Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (2) 1990, S. 177–185

Eine Liniennorm zur Konstruktion quasikonformer Abbildungen

E. Hoy

Die Arbeit befaßt sich mit der Konstruktion konformer Abbildungen $f = f(z)$, die zusätzlich die Differentialgleichung $f_{\bar{z}}(z) = q\overline{f_z(z)}$ mit einer gegebenen Konstanten q $(0 < q < 1)$ im Inneren einer Kurve $\mathfrak{C}$ erfüllen. Die Funktion f kann durch eine Folge $\{f_N\}$ approximiert werden. Diese konvergiert gegen f in einer Norm, die von G. Szegö eingeführt wurde und die Quadratwurzel aus einem Kurvenintegral längs $\mathfrak{C}$ ist. Außerdem werden eine andere Art der Konvergenz und ein Beispiel betrachtet.

Работа посвящена конструкции конформного отображения $f = f(z)$, которое удовлетворяет дифференциальному уравнению $f_{\bar{z}}(z) = q\overline{f_z(z)}$ с данной постоянной q $(0 < q < 1)$ внутри кривой $\mathfrak{C}$. Функция f является пределом некоторой последовательности $\{f_N\}$. Та сходится к f по норме введенной Г. Сеге и даётся квадратным корнем из контурного интеграла вдоль $\mathfrak{C}$. Кроме того, иной вид сходимости к f и один пример рассматриваются.

The paper deals with the construction of conformal mappings $f = f(z)$ which fulfil in addition the differential equation $f_{\bar{z}}(z) = q\overline{f_z(z)}$ with a given constant q $(0 < q < 1)$ in the interior of a curve $\mathfrak{C}$. The function f can be approximated by a sequence $\{f_N\}$. This sequence converges to f in a norm introduced by G. Szegö, which is the square root of a contour integral over $\mathfrak{C}$. Furthermore, another kind of convergence to f and an example are considered.

1. Einleitung

Bei der Berechnung von konformen Abbildungen mit Hilfe ihrer Extremaleigenschaften werden verschiedene Normen für analytische Funktionen benutzt (siehe [3: Kap. III]). In dieser Arbeit wird die Szegö-Norm $\|\cdot\|_S$,

$$\|h\|_S = \left(\int_{\mathfrak{C}} |h(z)|^2 \, |dz|\right)^{1/2}, \tag{1}$$

für die Approximation einer quasikonform fortsetzbaren konformen Abbildung verwendet. Sie ist von G. Szegö in [21] eingeführt worden. Hierbei ist $\mathfrak{C}$ eine rektifizierbare Jordan-Kurve und h eine im Äußeren von $\mathfrak{C}$ analytische Funktion, für die das Integral in (1) noch endlich ist.

Es soll die folgende quasikonforme Abbildung $f = f(z)$ der Vollebene auf sich approximiert werden: Sie sei im Äußeren von $\mathfrak{C}$ konform mit der Entwicklung

$$f(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \cdots \tag{2}$$

in einer Umgebung von ∞ und genüge im Inneren von $\mathfrak{C}$ der Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}}(z) = q\overline{f_z(z)} \tag{3}$$

mit einer vorgegebenen Zahl $q \in (0, 1)$. Dies ist äquivalent zu (siehe [7: Abschnitt 2] oder [8: Abschnitt 2])

$$f(z) - z = -\frac{q}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \text{ außerhalb von } \mathfrak{C}). \tag{4}$$

Dabei ist $\mathfrak{C}$ mathematisch positiv orientiert. Führt man mit $r(z) = f(z) - z$ und $b(z) = -(q/2\pi i) \int_{\mathfrak{C}} \bar{\zeta}/(\zeta - z)\, d\zeta$ zwei neue Funktionen r und b und mit

$$A[X(z)] = -(q/2\pi i) \int_{\mathfrak{C}} \overline{X(\zeta)}/(\zeta - z)\, d\zeta \tag{5}$$

(z jeweils außerhalb von $\mathfrak{C}$) den Operator A ein, so ist wegen (4) für r die Charakterisierung

$$\|r - A(r) - b\|_S = \mathrm{Min} \tag{6}$$

naheliegend. Im Unterschied zu [7, 8] wird hier die Szegö-Norm benutzt. Bei der Approximation von konformen Abbildungen hatte sich (siehe [3: Kap III, § 3.3, a)]) nämlich ergeben, daß mit ihr eine schnellere Konvergenz gegen die konforme Abbildung zu beobachten war als bei Benutzung der Bergman-Norm $\|\cdot\|_B$ (siehe [1]),

$$\|h\|_B = \left(\iint_{\mathfrak{B}} |h'(z)|^2\, dx\, dy\right)^{1/2} \quad (z = x + iy)$$

für das im Inneren von $\mathfrak{C}$ gelegene Gebiet $\mathfrak{B}$.

Man führt nun den folgenden Hilbert-Raum $H_S(\mathfrak{G})$ ein (seine Untersuchung findet man in [3: Kap. III, § 1.1] und 17: Kap. IV, § 7]): $\mathfrak{G}$ sei das von $\mathfrak{C}$ berandete Gebiet in der Vollebene mit $\infty \in \mathfrak{G}$ und $H_S(\mathfrak{G})$ möge alle in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen h enthalten, deren (nicht notwendig stetigen) Randwerte auf $\mathfrak{C}$ noch über $\mathfrak{C}$ quadratisch integrierbar sind, so daß $\|\cdot\|_S$ aus (1) sich für eine Norm in $H_S(\mathfrak{G})$ eignet. Des weiteren bezeichne $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset H_S(\mathfrak{G})$ ein bezüglich $\|\cdot\|_S$ vollständiges System. Für die Approximation von r mittels (6) benötigt man zum einen die Stetigkeit des Operators A aus (5) in $H_S(\mathfrak{G})$ und die Existenz einer festen (höchstens von q in (3) abhängigen) Konstanten $L > 0$ mit $\|(I - A)\, h\|_S \geqq L\, \|h\|_S$ für alle $h \in H_S(\mathfrak{G})$. In den folgenden Abschnitten wird A unter verschiedenen Voraussetzungen an $\mathfrak{C}$ betrachtet, und daraus werden Schlußfolgerungen für die Art der Konvergenz von Näherungslösungen gegen f abgeleitet.

2. Eigenschaften von A bei einer Kurve von beschränkter Drehung

Es sei $\mathfrak{C}$ in diesem Abschnitt eine Kurve von beschränkter Drehung ohne Spitzen (vgl. dazu [2, 6, 19] und [3: Kap. I, § 3.6]). Nach [2: Satz 16.1] gilt

(i) A ist für jedes $q \in \mathbb{R}$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_S$.

Demnach folgt als zweite Eigenschaft von A:

(ii) Für hinreichend kleines $q \in (0, 1)$ gilt für alle $h \in H_S(\mathfrak{G})$ mit einer nur von q abhängigen festen Konstanten $L > 0$ die Abschätzung $\|(I - A)\, h\|_S \geqq L\|h\|_S$.

Damit ist ersichtlich, wie f approximiert werden kann. Man setzt

$$f_N(z) = z + \sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu^{(N)} \psi_\nu(z) \quad (z \in \mathfrak{G},\ N \in \mathbb{N}),$$

wobei $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ das in der Einleitung erklärte vollständige System ist. Die Koeffizienten $\beta_\nu^{(N)}$ werden hierbei durch

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{N}\beta_\nu^{(N)}\psi_\nu - \sum_{\nu=1}^{N}\overline{\beta_\nu^{(N)}}A(\psi_\nu) - b\right\|_{\mathrm{S}} = \mathrm{Min}$$

bestimmt. Dann ergibt sich wie in [8: Abschnitt 3] wegen (i) und (ii) die Konvergenz $\|f_N - f\|_{\mathrm{S}} \to 0$. Jedoch ist die Voraussetzung „q hinreichend klein" sehr einschränkend. Die Existenz von f ist mit anderen Methoden (siehe z. B. [12] und dort zitierte Literatur) für jedes $q \in (0, 1)$ bewiesen worden. Auch besitzt diese Abbildung für alle $q \in (0, 1)$ eine Bedeutung in der geometrischen Funktionentheorie und bei einigen Problemen der mathematischen Physik (siehe dazu [10–12]). Wünschenswert wäre aber ein Beweis für die Konvergenz von f_N gegen f unter diesen allgemeinen Voraussetzungen an $\mathfrak{C}$ für $q \in (0, 1)$.

3. Konvergenzbeweis für hinreichend glatte Kurven

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{C}$ eine glatte Jordan-Kurve. Überdies möge die Tangente an $\mathfrak{C}$ noch Hölder-stetig sein, d. h., es existieren Konstanten $L' > 0$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit $|z'(s_1) - z'(s_2)| \leqq L' |s_1 - s_2|^\alpha$ für alle s_1 und s_2. Dabei sei s die Bogenlänge und $z'(s)$ die Ableitung der Parameterdarstellung der Kurve $\mathfrak{C}$ nach s. Der Operator A ist dann wieder für alle reellen q stetig (siehe (i) im 2. Abschnitt). Man benötigt noch die Gültigkeit von

$$\|(I - A)\,h\|_{\mathrm{S}} \geqq L\,\|h\|_{\mathrm{S}} \quad \forall h \in H_{\mathrm{S}}(\mathfrak{C}) \tag{7}$$

mit einer nur von q abhängigen Konstanten $L > 0$. Dazu betrachtet man auf $\mathfrak{C}$ analytische Funktionen h und setzt

$$g = (I - A)\,h. \tag{8}$$

Dann ist g noch auf $\mathfrak{C}$ stetig (siehe [9: Abschnitt 3]). Es genügt, (7) für auf $\mathfrak{C}$ analytische Funktionen h $\left(\in H_{\mathrm{S}}(\mathfrak{G})!\right)$ zu zeigen (siehe z. B. [3: Kap. III, Satz 1.9ff.] und dort zitierte Literatur). In Analogie zu [14] wird eine Integralgleichung für $\operatorname{Re} h$ aus (8) hergeleitet. Addiert man zu (8) noch $0 = qh(z) - A[\overline{h(z)}]$ $(z \in \mathfrak{G})$, so folgt

$$(1 + q)\,h(z) - 2A\{\operatorname{Re}[h(z)]\} = g(z) \quad (z \in \mathfrak{G}) \tag{9}$$

(siehe [14: Formel (18)]). Hieraus ergibt sich

$$(1 + q)\operatorname{Re}[h(z)] + \frac{q}{\pi}\int\limits_{\mathfrak{C}}\operatorname{Re}[h(\zeta)]\operatorname{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta - z}\right) = \operatorname{Re}[g(z)] \quad (z \in \mathfrak{G})$$

(siehe [14: Formel (20)]). Mit Hilfe von [2: Satz 14.2] läßt sich das noch in der Form

$$\operatorname{Re}\{h[z(s)]\} + q\int_0^T \operatorname{Re}\{h[z(t)]\}\,K(s, t)\,dt = \operatorname{Re}\{g[z(s)]\} \tag{10}$$

mit dem Neumannschen Kern $K(s, t)$ schreiben (siehe [3: S. 3ff.]). Dabei bedeutet T die Länge von $\mathfrak{C}$, und der hier stehende Integraloperator ist für glatte Kurven $\mathfrak{C}$ in $L_2(\mathfrak{C}) = \left\{\mathbf{H}: \int\limits_{\mathfrak{C}} |\mathbf{H}(z)|^2\,|dz| < \infty\right\}$ kompakt (dazu wird auf [2: Satz 14.3] verwiesen). Wegen $0 < q < 1$ ergibt sich, daß (10) mit Hilfe der Neumannschen Reihe auflösbar ist (vgl. [3: Kap. I, § 3.1]). Daraus folgt die Existenz einer von $q \in (0, 1)$ abhängigen

Konstanten $L_1 > 0$ mit

$$\int_0^T |\mathrm{Re}\,\{h[z(s)]\}|^2\, ds \leqq L_1 \int_0^T |\mathrm{Re}\,\{g[z(s)]\}|^2\, ds \tag{11}$$

für alle h und g aus (8). Mittels (9) und (11) ergibt sich wegen der Stetigkeit von A die Abschätzung $\|h\|_S \leqq L_2\, \|g\|_S$ mit einer nur von $q \in (0, 1)$ abhängigen Konstanten $L_2 > 0$. Damit ist (7) bewiesen. Zusammenfassend hat man das folgende Ergebnis.

Satz 1: *Es sei $\mathfrak{C}$ eine glatte Jordan-Kurve mit Hölder-stetiger Tangente. Die Abbildung f aus* (2) *und* (3) *läßt sich durch Funktionen f_N mit*

$$f_N(z) = z + \sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu^{(N)} \psi_\nu(z) \quad (N \in \mathbb{N}) \tag{12}$$

approximieren, wobei $f_N(z)$ ($z \in \mathfrak{G}$) durch

$$\|f_N(z) - z - A[f_N(z)]\|_S = \mathrm{Min} \tag{13}$$

bestimmt wird, $\|f_N - f\|_S \to 0$ gilt und das Funktionensystem $\{\psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ in $H_S(\mathfrak{G})$ vollständig bezüglich $\|\cdot\|_S$ ist.

4. Konvergenz gegen den Koeffizienten von z^{-1}

In diesem Abschnitt soll eine andersartige Voraussetzung an $\mathfrak{C}$ erhoben werden, so daß wenigstens der Realteil des Koeffizienten bei z^{-1} in der Laurent-Entwicklung von f_N aus (12) gegen $\mathrm{Re}\,\alpha_1$ aus (2) konvergiert. $\mathfrak{C}$ sei der Einfachheit halber eine aus endlich vielen abgeschlossenen analytischen Bögen bestehende Jordan-Kurve, wobei die eingeschlossenen Winkel zwischen den Bögen von Null verschieden sein mögen. Bekanntlich (siehe [13: Fußnote auf S. 271]) ist f in fast allen Punkten von $\mathfrak{C}$ analytisch. Es gelte nun noch die Voraussetzung

$$\int_{\mathfrak{C}} |f'(z)|^2\, |dz| < \infty, \tag{14}$$

und die Funktionen f_N seien auf $\mathfrak{C}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ analytisch. Es sei $\alpha_1^{(N)}$ der Koeffizient bei z^{-1} in der Laurent-Entwicklung bei $z = \infty$ von f_N aus (12). Nun gilt wegen (2) und (12)

$$\mathrm{Re}\,(\alpha_1^{(N)} - \alpha_1) = \frac{1}{1-q^2}\, \mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} [f_N(z) - q\overline{f_N(z)}]\, d[f(z) - q\overline{f(z)}] \right\} \tag{15}$$

Es bleibt zu zeigen, daß das Integral auf der rechten Seite hier für $N \to \infty$ gegen Null strebt. f_N soll nach wie vor durch

$$\|f_N(z) - z - A[f_N(z)]\|_S = \mathrm{Min} = M_N \tag{16}$$

bestimmt werden. M_N konvergiert für $N \to \infty$ wegen der Vollständigkeit von $\{\psi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ und der Stetigkeit von A gegen Null. Wegen der Sprungrelation für das Cauchy-Integral steht in (16)

$$\int_{\mathfrak{C}} |f_N(z) - q\overline{f_N(z)} + \Phi_N(z)|^2\, ds = M_N^2, \tag{17}$$

wobei Φ_N eine im Inneren von $\mathfrak{C}$ analytische Funktion mit stetigen Randwerten auf $\mathfrak{C}$ ist. Da $f - q\bar{f}$ ebenfalls innerhalb von $\mathfrak{C}$ analytisch ist, folgt aus (15) und (17) die Beziehung

$$\operatorname{Re}(\alpha_1^{(N)} - \alpha_1)$$
$$= \frac{1}{1-q^2} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} [f_N(z) - q\overline{f_N(z)} + \Phi_N(z)]\, d[f(z) - q\overline{f(z)}]\right\}.$$

Damit ergibt sich

$$[\operatorname{Re}(\alpha_1^{(N)} - \alpha_1)]^2$$
$$\leqq \frac{1}{4\pi^2(1-q^2)^2} \int_{\mathfrak{C}} |f_N(z) - q\overline{f_N(z)} + \Phi_N(z)|^2\, ds \int_{\mathfrak{C}} \left| f'(z) - q\overline{f'(z)}\, \frac{\overline{dz}}{dz}\right|^2 ds.$$

Hieraus folgt sofort wegen (14) und $M_N \to 0$ für $N \to \infty$, daß $\operatorname{Re}(\alpha_1^{(N)} - \alpha_1) \to 0$ ist. Im vorliegenden Fall könnte man

$$\psi_\nu(z) = (z - z_0)^{-\nu}. \quad (\nu \in \mathbb{N}) \tag{18}$$

wählen, wobei z_0 sich innerhalb von $\mathfrak{C}$ befindet. Dieses Funktionensystem ist in $H_S(\mathfrak{G})$ vollständig (siehe [3: Kap. III, Satz 1.9ff.] und dort zitierte Literatur). Dann ergibt sich der folgende

Satz 2: *Es sei $\mathfrak{G}$ von einer stückweise analytischen Kurve ohne Nullwinkel berandet. Außerdem gelte für die Abbildung f aus* (2) *und* (3) *noch $\int_{\mathfrak{C}} |f'(z)|^2\, ds < \infty$. Dann ist der Realteil von α_1 aus* (2) *der Grenzwert der Folge $\{\operatorname{Re} \alpha_1^{(N)}\}_{N \geq 1}$, wobei $\alpha_1^{(N)}$ aus*

$$f_N(z) = z + \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^{(N)} (z - z_0)^{-\nu} \quad (z \in \mathfrak{G}) \tag{19}$$

durch

$$\|f_N(z) - z - A[f_N(z)]\|_S = \text{Min} \tag{20}$$

eindeutig für jedes $N \in \mathbb{N}$ bestimmt wird. Dabei bezeichne z_0 einen festen Punkt aus dem Inneren von $\mathfrak{C}$.

Bemerkungen: 1. Die Charakterisierung (13) für f_N kann als lineares Gleichungssystem in $\operatorname{Re}\beta_\nu^{(N)}$ und $\operatorname{Im}\beta_\nu^{(N)}$ aufgefaßt werden. Das ergibt sich durch Zerlegung der komplexwertigen Funktion auf der linken Seite von (13) in Real- und Imaginärteil. Auch die Charakterisierung (20) läßt sich auf analoge Weise in ein lineares Gleichungssystem überführen.

2. Für die Funktionen ψ_ν aus (18) gilt $\iint_{\mathfrak{G}} |\psi_\nu'(z)|^2\, dx\, dy < \infty$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Demnach ergibt sich aus den Überlegungen in [7: Abschnitt 4] für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\iint_{\mathfrak{G}} \left|\left\{(I - A)\left[\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \psi_\nu(z)\right]\right\}'\right|^2 dx\, dy \geqq L_3 \iint_{\mathfrak{G}} \left|\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \psi_\nu'(z)\right|^2 dx\, dy \tag{21}$$

mit einer nur von $q \in (0, 1)$ abhängigen Konstanten $L_3 > 0$. Die $\gamma_\nu \in \mathbb{C}$ können dabei beliebig gewählt werden. Wegen (21) und der linearen Unabhängigkeit der ψ_ν gilt

$$\int_{\mathfrak{C}} \left|(I - A)\left[\sum_{\nu=1}^{N} \gamma_\nu \psi_\nu(z)\right]\right|^2 ds = 0 \iff \gamma_\nu = 0 \quad \text{für alle } \nu.$$

Damit erhält man die Eigentümlichkeit, daß die $\alpha_\nu^{(N)}$ aus (19) durch (20) für jedes $N \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt sind, aber nur die Konvergenz von $\operatorname{Re}\alpha_1^{(N)}$ durch (14) gesichert ist.

3. Es soll noch auf die Bedeutung von $\operatorname{Re}\alpha_1$ hingewiesen werden. Betrachtet man alle quasikonformen Abbildungen der Vollebene, die in $\mathfrak{G}$ konform sind mit der Entwicklung

$$z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \tag{22}$$

bei $z = \infty$ und nach $\mathfrak{G}^c$ noch eine $(1+q)/(1-q)$-quasikonforme Fortsetzung gestatten, so ist $\operatorname{Re}\alpha_1$ (α_1 aus (2)) der Maximalwert für $\operatorname{Re} a_1$ aus (22). Man kann also mit Hilfe von Satz 1 bzw. Satz 2 ein Verfahren zur Approximation dieses Maximalwertes ableiten. Die Extremalität von $\operatorname{Re}\alpha_1$ wird z. B. in [12] bewiesen.

5. Ein Beispiel

Im folgenden sei $\mathfrak{C}$ die Quadratlinie mit den Eckpunkten bei $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$ und $-1-\mathrm{i}$. Zur Berechnung von f_N wurden die Ansatzfunktionen $\psi_\nu(z) = z^{-\nu}$ ($\nu \in \mathbb{N}$) verwendet. Diese haben den Vorteil, daß sich $A(\psi_\nu)$ exakt, d. h. ohne numerische Quadratur, berechnen läßt. Aufgrund der Symmetrie von $\mathfrak{C}$ zur reellen Achse reichen reelle Linearkombinationen der Ansatzfunktionen für die Approximation von $f(z) - z$ aus (siehe dazu auch [8: Abschnitt 3]). Wie in [8] ergibt sich für die Koeffizienten $\alpha_\nu^{(N)}$ aus (19) mit Hilfe der Charakterisierung (20) die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^{(N)} \int_{\mathfrak{C}} [(I-A)(z^{-\nu})]\,\overline{[(I-A)(z^{-\mu})]}\,ds = \int_{\mathfrak{C}} b(z)\,\overline{[(I-A)(z^{-\mu})]}\,ds \tag{23}$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, N).$$

Die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems ist reell, symmetrisch und positiv definit (siehe dazu auch Bemerkungen 1 und 2 im vorigen Abschnitt).

Das Gleichungssystem (23) wurde für verschiedene Werte von q gelöst. Die dazu nötigen Rechnungen bestanden aus zwei größeren Abschnitten. Zuerst wurden unter Benutzung der Symmetrien des Quadrats die Funktionen

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathfrak{C}} \overline{\zeta^{-\nu}}/(\zeta - z)\,d\zeta \quad (\nu = -1, 1, 2, \ldots, N)$$

für diskrete Werte von z bestimmt. Mit Hilfe dieser Werte wurden

$$\int_{\mathfrak{C}} z^{-\nu}\,\overline{A[z^{-\mu}]}\,ds, \quad \int_{\mathfrak{C}} A[z^{-\nu}]\,\overline{A[z^{-\mu}]}\,ds \quad (\nu, \mu = -1, 1, 2, \ldots, N)$$

mittels Gaußscher Quadratur (siehe z. B. [20: Kap. 3.5]) näherungsweise berechnet. Den Schluß dieses Abschnittes bildete die (exakte) Berechnung von $\int_{\mathfrak{C}} z^{-\nu}\overline{z^{-\mu}}\,ds$ ($\nu, \mu = 1, 2, \ldots, N$).

Zu Beginn des zweiten Abschnittes wurden die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite von (23) aus den zuvor bestimmten Integralen berechnet. Danach erfolgte die Lösung von (23) mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens (siehe [20: Kap. 4.3]). Zum Schluß wurden noch untere und obere Schranken für α_1 aus (2) bestimmt (siehe [15]). So ergaben sich unter anderem folgende Werte.

$N = 33$

q	untere Schranke für α_1	$\alpha_1^{(N)}$	obere Schranke für α_1
0.01	0.012681	0.012678	0.012796
0.02	0.025265	0.025358	0.025722
0.90	1.189589	1.208252	1.270483
0.95	1.287310	1.284067	1.332531

$N = 49$

q	untere Schranke für α_1	$\alpha_1^{(N)}$	obere Schranke für α_1
0.01	0.012681	0.012695	0.012796
0.90	1.189589	1.213510	1.270483
0.95	1.287310	1.290200	1.332531
0.96	1.307798	1.305736	1.344781

Die hier angeführten Ergebnisse zeigen schon, daß die berechneten Werte für $\alpha_1^{(N)}$ nicht immer zwischen den entsprechenden Schranken liegen. Diese Schranken sind für $q \to 0$ und $q \to 1$ jeweils scharf, so daß die Einschätzung der Genauigkeit der berechneten Werte insbesondere für q nahe bei 0 bzw. nahe bei 1 erfolgen kann. Ein Grund für die recht große Abweichung von $\alpha_1^{(N)}$ liegt in der ungenügenden Angepaßtheit der Ansatzfunktionen $z^{-\nu}$ ($\nu \in \mathbb{N}$) an die Quadratlinie. In den Ecken des Quadrats ist die Funktion f aus (2) und (3) nicht mehr analytisch (siehe [8: Abschnitt 6]), so daß singuläre (d. h. besser an $\mathfrak{C}$ angepaßte) Ansatzfunktionen verwendet werden sollten. Solche Überlegungen wurden in [22] angestellt (siehe auch [4: Kap. I, § 5.C$_3$] und dort zitierte Literatur). Ein anderer Ausweg ist in [8] mit der Verwendung von konformen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf $\{w: |w| > 1\}$ eingeschlagen worden. Dort wurden (allerdings mit einer anderen Norm als $\|\cdot\|_S$) genauere Näherungswerte für α_1 bestimmt.

Es soll noch gezeigt werden, daß sich Satz 2 für den eben betrachteten Fall der Quadratlinie anwenden läßt. Nach [22: Kap. I, § 5. A] lassen sich Real- und Imaginärteil von f (aus (2) und (3)) in einen singulären und einen glatten Anteil zerlegen. Der singuläre Anteil in dem in $\mathfrak{G}$ gelegenen Teil einer hinreichend kleinen Umgebung einer Quadratecke hat dabei die Form (siehe [22: Kap. I, § 5.B]) $\varrho^{\varkappa}(C_1 \sin \varkappa\varphi + C_2 \cos \varkappa\varphi)$ in Polarkoordinaten ϱ (Abstand zur betreffenden Ecke des Quadrats) und φ (der dazugehörige Winkel) mit Konstanten C_1 und C_2. Für $\varkappa$ ergibt sich nach [22: Kap. I, § 5.B$_1$] im Fall der Quadratecke $2/3 < \varkappa < 1$ für alle $q \in (0, 1)$. Der glatte Anteil besitzt sogar über $\mathfrak{G}$ quadratisch integrierbare zweite Ableitungen. Hieraus und aus $2/3 < \varkappa < 1$ folgt die Gültigkeit von (14) für alle $q \in (0, 1)$, d. h., Satz 2 ist anwendbar.

Die hier angeführten Werte $\alpha_1^{(N)}$ sind in der Tat besser als die Ergebnisse der Rechnung mit der Bergman-Norm $\|\cdot\|_B$, $\|h\|_B^2 = \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2 \, dx \, dy$. Man löst mit dieser Norm (im Quadratfall) die Aufgabe $\|\tilde{f}_N(z) - z - A[\tilde{f}'_N(z)/]\|_B = \text{Min}$ mit $\tilde{f}_N(z) = z + \sum_{\nu=1}^{N} \tilde{\alpha}_\nu^{(N)} z^{-\nu}$.

Dabei wurden für $N = 49$ für $\tilde{\alpha}_1^{(N)}$ stets kleinere Zahlen als $\alpha_1^{(N)}$ bei der Rechnung mit der Szegö-Norm für $N = 33$ erhalten. Dabei der Berechnung von $\tilde{\alpha}_1^{(N)}$ die untere Schranke für α_1 zum Teil unterschritten wurde, kann man schließen, daß die Ergebnisse mit der Szegö-Norm auf jeden Fall teilweise besser sind als die Ergebnisse mit der Bergman-Norm.

Bei der Rechnung mit der Bergman-Norm treten neben der ungenügenden Angepaßtheit der Ansatzfunktionen noch weitere Erschwernisse auf. Zwar läßt sich das Integral in $\|\cdot\|_B$ in das Kurvenintegral $(1/2i) \int_{\mathfrak{C}} h(z)\, \overline{h'(z)\, dz}$ umwandeln, doch bezahlt man diese Vereinfachung damit, daß dies für $h = A(z^{-\nu})$ ($\nu \in \mathbb{N}$) ein uneigentliches Riemannsches Integral ist. Bei seiner numerischen Berechnung erwiesen sich verschiedene Newton-Cotes-Formeln (wie z. B. die Simpson-Regel) als zu ungenau. Brauchbare, aber eben relativ schlechte Ergebnisse wurden durch die Benutzung der Gaußschen Quadratur erzielt, wie es der Vergleich von $\alpha_1^{(N)}$ und $\tilde{\alpha}_1^{(N)}$ zeigte. Auch hinsichtlich des Aufwands schneidet die Rechnung mit der Szegö-Norm besser ab. Bei der Rechnung mit der Bergman-Norm für $N = 49$ betrug die Rechenzeit 8 min 32 s, und der Speicherplatzbedarf war 118 K. Die Rechnung mit der Szegö-Norm erforderte für $N = 33$ nur 2 min 6 s Rechenzeit und 86 K Speicherplatz. Die angegebenen Zeiten beziehen sich auf die Berechnung von quasikonformen Abbildungen für 28 verschiedene Werte von q. Die Rechnungen wurden auf dem EC 1040 des Organisations- und Rechenzentrums der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg ausgeführt.

6. Abschlußbemerkungen

Beim Vergleich der Ergebnisse bei diesen Normen erhebt sich ganz allgemein die Frage, ob diese Normen in einer Beziehung zueinander stehen. Für konvexe Jordan-Kurven (d. h., das Innere von $\mathfrak{C}$ ist konvex) läßt sich zeigen, daß

$$\int_{\mathfrak{C}} |h(z)|^2\, ds \leqq L_4 \iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy \tag{24}$$

mit einer festen Konstanten $L_4 > 0$ für alle h mit $h(\infty) = 0$ ist, für die das Integral auf der rechten Seite von (24) endlich ist. Dieses Ergebnis unterstreicht die Bedeutung konvexer Kurven, wie es schon in [5, 16] festgestellt wurde. Zum Beweis von (24) betrachtet man den Fall $\mathfrak{C} = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$. Wegen $h(\zeta) = \sum_{\nu} \delta_\nu \zeta^{-\nu} (|\zeta| > 1)$ gilt ($\zeta = \xi + i\eta$)

$$\int_{|\zeta|=1} |h(\zeta)|^2\, ds = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} |\delta_\nu|^2 \quad \text{und} \quad \iint_{|\zeta|>1} |h'(\zeta)|^2\, d\xi\, d\eta = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\, |\delta_\nu|^2 .$$

Damit ist (24) für die Einheitskreislinie bewiesen ($L_4 = 2$). Bildet man das Äußere des Einheitskreises schlicht und konform auf $\mathfrak{G}$ ab, wobei ∞ fest bleiben möge, so ergibt sich mit der Abbildung $z = z(\zeta)$

$$\int_{\mathfrak{C}} |h(z)|^2\, ds = \int_{|\zeta|=1} |h[z(\zeta)]\, z'(\zeta)|^2\, ds$$

und

$$\iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy = \iint_{|\zeta|>1} |dh[z(\zeta)]/d\zeta|^2\, d\xi\, d\eta .$$

Da $\mathfrak{C}$ eine konvexe Kurve ist, besitzt $|z'(\zeta)|$ eine von ζ unabhängige obere Schranke für $|\zeta| > 1$ (siehe [16: § 3] und [18: S. 48]). Somit ist (24) bewiesen. Es ist auch klar, daß (24) für analytische (nicht notwendig konvexe) Jordan-Kurven gültig ist.

Hingegen existiert keine von der Funktion $h \in H_S(\mathfrak{G})$ unabhängige Konstante $L_5 > 0$ mit $\iint_{\mathfrak{G}} |h'(z)|^2\, dx\, dy \leqq L_5 \int_{\mathfrak{C}} |h(z)|^2\, ds$ für alle Funktionen $h \in H_S(\mathfrak{G})$ mit $h(\infty) = 0$. Dazu betrachtet man als Gegenbeispiel die Funktionen $h(z) = [\zeta(z)]^{-\nu}$ ($\nu \in \mathbb{N}$), wobei $\zeta = \zeta(z)$ eine schlichte konforme Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\{\zeta : |\zeta| > 1\}$ mit dem Fixpunkt ∞ sei. Hier genügt es, daß $\mathfrak{C}$ eine rektifizierbare Jordan-Kurve ist. Daher sind die Szegö- und die Bergman-Norm für keine rektifizierbare Jordan-Kurve $\mathfrak{C}$ äquivalent. Aus diesem Grund lassen sich die Konvergenzbeweise im 2. und 3. Abschnitt dieser Arbeit letztlich nicht aus den entsprechenden Überlegungen für die Bergman-Norm in [7—9] ableiten.

LITERATUR

[1] BERGMAN, S.: The Kernel Function and Conformal Mapping. Providence R. I.: Amer. Math. Soc. 1970 (2nd ed.).
[2] ДАНИЛЮК, И. И.: Нерегулярные граничные задачи на плоскости. Москва: Изд-во Наука 1975.
[3] GAIER, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1964.
[4] GAIER, D.: Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Basel—Boston—Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1980.
[5] GRÖTZSCH, H.: Zur Theorie der Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung. Comm. Math. Helv. 8 (1935/36), 382—390.
[6] HENRICI, P.: Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 3. London: Wiley 1985.
[7] HOY, E.: Orthonormalreihenentwicklungen für gewisse quasikonforme Normalabbildungen. Z. Anal. Anw. 3 (1984), 503—521.
[8] HOY, E.: Charakterisierung und Berechnung von quasikonformen Abbildungen mittels RITZ-Verfahren. Math. Nachr. 143 (1989), 89—102.
[9] HOY, E.: Variationscharakterisierungen für gewisse quasikonforme Abbildungen. Z. Anal. Anw. 8 (1989), 463—472.
[10] KRUSCHKAL, S. L., und R. KÜHNAU: Quasikonforme Abbildungen — neue Methoden und Anwendungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1983. In russ. Sprache: Nowosibirsk: Verlag Nauka 1984.
[11] KÜHNAU, R.: Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien. J. reine u. angew. Math. 231 (1968), 101—113.
[12] KÜHNAU, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. Math. Nachr. 40 (1969), 1—11.
[13] KÜHNAU, R.: Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. Ann. Polon. Math. 31 (1975/76), 269—289.
[14] KÜHNAU, R.: Eine Integralgleichung in der Theorie quasikonformer Abbildungen. Math. Nachr. 76 (1977), 139—152.
[15] KÜHNAU, R., und E. HOY: Bemerkungen über quasikonform fortsetzbare schlichte konforme Abbildungen. Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Hallle—Wittenberg, Math.-Nat. Reihe 31 (1982), 129—133.
[16] LÖWNER, K.: Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises. Math. Z. 3 (1919), 65—77.
[17] MESCHKOWSKI, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1962.
[18] POMMERENKE, CH.: Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1975.
[19] RADON, J.: Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential. Sitz.-Ber. Wien. Akad. Wiss., Abt. IIa, 128 (1919), 1083—1121.
[20] STOER, J., und R. BULIRSCH: Einführung in die Numerische Mathematik I. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1979 (3. Aufl.).
[21] SZEGÖ, G.: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Z. 9 (1921), 218—270.
[22] WEISEL, J.: Lösung singulärer Variationsprobleme durch die Verfahren von Ritz und Galerkin mit finiten Elementen — Anwendungen in der konformen Abbildung. Mitt. Math. Sem. Gießen 138 (1979), 1—150.

Manuskripteingang: 04. 05. 1988

VERFASSER:

Dr. ERICH HOY
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle