Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (2) 1990, S. 189–191

Explizite Lösungen einer Klasse nichtlinearer partieller Differentialgleichungen

H. HEROLD

Für eine die Gleichung von Boussinesq umfassende Klasse nichtlinearer partieller Differentialgleichungen wird die vollständige Lösung eines Anfangswertproblems in expliziter Form mittels der Weierstraßschen $\wp$-Funktion angegeben.

Для некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, включающего уравнение Буссине, дается полное решение задачи Коши в явной форме посредством $\wp$-функции Вейерштрасса.

For a class of nonlinear partial differential equations comprising the equation of Boussinesq the complete solution of an initial value problem is given in explicit form by means of the Weierstrass $\wp$-function.

Unter den in der mathematischen Physik vorkommenden nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für eine reellwertige Funktion $v = v(x, t)$ $(x, t \in \mathbb{R})$, in denen die unabhängigen Variablen nicht explizit vorkommen, sind neben der (nichtlinearen) Schrödinger-Gleichung und der Gleichung von Korteweg-de Vries von Wichtigkeit Gleichungen der Form

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) a + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6v^2 - c = 0 \qquad (a, c \in \mathbb{R}, c \neq 0) \tag{1}$$

sowie

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) a + \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i\, \partial x^j}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6v^2\right) = 0 \qquad (i, j \in \mathbb{N}_0), \tag{2}$$

$\big((i, j) \neq (0, 0)\big)$, wobei der Spezialfall $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 6v^2\right) = 0$ *Gleichung von Boussinesq* heißt.

Bemerkung: Jede Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) c_1 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - c_2 v^2 - c_3 v - c_4 = 0 \qquad (c_j \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0)$$

erhält durch die Transformation $v \to c_2^{-1}(6v - c_3/2)$ die Gestalt (1).

Gleichungen dieses Typs treten auf bei der Behandlung von Wärmeleitungs- und Elastizitätsproblemen fester Materie sowie bei der Untersuchung hydrodynamischer Vorgänge in kompressiblen Flüssigkeiten.

Bei der Untersuchung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen stehen allgemeinere Lösungsmethoden zumeist nicht zur Verfügung, oder allgemeinere Lösungsansätze erfordern einen kaum zu bewältigenden mathematischen Aufwand. Reihenansätze führen beispielsweise durchwegs auf recht verwickelte Rekursionsbeziehungen. So sind bei der Behandlung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen der Physik vielfach spezielle, von der jeweiligen physikalischen Problemstellung abhängige Lösungsverfahren erforderlich und angemessen, um einen befriedigenden Einblick in den physikalischen Charakter der Lösungen zu erhalten.

Die Gleichungen (1), (2) besitzen Lösungen der Form $v = v(\xi)$ mit $\xi = x - t$ (bzw. $\xi = x + t$): Offenbar ist v genau dann eine Lösung von (1), wenn v eine Lösung der Differentialgleichung

$$d^2v/d\xi^2 = 6v^2 + c \tag{3}$$

ist. Jede derartige Lösung von (1) ist dann auch eine Lösung von (2). Im folgenden werden (abgesehen von einem elementaren Fall) sämtliche Lösungen von (1) der Form $v = v(\xi)$ explizit mittels der Weierstraßschen p-Funktion angegeben. Aufgrund der zur Verfügung stehenden umfassenden Theorie der p-Funktion wird hierdurch eine eingehende, für die jeweilige Fragestellung zweckmäßige Untersuchung der Lösungen ermöglicht. Eine in der Umgebung von (x_0, t_0) definierte Lösung $v = v(x - t)$ von (1) ist somit eindeutig festgelegt durch $v(\xi_0)$, $v'(\xi_0)$ mit $\xi_0 = x_0 - t_0$. Da mit $v(x - t)$ auch $v(x - t + \text{const})$ Lösung von (1) ist, kann man sich auf den Fall $\xi_0 = 0$ beschränken.

Sei $g_2 := -2c$, $g_3 := 4\alpha^3 - \alpha g_2 - \beta^2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Lösung $v = v(\xi)$ von (3) mit $v(0) = \alpha$, $v'(0) = \beta$, $v(\xi) \not\equiv \alpha$, ist eine Lösung der Differentialgleichung $v'^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3$, wie durch Multiplikation von (3) mit v' und anschließende Integration folgt. Der elementar integrierbare Fall $g_2{}^3 = 27 g_3{}^2$ sei stets ausgeschlossen. Mit $p(z)$ werde dann die durch g_2, g_3 eindeutig bestimmte und für reelles z reellwertige Weierstraßsche p-Funktion bezeichnet, $(2\omega_1, 2\omega_2)$ sei ein primitives Periodenpaar. Bekanntlich gilt

$$p'(z)^2 = 4p(z)^3 - g_2 p(z) - g_3 \qquad (z \in \mathbb{C}); \tag{4}$$

das Polynom $P(u) := 4u^3 - g_2 u - g_3$ hat die (voneinander verschiedenen) Nullstellen $p(\omega_1)$, $p(\omega_2)$, $p(\omega_1 + \omega_2)$ (eine oder alle reell). Sei $u_0 := p(\omega)$ $(\omega \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2\})$ die größte reelle Nullstelle von $P(u)$ mit $u_0 \leqq \alpha$ (man beachte: $P(\alpha) = \beta^2$).

Dann ist, im Falle $\beta \neq 0$, $P(u) > 0$ für $u_0 < u \leqq \alpha$, und es sei $\eta := \int\limits_{u_0}^{\alpha} P(u)^{-1/2}\, du > 0$.

Da gemäß (4) die Umkehrung von $w = p(z)$ durch $z = \omega + \int\limits_{u_0}^{w} P(w)^{-1/2}\, dw$ gegeben ist, gilt $p(\omega + \eta) = \alpha$. Durch Anwendung des Additions-Theorems

$$p(z + \zeta) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(z) - p'(\zeta)}{p(z) - p(\zeta)}\right)^2 - p(z) - p(\zeta) \text{ für } \zeta = \omega$$

folgt wegen $p'(\omega) = 0$

$$p(z + \omega) = 1/4\big(p'(z)/(p(z) - u_0)\big)^2 - p(z) - u_0. \tag{5}$$

Also ist $p(z + \omega)$ für $z \in \mathbb{R}$ reellwertig und (wegen $p(z) = p(-z)$) gerade. Es folgt

$$p(\omega - \eta) = p(\omega + \eta) = \alpha, \qquad p'(\omega - \eta) = -p'(\omega + \eta). \tag{6}$$

Unter Beachtung von $u_0 < p(z + \omega) < p(\omega + \eta)$ für $0 < z < \eta$ erkennt man $p'(z + \omega) > 0$ für $0 < z < \eta$, so daß in Verbindung mit der aus (4) und (6) folgenden Beziehung $p'(\omega \pm \eta)^2 = 4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3 = \beta^2$ schließlich $p'(\omega + \eta) = \beta$ im Falle $\beta > 0$ sowie $p'(\omega - \eta) = \beta$ im Falle $\beta < 0$ folgt. Mit $\eta_0 := \eta \operatorname{sign} \beta$ falls $\beta \neq 0$ und

$\eta_0 := 0$ sonst gilt gemäß (4) für die für $\xi \in \mathbb{R}$ reellwertige Funktion $v = v(\xi) := p(\xi + \eta_0 + \omega)$

$$v'(\xi)^2 \equiv 4v(\xi)^3 - g_2 v(\xi) - g_3, \qquad v(0) = \alpha, v'(0) = \beta,$$

so daß sich nach Differentiation $v''(\xi) \equiv 6v(\xi)^2 + c$, $v(0) = \alpha$, $v'(0) = \beta$ ergibt. Nach Anwendung von (5) für $z = x - t + \eta_0$ erhält man insgesamt folgenden

Satz: *Die Lösung $v = v(x - t)$ der Differentialgleichung* (1), *die der Bedingung $v(0) = \alpha$, $v'(0) = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ genügt, ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} v(x - t) &:= p(x - t + \eta_0 + \omega) \\ &\equiv \frac{1}{4}\left(\frac{p'(x - t + \eta_0)}{p(x - t + \eta_0) - u_0}\right)^2 - p(x - t + \eta_0) - u_0. \end{aligned}$$

Manuskripteingang: 22. 03. 1988; in revidierter Fassung 10. 10. 1988

VERFASSER:

Prof. Dr. Horst Herold
Fachbereich Mathematik der Universität
Lahnberge
D-3550 Marburg/Lahn