1.4 \cdot 10^{-2}$)	1.02673 +1.86239i ($3.5 \cdot 10^{-3}$)	1.03407 +1.85883i ($1.3 \cdot 10^{-3}$)	1.03271 +1.85604i ($6.2 \cdot 10^{-4}$)	1.03129 +1.85674i ($3.7 \cdot 10^{-4}$)

gungsbereich, im Vergleich zu nichtlinearen Transformationen (Aitken-, Lubkin-, Brezinski-Transformation) die erzielbare höhere Beschleunigungsrate, im Vergleich zum ε-Algorithmus die bessere numerische Stabilität. Darüber hinaus gestattet es dank der Vielfalt zugelassener Skalen bei vielen Reihen eine garantierte Beschleunigung mit voraussagbarer Ordnung, wo gesicherte Ergebnisse hierüber mit anderen Transformationen nicht vorliegen.

LITERATUR

[1] Adamović, D. D.: Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste ou terme général d'une série réelle ou complexe. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **15** (29) (1973), 5–20.

[2] Adamović, D. D.: Quelques compléments aux résultats du travail „Sur la convergence …". Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **20** (34) (1975), 9–27.

[3] Bickley, W. G., and J. C. P. Miller: The numerical summation of slowly convergent series of positive terms. Phil. Mag., Ser. 7, **22** (1936), 754–767.

[4] Brezinski, C.: Survey on convergence acceleration methods in numerical analysis. The Mathematical Student **46** (1978), 28–41.

[5] Brezinski, C.: Algorithmes d'accélération de la convergence. Paris: Éditions Technip 1978.
[6] de Bruijn, N. G.: Asymptotic methods in analysis. Amsterdam—Groningen: North-Holland Publ. Co., P. Noordhoff LTD 1958.
[7] Johnsonbaugh, R.: Summing an alternating series. Amer. Math. Monthly **86** (1977), 637—648.
[8] Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl. Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag 1947.
[9] Riedel, R.: Asymptotische Entwicklung der Restsummen gewisser alternierender Reihen II. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-nat. R. **32** (1983), 133—146.
[10] Riedel, R.: Asymptotische Entwicklung der Restsummen gewisser Potenzreihen. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-nat. R. **33** (1984), 109—120.
[11] Риекстыньш, Э. Я.: Асимптотические оценки конечных сумм методом неопределенных коэффициентов. Латв. мат. ежегодник **6** (1969), 141—149.
[12] Simić, S.: On a hypothesis of D. Adamović concerning asymptotic behaviour of some complex sequences. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **25** (39) (1979), 167—178.
[13] Smith, A. C.: Asymptotic estimates of sums of series using difference equations. Utilitas Math. **13** (1978), 249—269.
[14] Wimp, J.: The summation of series whose terms have asymptotic representations. J. Approx. Theory **10** (1974), 185—198.
[15] Wimp, J.: Acceleration methods. To appear in: Encyclopedia of Computer Science and Technology. Vol. 1. New York: M. Dekker 1975, p. 181—210.
[16] Wimp, J.: Sequence transformations and their applications. New York—London—Toronto—Sydney—San Francisco: Academic Press 1981.

Manuskripteingang: 20. 10. 1987; in revidierter Fassung 29. 12. 1988

VERFASSER:

Dr. Roland Riedel
Sektion Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg
Universitätsplatz 6
DDR-4010 Halle