Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (3) 1990, S. 213 – 220

Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf nichtglatten Gebietsrändern

U. Hamann

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, glattes Gebiet und Γ der (nicht notwendig glatte) Rand einer offenen Menge $\Omega_i \subset\subset \Omega$. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen auf Γ vorgegebene Tupel stetiger Funktionen (Whitney-Taylor-Felder) durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme bezüglich Ω gleichmäßig approximiert werden können.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная, гладкая область и Γ (не обязательно гладкая) граница открытого множества $\Omega_i \subset \subset \Omega$. Исследуется, в каких условиях данные на Γ наборы непрерывных функций (поля Витнея—Тейлора) могут быть аппроксимированы равномерно относительно Ω решениями эллиптических краевых задач.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded, smooth domain and Γ the (not necessary smooth) boundary of an open set $\Omega_i \subset\subset \Omega$. It is investigated, under which conditions given tuples of continuous functions (Whitney-Taylorfields) on Γ can be uniformly approximated by solutions of elliptic boundary value problems with respect to Ω.

Gegeben sei ein elliptisches Randwertproblem in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einem glatten Rand $\partial\Omega$, wobei der Differentialoperator die Ordnung $2m$ haben soll. Weiter sei $V \subset \partial\Omega$ eine beliebige, dann aber fest gewählte offene Teilmenge des Randes. Wir lassen die Randvorgaben lediglich auf V variieren — auf $\partial\Omega \setminus V$ sollen sie Null sein; ebenso soll die rechte Seite der Differentialgleichung Null sein. $\mathfrak{N}_V(\Omega)$ sei die Menge der Lösungen der so entstehenden Randwertprobleme. Innerhalb von Ω liege eine offene Menge Ω_i, deren Rand $\Gamma = \partial\Omega_i$ nicht glatt zu sein braucht. Es wird untersucht, unter welchen möglichst schwachen Bedingungen an Γ zu jeder Funktion $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ $(0 \leqq s \leqq m - 1)$ eine Folge $(u_l)_1^\infty \subset \mathfrak{N}_V(\Omega)$ mit

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{|\alpha|\leqq s} \|D^\alpha f|_\Gamma - D^\alpha u_l|_\Gamma\|_{C(\Gamma)} = 0$$

existiert. Damit werden die von G. Wildenhain in [16, 17] erzielten Ergebnisse auf nichtglatte Ränder Γ verallgemeinert.

1. Voraussetzungen, Definitionen

1.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem C^∞-glatten Rand $\partial\Omega$. Vom Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha|\leqq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha \quad \left(a_\alpha \in C^\infty(\bar\Omega)\right)$$

und vom System

$$B = \{B_j\}_1^m, \quad B_j = \sum_{|\alpha|\leqq m_j} B_{j,\alpha}(x)\, D^\alpha, \quad B_{j,\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

von Randoperatoren auf $\partial\Omega$ fordern wir:

1. L ist auf $\bar{\Omega}$ eigentlich elliptisch (s. z. B. [19: S. 146]).
2. B ist normal (s. z. B. [19: S. 214]).
3. ord $B_j =: m_j \leqq 2m - 1$ für $j = 1, \ldots, m$.
4. B überdeckt L auf $\partial\Omega$ (s. z. B. [14: S. 162]).

Zur Abkürzung setzen wir $Bu = \{B_j u|_{\partial\Omega}\}_1^m$.

1.2. Es seien $U \subset\subset \Omega$ und $V \subset \partial\Omega$ beliebige, dann aber fest gewählte offene Teilmengen von Ω bzw. $\partial\Omega$. Wir definieren

$$\mathfrak{M}_U(\Omega) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \operatorname{supp} Lu \subset U,\ Bu = 0\}$$

und

$$\mathfrak{N}_V(\Omega) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : Lu = 0 \text{ in } \Omega,\ B_j u|_{\partial\Omega\setminus V} = 0\ \forall j\}.$$

Beispielsweise besteht $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ gerade aus Lösungen von Randwertproblemen der Gestalt $Lu = f$ in Ω, $Bu = 0$, wobei f in $C_0^\infty(U)$ variiert.

1.3. Es sei

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\big(a_\alpha(x)\,\cdot\big)$$

der im Sinne der Distributionentheorie formal duale Operator zu L. Wir sagen, L^* besitzt in einem Gebiet $\Omega_1 \subseteqq \Omega$ die Eigenschaft $(U)_s$ (die „*Eindeutigkeitseigenschaft des Cauchy-Problems im Kleinen*"), wenn aus $L^*u = 0$ in Ω_1 und $u \equiv 0$ auf irgendeiner nichtleeren offenen Teilmenge $\omega \subset \Omega_1$ $u \equiv 0$ auf ganz Ω_1 folgt. Diese Eigenschaft ist z.B. erfüllt, wenn die Koeffizienten von L^* auf Ω_1 reell analytisch sind.

1.4. Für ganze Zahlen $s \geqq 0$ und kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$W^s(K) = \left\{\dot{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha| \leqq s} \in \prod_{|\alpha| \leqq s} C(K) : \exists\, f \in C^s(\mathbb{R}^n) \text{ mit } D^\alpha f|_K = f_\alpha\right\}$$

die Menge der *Whitney-Taylor-Felder* der Ordnung s auf K mit der Norm $\|\dot{f}\|_{W^s(K)} = \sum_{|\alpha| \leqq s} \|f_\alpha\|_{C(K)}$.

2. Sätze, Literaturüberblick

Der folgende Satz stellt das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit dar.

Satz 1: *Es sei $\Omega_i \subset\subset \Omega$ eine beliebige offene Menge mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega_i$ und s eine ganze Zahl mit $0 \leqq s \leqq m - 1$. In jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega_a = \Omega \setminus \bar{\Omega}_i$ liege eine nichtleere offene Teilmenge von $U \subset\subset \Omega_a$, und L^* besitze in jeder Zusammenhangskomponente von Ω_a die Eigenschaft $(U)_s$. Weiterhin gebe es eine reelle Zahl $p > n$, so daß gilt:*

(a) *Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_i)$ existiert eine Funktion u aus dem Sobolev-Raum $\mathring{W}_p^{s+1}(\Omega_i)$ mit $Lu = \varphi$ in Ω_i.*

(b) *Es ist $\{g \in W_{p'}^{2m-s-1}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} g \subseteqq \bar{\Omega}_i\} = \overline{C_0^\infty(\Omega_i)}$ mit $p' = p/(p-1)$, wobei die Abschließung in der Norm des Sobolev-Raumes $W_{p'}^{2m-s-1}(\mathbb{R}^n)$ erfolgt.*

Dann existiert zu jedem $\dot{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha| \leqq s} \in W^s(\Gamma)$ eine Folge $(u_l)_1^\infty \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ mit $\lim_{l\to\infty} \sum_{|\alpha| \leqq s} \|D^\alpha u_l|_\Gamma - f_\alpha\|_{C(\Gamma)} = 0$.

Es ist zu bemerken, daß für $s \geqq m$ eine derartige Approximation nicht möglich ist (s. [9: Satz 2]).

In den Voraussetzungen (a) und (b) sind implizit Bedingungen an Γ enthalten. Es folgen einige Bemerkungen dazu.
Zu (a): Wegen $p > n$ ist $\mathring{W}_p^{s+1}(\Omega_i) \subset C^s(\bar{\Omega}_i)$ und damit $D^\alpha u|_\Gamma = 0$ für $u \in \mathring{W}_p^{s+1}(\Omega_i)$ und $|\alpha| \leqq s$. Die Voraussetzung besagt also, daß das Randwertproblem

$$Lu = \varphi \quad \text{in} \quad \Omega_i, \quad D^\alpha u|_\Gamma = 0 \quad \text{für} \quad |\alpha| \leqq s \tag{1}$$

eine Lösung aus $\mathring{W}_p^{s+1}(\Omega_i)$ besitzen soll. Für $s = m - 1$ handelt es sich dabei gerade um das Dirichlet-Problem, für $s < m - 1$ ist dieses Randwertproblem unterbestimmt. Ist der Rand Γ C^∞-glatt, so besitzt das Dirichlet-Problem ($s = m - 1$) stets eine Lösung, sofern das homogene Randwertproblem $L^*w = 0$ in Ω_i, $D^\alpha w|_\Gamma = 0$ für $|\alpha| \leqq m - 1$ nur trivial lösbar ist, und diese Lösung ist dann sogar aus $C^\infty(\bar{\Omega}_i)$. Je „weniger glatt" der Rand Γ ist, desto „schlechter" werden dann auch die Eigenschaften der Lösung. Die Voraussetzung (a) beinhaltet demnach, daß der Rand Γ noch so „glatt" sein soll, daß die Lösbarkeit des Randwertproblems (1) im Sobolev-Raum $\mathring{W}_p^{s+1}(\Omega_i)$ garantiert ist. In [13] findet man dazu einige Ergebnisse für Gebiete mit Kanten und Ecken. Je kleiner s ist, desto schwächer werden natürlich die Forderungen an Γ.
Zu (b): Die Voraussetzung (b) stellt eine sehr schwache Forderung an Γ dar. Ist $\partial\Omega_i = \partial\bar{\Omega}_i$, so wird $\bar{\Omega}_i$ in der Literatur als (r, p)-*stabil* ($r \geqq 1$, ganz) bezeichnet, wenn

$$\{g \in W_p^r(\mathbb{R}^n) \colon \operatorname{supp} g \subseteqq \bar{\Omega}_i\} = \overline{C_0^\infty(\Omega_i)}$$

gilt (vgl. [1, 11, 12]). Mit Hilfe von Begriffen aus der L_p-Kapazitätstheorie kann man zahlreiche Kriterien für die (r, p)-Stabilität angeben (s. z. B. [2, 12]). Analoge Kriterien gibt es auch für den Fall $\partial\Omega_i \neq \partial\bar{\Omega}_i$ (s. [8]).

Wollen wir eine dem Satz 1 entsprechende Aussage für $\mathfrak{N}_V(\Omega)$ statt $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ haben, so müssen die Voraussetzungen etwas modifiziert werden.

Satz 2: *Der Differentialoperator L sei für alle Punkte eines Gebietes $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$ definiert und dort eigentlich elliptisch. L^* besitze in $\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_i$ die Eigenschaft $(U)_s$. Ferner soll $\Omega \setminus \bar{\Omega}_i$ zusammenhängend sein. Schließlich sei s wieder eine ganze Zahl mit $0 \leqq s \leqq m - 1$. Dann gilt unter den Voraussetzungen* (a) *und* (b) *aus Satz* 1 *die gleiche Aussage wie im Satz* 1 *mit $\mathfrak{N}_V(\Omega)$ statt $\mathfrak{M}_U(\Omega)$.*

Den Satz 2 erhält man als Folgerung aus Satz 1, indem man die gleichen Überlegungen wie in [10: Abschnitt 4.2.] anstellt.

Zur Problematik der Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme muß zunächst die Arbeit [3] von H. Beckert aus dem Jahre 1960 erwähnt werden. Sie war Ausgangspunkt für zahlreiche weitere Untersuchungen. In dieser Arbeit war Γ allerdings eine solche Fläche, durch die das Gebiet nicht zerlegt wird. Von A. Göpfert [6] wurde dann 1966 erstmals der Fall untersucht, daß Γ der Rand eines Innengebietes $\Omega_i \subset\subset \Omega$ ist. Diese Ergebnisse wurden in den achtziger Jahren von G. Wanka [15], A. Göpfert, G. und J. Wanka [7], K. Beyer [4], G. Wildenhain [16, 17] und U. Hamann [10] weiterentwickelt. Wesentlich in diesen Arbeiten war aber, daß für Γ stets eine gewisse C^k-Glattheit mit einem genügend großen k vorausgesetzt werden mußte. Ein Ergebnis für sehr allgemeine nichtglatte Flächen konnte G. Wildenhain [18] mittels potentialtheoretischer Hilfsmittel erzielen, allerdings nur für die Laplace-Gleichung. Die dabei verwendete Beweistechnik läßt sich lediglich auf elliptische Differentialgleichungen 2. Ordnung übertragen.

3. Vorbereitung für den Beweis von Satz 1

3.1. Es sei $B^* = \{B_j^*\}_1^m$ ein entsprechend der Greenschen Formel zu $B = \{B_j\}_1^m$ adjungiertes System von Randoperatoren, d. h., es gilt

$$\int_\Omega (Lu\,v - u\,L^*v)\,dx = \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} (C_j u\, B_j^* v - B_j u\, C_j^* v)\,d\sigma$$

für alle $u, v \in C^{2m}(\bar\Omega)$, wobei $\{C_j\}_1^m$ und $\{C_j^*\}_1^m$ gewisse Systeme von Randoperatoren auf $\partial\Omega$ sind (vgl. [19: S. 218]). Wir definieren

$$N = \operatorname{Ker}(\{L, B\}) = \{u \in C^\infty(\bar\Omega) : Lu = 0 \text{ in } \Omega,\ Bu = 0\}$$

und

$$N^* = \operatorname{Ker}(\{L^*, B^*\}) = \{w \in C^\infty(\bar\Omega) : L^*w = 0 \text{ in } \Omega,\ B^*w = 0\}.$$

$f \perp N$ und $f \perp N^*$ soll $\int_\Omega fh\,dx = 0$ für alle $h \in N$ bzw. $h \in N^*$ bedeuten. Das Randwertproblem

$$Lu = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad Bu = 0 \tag{2}$$

mit $f \in L_p(\Omega)$ und $1 < p < \infty$ besitzt bekanntlich genau dann eine Lösung, wenn $f \perp N^*$ gilt. Genügt f dieser Bedingung und ist $\tilde u$ eine Lösung von (2), so erhält man durch $u = \tilde u + u_0$ mit einem beliebigen $u_0 \in N$ die Gesamtheit aller Lösungen von (2). Sämtliche Lösungen sind aus $W_p^{2m}(\Omega)$.

Den Operator G, welcher jedem $f \in L_p(\Omega)$ mit $f \perp N^*$ diejenige Lösung u des Problems (2) zuordnet, für die $\bar u \perp N$ ($\bar u$ ist die konjugiert komplexe Funktion zu u) gilt, nennen wir *Greenschen Operator*. Wir setzen G auf ganz $L_p(\Omega)$ fort, indem wir $G\bar w = 0$ für alle $w \in N^*$ definieren. Es gilt dann (s. [10: Lemma 2]) das

Lemma 1: *Für alle reellen Zahlen p mit $1 < p < \infty$ gilt:*

(i) $G \in L(L_p(\Omega), W_p^{2m}(\Omega))$ *(d. h., G ist ein stetiger und linearer Operator von $L_p(\Omega)$ in $W_p^{2m}(\Omega)$).*

(ii) $LGf = f$ *für alle $f \in L_p(\Omega)$ mit $f \perp N^*$.*

(iii) $GLu = u + u_0$ *für alle $u \in W_p^{2m}(\Omega)$ mit $Bu = 0$, wobei u_0 aus N ist.*

3.2. Ist X ein normierter Raum, so wird mit X' sein Dualraum und mit $\langle F, f\rangle$ die Anwendung eines Funktionals $F \in X'$ auf $f \in X$ bezeichnet. Sind X und Y normierte Räume, so sei $L(X, Y)$ die Menge aller stetigen und linearen Operatoren von X in Y. Für $A \in L(X, Y)$ sei $A' \in L(Y', X')$ der duale Operator.

Wir definieren $\mathring{C}^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, wobei die Abschließung in der $C^s(\Omega)$-Norm erfolgt. Die Elemente von $(\mathring{C}^s(\Omega))'$ können als Distributionen der Ordnung s aufgefaßt werden. Für kompakte Mengen $K \subset \Omega$ sei

$$(C^s(\bar\Omega))_K' = \{T \in (C^s(\bar\Omega))' : \operatorname{supp} T \subseteq K\}$$

und

$$(\mathring{C}^s(\Omega))_K' = \{F \in (\mathring{C}^s(\Omega))' : \operatorname{supp} F \subseteq K\}.$$

Jedes Element aus $(\mathring{C}^s(\Omega))_K'$ kann eindeutig zu einem Element aus $(C^s(\bar\Omega))_K'$ fortgesetzt werden. In diesem Sinne soll $(\mathring{C}^s(\Omega))_K' = (C^s(\bar\Omega))_K'$ verstanden werden. $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ ($s \geqq 0$, $1 < p < \infty$) sei die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $W_p^s(\Omega)$-Norm und

$$(W_p^s(\Omega))_K = (\mathring{W}_p^s(\Omega))_K := \{f \in W_p^s(\Omega) : \operatorname{supp} f \subseteq K\}.$$

$W_{p'}^{-s}(\Omega) := (\mathring{W}_p^s(\Omega))'$ $(s \geqq 0,\ 1/p + 1/p' = 1)$ ist der Dualraum von $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ und

$$(W_{p'}^{-s}(\Omega))_K := \{F \in W_{p'}^{-s}(\Omega) : \operatorname{supp} F \subseteqq K\}.$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_{p'}^{-s}(\Omega)$ dicht liegt, können wir auch $\mathring{W}_{p'}^{-s}(\Omega)$ statt $W_{p'}^{-s}(\Omega)$ schreiben.

Für den Beweis von Satz 1 benötigen wir folgende Lemmata.

Lemma 2 (s. [5: S. 211]): *Es sei s eine beliebige ganze Zahl, $1 < p < \infty$ sowie $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. P sei ein auf $\bar{\Omega}$ eigentlich elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$ mit Koeffizienten aus $C^\infty(\bar{\Omega})$. Aus $u \in (\mathring{W}_p^s(\Omega))_K$ und $Pu \in (\mathring{W}_p^s(\Omega))_K$ folgt dann $u \in (\mathring{W}_p^{s+2m}(\Omega))_K$.*

Lemma 3: *Es sei $r \geqq 0$ eine ganze Zahl und $1 < p < \infty$. Weiterhin soll $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene, beschränkte Menge mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega_1$ sein. Aus $(W_p^r(\mathbb{R}^n))_{\bar{\Omega}_1} = \overline{C_0^\infty(\Omega_1)}$ (Abschließung in der $W_p^r(\mathbb{R}^n)$-Norm) folgt dann $(W_p^r(\mathbb{R}^n))_\Gamma = \{0\}$.*

Beweis: Es sei $g \in (W_p^r(\mathbb{R}^n))_\Gamma$ eine beliebige Funktion. Dann ist natürlich auch $g \in (W_p^r(\mathbb{R}^n))_{\bar{\Omega}_1}$. Somit existiert laut Voraussetzung eine Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ mit

$$\lim_{l\to\infty} \|\varphi_l - g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3}$$

Wegen $\operatorname{supp} g \subseteqq \Gamma$ und $\operatorname{supp} \varphi_l \subset \Omega_1$, also $\operatorname{supp} g \cap \operatorname{supp} \varphi_l = \emptyset$, ist

$$\begin{aligned}\|\varphi_l - g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)}^p &= \sum_{|\alpha|\leq r} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha\varphi_l(x) - D^\alpha g(x)|^p\,dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq r} \left(\int_{\Omega_1} |D^\alpha\varphi_l(x)|^p\,dx + \int_\Gamma |D^\alpha g(x)|^p\,dx\right) \\ &\geqq \sum_{|\alpha|\leq r} \int_\Gamma |D^\alpha g(x)|^p\,dx = \|g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)}^p.\end{aligned}$$

Mittels (3) folgt daraus $\|g\|_{W_p^r(\mathbb{R}^n)} = 0$, also $g = 0$ ∎

4. Beweis von Satz 1

Der Beweis erfolgt in zehn Schritten.

1. Der Operator R_s sei für in einer Umgebung von Γ s-mal stetig differenzierbare Funktionen u durch $R_s u = \{D^\alpha u|_\Gamma\}_{|\alpha|\leq s}$ definiert. Es sei $T \in (W^s(\Gamma))'$ ein stetiges und lineares Funktional mit

$$\langle T, R_s u\rangle = 0 \tag{4}$$

für alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Wir werden $T = 0$ zeigen. Daraus folgt dann die behauptete Dichtheit von $R_s(\mathfrak{M}_U(\Omega))$ in $W^s(\Gamma)$.

2. Wegen der stetigen Einbettungen $(0 \leqq s \leqq m - 1!)$

$$W_p^{2m}(\Omega) \subset W_p^{s+1}(\Omega) \subset C^s(\bar{\Omega}) \quad \text{für} \quad p > n$$

können wir nach Lemma 1/(i) den Greenschen Operator G als stetigen Operator von $L_p(\Omega)$ in $C^s(\bar{\Omega})$ auffassen. Es ist also $G \in L(L_p(\Omega), C^s(\bar{\Omega}))$. Für den dualen Operator G' gilt dann $G' \in L((C^s(\bar{\Omega}))', L_{p'}(\Omega))$ mit $p' < n/(n-1)$. Weiter ist $R_s \in L(C^s(\bar{\Omega}), W^s(\Gamma))$

und $R_s' \in L\big((W^s(\Gamma))', (C^s(\bar{\Omega}))'\big)$. Man erhält also $R_s'T \in \big(C^s(\bar{\Omega})\big)'$ und $G'R_s'T \in L_{p'}(\Omega)$ mit $p' < n/(n-1)$. Wegen $\langle R_s'T, \psi\rangle = \langle T, R_s\psi\rangle = 0$ für alle $\psi \in C^s(\bar{\Omega})$ mit $\psi \equiv 0$ in einer Umgebung von Γ ist supp $(R_s'T) \subseteqq \Gamma$ und damit

$$R_s'T \in \big(C^s(\bar{\Omega})\big)_\Gamma' = \big(\mathring{C}^s(\Omega)\big)_\Gamma'. \tag{5}$$

3. Für beliebige Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt nach Lemma 1/(iii) $GL\varphi = \varphi + \varphi_0$ mit einer Funktion $\varphi_0 \in N = \operatorname{Ker}(\{L, B\})$. Aus $N \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ und (4) folgt $\langle R_s'T, \varphi_0\rangle = \langle T, R_s\varphi_0\rangle = 0$. Damit erhalten wir für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\langle G'R_s'T, L\varphi\rangle = \langle R_s'T, GL\varphi\rangle = \langle R_s'T, \varphi + \varphi_0\rangle = \langle R_s'T, \varphi\rangle, \tag{6}$$

also $L^*(G'R_s'T) = R_s'T$ auf Ω im distributionentheoretischen Sinne. Da $R_s'T$ auf Γ konzentriert ist, gilt $L^*(G'R_s'T) = 0$ auf $\Omega_i \cup \Omega_a$.

4. Es sei jetzt $\varphi \in C_0^\infty(U)$ eine beliebige Funktion mit $\varphi \perp N^* = \operatorname{Ker}(\{L^*, B^*\})$. Nach Lemma 1/(ii) ist dann $LG\varphi = \varphi$, also $G\varphi \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Aus (4) ergibt sich $\langle G'R_s'T, \varphi\rangle = \langle T, R_s(G\varphi)\rangle = 0$ für alle diese φ. Wie im 5. Schritt des Beweises von Satz 1 in [10: Abschnitt 4.1] kann daraus $G'R_s'T = w_0$ auf U mit einer Funktion $w_0 \in N^*$ gefolgert werden.

5. Damit gilt $L^*(G'R_s'T - w_0) = 0$ auf Ω_a und $(G'R_s'T - w_0) \equiv 0$ auf $U \subset \Omega_a$. In jeder Zusammenhangskomponente von Ω_a liegt eine nichtleere offene Teilmenge von U. Aus der vorausgesetzten Eigenschaft $(U)_s$ von L^* folgt $(G'R_s'T - w_0) \equiv 0$ auf jeder Zusammenhangskomponente und damit $(G'R_s'T - w_0) \equiv 0$ auf ganz Ω_a, also $(G'R_s'T - w_0) \in \big(L_{p'}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_i}$. Insbesondere ist

$$\langle G'R_s'T - w_0, \varphi\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega_a). \tag{7}$$

6. Aus der stetigen Einbettung $\mathring{W}_p^{s+1}(\Omega) \subset \mathring{C}^s(\Omega)$ für $p > n$ folgt $\big(\mathring{C}^s(\Omega)\big)' \subset \big(\mathring{W}_p^{s+1}(\Omega)\big)' = \mathring{W}_{p'}^{-s-1}(\Omega)$. Damit erhalten wir aus (5) und $\Gamma \subset \bar{\Omega}_i$ die Inklusion $R_s'T \in \big(\mathring{W}_{p'}^{-s-1}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_i}$. Es gilt also

$$L^*(G'R_s'T - w_0) = R_s'T \in \big(\mathring{W}_{p'}^{-s-1}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_i}$$

und

$$(G'R_s'T - w_0) \in \big(L_{p'}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_i} \subset \big(\mathring{W}_{p'}^{-s-1}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_i}.$$

Aus Lemma 2 folgt $(G'R_s'T - w_0) \in \big(\mathring{W}_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_i}$.

7. Zu jeder Funktion $v \in \mathring{W}_p^{s+1}(\Omega)$ existiert eine Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\lim\limits_{l\to\infty} \|\varphi_l - v\|_{W_p^{s+1}(\Omega)} = 0$. Daraus folgt $\lim\limits_{l\to\infty} \|L\varphi_l - Lv\|_{W_p^{s+1-2m}(\Omega)} = 0$. Aus $\langle G'R_s'T - w_0, L\varphi_l\rangle = \langle R_s'T, \varphi_l\rangle$ für alle l (vgl. (6), $L^*w_0 = 0$!), $(G'R_s'T - w_0) \in \mathring{W}_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)$ und $R_s'T \in \mathring{W}_{p'}^{-s-1}(\Omega)$ ergibt sich dann

$$\langle G'R_s'T - w_0, Lv\rangle = \langle R_s'T, v\rangle \quad \text{für alle} \quad v \in \mathring{W}_p^{s+1}(\Omega). \tag{8}$$

8. Es sei jetzt $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ eine beliebige auf Ω_i definierte Funktion. Laut Voraussetzung (a) existiert dazu eine Funktion $u \in \mathring{W}_p^{s+1}(\Omega_i)$ mit $Lu = \varphi_i$ in Ω_i. Die Funktion u setzen wir durch Null auf ganz Ω fort. Diese fortgesetzte Funktion wird mit $\tilde{u}$ bezeichnet. Es ist dann

$$\tilde{u} \in \mathring{W}_p^{s+1}(\Omega) \subset C^s(\bar{\Omega}) \quad \text{und} \quad R_s\tilde{u} = 0.$$

Ferner gilt

$$L\tilde{u} = \begin{cases} \varphi_i & \text{auf} \quad \Omega_i \\ 0 & \text{auf} \quad \Omega_a \end{cases} \quad \text{und} \quad L\tilde{u} \in \mathring{W}_p^{s+1-2m}(\Omega).$$

Bezeichnen wir mit $\tilde{\varphi}_i$ die durch Null auf ganz Ω fortgesetzte Funktion φ_i, so unterscheiden sich $L\tilde{u}$ und $\tilde{\varphi}_i$ höchstens auf Γ. Es ist also $g := \tilde{\varphi}_i - L\tilde{u} \in \left(\mathring{W}_p^{s+1-2m}(\Omega)\right)_\Gamma$. Wir erhalten

$$\langle G'R_s'T - w_0, \tilde{\varphi}_i\rangle = \langle G'R_s'T - w_0, L\tilde{u}\rangle + \langle G'R_s'T - w_0, g\rangle.$$

Unter Berücksichtigung von (8) gilt wegen $R_s\tilde{u} = 0$

$$\langle G'R_s'T - w_0, L\tilde{u}\rangle = \langle R_s'T, \tilde{u}\rangle = \langle T, R_s\tilde{u}\rangle = 0.$$

Damit erhält man $\langle G'R_s'T - w_0, \tilde{\varphi}_i\rangle = \langle G'R_s'T - w_0, g\rangle$. Aus

$$(G'R_s'T - w_0) \in \left(W_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)\right)_{\bar{\Omega}_i} = \overline{C_0^\infty(\Omega_i)} \quad \text{(Voraussetzung (b)!)}$$

folgt die Existenz einer Folge $(\psi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_i)$ mit

$$\lim_{l\to\infty} \|(G'R_s'T - w_0) - \psi_l\|_{W_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)} = 0.$$

Aus $\operatorname{supp} \psi_l \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$ ergibt sich $\langle \psi_l, g\rangle = 0$ für alle l. Da g aus $W_p^{s+1-2m}(\Omega) = \left(\mathring{W}_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)\right)'$ stammt, gilt $\langle G'R_s'T - w_0, g\rangle = \lim\limits_{l\to\infty} \langle \psi_l, g\rangle = 0$. Somit haben wir

$$\langle G'R_s'T - w_0, \tilde{\varphi}_i\rangle = 0 \tag{9}$$

für alle auf Ω_i definierten Funktionen $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ gezeigt, wobei $\tilde{\varphi}_i$ die jeweilige Fortsetzung durch Null von φ_i auf ganz Ω ist.

9. Jetzt sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine beliebige Funktion mit $\varphi \equiv 0$ in einer Umgebung von Γ. Wir setzen $\varphi_i := \varphi|_{\Omega_i} \in C_0^\infty(\Omega_i)$ und $\varphi_a := \varphi|_{\Omega_a} \in C_0^\infty(\Omega_a)$, $\tilde{\varphi}_i$ und $\tilde{\varphi}_a$ seien die jeweils durch Null auf ganz Ω fortgesetzten Funktionen. Dann ist also

$$\langle G'R_s'T - w_0, \varphi\rangle = \langle G'R_s'T - w_0, \tilde{\varphi}_i\rangle + \langle G'R_s'T - w_0, \tilde{\varphi}_a\rangle.$$

Beide Summanden sind Null, der erste wegen (9) und der zweite wegen (7). Es gilt also $\operatorname{supp} (G'R_s'T - w_0) \subseteq \Gamma$ und damit $(G'R_s'T - w_0) \in \left(W_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)\right)_\Gamma$.

10. Aus der Voraussetzung (b) von Satz 1 läßt sich mittels Lemma 3 (mit $r = 2m - s - 1$) $\left(W_{p'}^{2m-s-1}(\Omega)\right)_\Gamma = \{0\}$ folgern. Es ist also $(G'R_s'T - w_0) \equiv 0$ auf ganz Ω, woraus $L^*(G'R_s'T - w_0) = R_s'T = 0$ folgt. Ist $\dot{f} \in W^s(\Gamma)$ ein beliebiges Whitney-Taylor-Feld, so existiert eine Funktion $f \in C^s(\bar{\Omega})$ mit $R_sf = \dot{f}$. Aus $\langle T, \dot{f}\rangle = \langle T, R_sf\rangle = \langle R_s'T, f\rangle = 0$ folgt $T = 0$ und damit die Behauptung von Satz 1 ∎

LITERATUR

[1] Бабушка, И.: Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости I, II. Чех. мат. журнал **11** (86) (1961), 76—105, 165—203.

[2] Bagby, T.: Approximation in the mean by solutions of elliptic equations. Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 761—784.

[3] Beckert, H.: Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Lösungen des Dirichletschen Problems bei linearen elliptischen Differentialgleichungen. Math. Ann. **139** (1960), 255—264

[4] Beyer, K.: Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme. Rostocker Math. Kolloq. **26** (1984), 27–34.
[5] Browder, F. E.: Functional analysis and partial differential equations II. Math. Ann. **145** (1962), 81–226.
[6] Göpfert, A.: Über L_2-Approximationssätze — eine Eigenschaft der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Math. Nachr. **31** (1966), 1–24.
[7] Göpfert, A., Wanka, G., und J. Wanka: Approximation durch Lösungen partieller Differentialgleichungen. Z. Anal. Anw. **4** (1985), 291–303.
[8] Hamann, U.: Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung. Dissertation B. Rostock: Wilhelm-Pieck-Universität 1986.
[9] Hamann, U.: Gegenbeispiele bei der Approximation durch Lösungen partieller Differentialgleichungen. Rostocker Math. Kolloq. **30** (1986), 79–92.
[10] Hamann, U.: Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf geschlossenen Hyperflächen. Math. Nachr. **136** (1988), 285–301.
[11] Hedberg, L. I.: Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces. Lect. Notes Math. **779** (1980), 73–103.
[12] Hedberg, L. I.: Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem. Acta Math. **147** (1981), 161–187.
[13] Kufner, A., und A. M. Sändig: Some applications of weighted Sobolev spaces. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1987.
[14] Schulze, B.-W., und G. Wildenhain: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin: Akademie-Verlag 1977, und Basel–Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977.
[15] Wanka, G.: Gleichmäßige Approximation durch Lösungen von Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Beiträge zur Analysis **17** (1981), 19–29.
[16] Wildenhain, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order I. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 511–521.
[17] Wildenhain, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order II. Math. Nachr. **113** (1983), 225–235.
[18] Wildenhain, G.: Eine Bemerkung zur gleichmäßigen Approximation durch Lösungen elliptischer Gleichungen. Rostocker Math. Kolloq. **24** (1983), 63–70.
[19] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1982.

Manuskripteingang: 27. 06. 1988

VERFASSER:

Dr. Uwe Hamann
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock