Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (3) 1990, S. 273–275

Die Struktur der Extremallösungen von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

V. Pudei

Es wird die Struktur der Extremallösungen von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung auf einem Interfall $[t_0, \eta(t_0)]$ ermittelt, wobei $\eta(t_0)$ der erste zu t_0 konjugierte Punkt ist. Damit wird auch gezeigt, wie diese Struktur von der Anzahl linear unabhängiger Extremallösungen abhängt.

Рассматривается структура экстремальных решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка на интервале $[t_0, \eta(t_0)]$, где $\eta(t_0)$ первая сопряженная к t_0 точка. Тем же показано, как эта структура зависит от числа линейно независимых экстремальных решений.

The structure of extremal solutions of linear ordinary differential equations of order n on an interval $[t_0, \eta(t_0)]$ is shown, where $\eta(t_0)$ is the first conjugate point of t_0. It is also shown by it, how this structure depends on the number of linearly independent extremal solutions.

Wir gehen in der Arbeit auf die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0 \quad \left(2 \leqq n \in \mathbb{N};\, a_i \in C(I)\right) \tag{1}$$

ein, wobei I ein (beschränktes oder unbeschränktes) offenes Intervall ist. Diese wird (auf dem Intervall I) *konjugiert* genannt, wenn sie eine nichttriviale Lösung mit n Nullstellen hat, wobei m-fache Nullstellen, $m < n$, als m Nullstellen gezählt werden. Dann existiert ein *erster zu* $t_0 \in I$ *konjugierter Punkt* $\eta(t_0) \in I$, $\eta(t_0) > t_0$ [3: Theorem 5], d. h. eine kleinste $\eta(t_0)$ unter allen Zahlen $t > t_0$ $(t \in I)$, für die eine nichttriviale Lösung von (1) mit Nullstellen in t_0, t und insgesamt n Nullstellen im Segment $[t_0; t]$ existieren. Solch eine $\eta(t_0)$ entsprechende Lösung nennen wir *Extremallösung* auf dem Segment $[t_0, \eta(t_0)]$. Wir können $\eta(t_0)$ mit t_0 vertauschen. Dann ist $\eta(t_0)$ der erste linke zu t_0 konjugierte Punkt und $\eta(t_0) < t_0$.

Satz 1: *Die folgenden Behauptungen sind für die Differentialgleichung* (1) *äquivalent:*

a) *Der Rang der Matrix*

$$A_i(Y) = \left\| \begin{matrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(i-1)}(t_0) & y_2^{(i-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(i-1)}(t_0) \\ y_1(\eta(t_0)) & y_2(\eta(t_0)) & \cdots & y_n(\eta(t_0)) \end{matrix} \right\|,$$

wobei $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen von* (1) *darstellt, ist gleich* i, $i \leqq n - 1$.

b) *Es gibt $n-i$ linear unabhängige Lösungen von (1) mit je einer i-fachen Nullstelle in t_0 und einer Nullstelle in $\eta(t_0)$.*

c) *Jede Lösung von (1) mit einer i-fachen Nullstelle in t_0 hat auch eine Nullstelle in $\eta(t_0)$.*

d) *Es gibt $n-i$ linear unabhängige Extremallösungen Y_j $(j = i, i+1, \ldots, n-1)$ von (1) auf dem Segment $[t_0, \eta(t_0)]$, deren jede eine genau j-fache Nullstelle in t_0, genau $n-j-1$ beliebig gelegene Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$ und eine Nullstelle in $\eta(t_0)$ hat. Also existieren vor allem Extremallösungen Y_j mit genau $n-j-1$ einfachen beliebig gelegenen Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$.*

e) *Es gibt Extremallösungen von (1), die genau $n-j-1$ $(i \leqq j \leqq n-1)$ beliebig gelegene Nullstellen in $[t_0, \eta(t_0)]$ haben (die genau j-fache Nullstelle in t_0 und die einfache Nullstelle in $\eta(t_0)$ sind gegeben).*

Dieser Satz gilt auch, wenn wir $\eta(t_0)$ mit t_0 vertauschen.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b): Wir konstruieren das normierte Fundamentalsystem von Lösungen z_l $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$ von (1), welche die Anfangsbedingungen $z_l^{(k)}(t_0) = \delta_{kl}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ erfüllen. Jede von ihnen ist eine Linearkombination von $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Also ist Rang $A_i(Y) = i$ auch für dieses System. Das bedeutet, daß $z_i\left(\eta(t_0)\right) = z_{i+1}\left(\eta(t_0)\right) = \cdots = z_{n-1}\left(\eta(t_0)\right) = 0$ ist.

b) $\Rightarrow$ c): Jede Lösung von (1) mit i-facher Nullstelle in t_0 ist eine Linearkombination von $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}$ und besitzt also auch eine Nullstelle in $\eta(t_0)$.

c) $\Rightarrow$ d): Wir konstruieren $n-i$ Lösungen $Y_j = c_j z_j + c_{j+1} z_{j+1} + \cdots + c_{n-1} z_{n-1}$ $(j = i, i+1, \ldots, n-1)$. Da jede Lösung $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}$ eine j-fache Nullstelle in t_0 und eine Nullstelle in $\eta(t_0)$ hat, gilt gleiches für Y_j. Bei Konstruktion jeder Lösung Y_j mit $n-j-1$ beliebig gelegenen Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$ lösen wir ein System von $n-j-1$ homogenen linearen Gleichungen für $n-j$ Unbekannte $c_j, c_{j+1}, \ldots, c_{n-1}$, welches eine nichttriviale Lösung besitzt. Die Lösung Y_j hat nicht mehr als $n-j-1$ Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$, weil sie in t_0 eine j-fache Nullstelle hat und $\eta(t_0)$ der erste zu t_0 konjugierte Punkt ist. Somit hat jede Lösung Y_j in t_0 eine genau j-fache Nullstelle und genau $n-j-1$ Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$. Das bedeutet, daß Y_j Extremallösungen von (1) sind. Für die Wronski-Determinante gilt $W(z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_{n-1})|_{t=t_0} \neq 0$, und somit sind die Y_j auch linear unabhängig.

d) $\Rightarrow$ e): Wir konstruieren eine Lösung Y von (1), die $n-j-1$ $(i \leqq j \leqq n-1)$ beliebig gelegene Nullstellen in $[t_0, \eta(t_0)]$ hat. Da $Y = k_j Y_j + k_{j+1} Y_{j+1} + \cdots + k_{n-1} \times Y_{n-1}$ ist, löst man folglich ein System von $n-j-1$ homogenen linearen Gleichungen für $n-j$ Unbekannte $k_j, k_{j+1}, \ldots, k_{n-1}$, das eine nichttriviale Lösung besitzt. Somit ist Y eine nichttriviale Lösung von (1) mit $n-j-1$ beliebig gelegenen Nullstellen in $[t_0, \eta(t_0)]$. Diese Lösung hat auch eine j-fache Nullstelle in t_0 und eine Nullstelle in $\eta(t_0)$, weil $Y_j, Y_{j+1}, \ldots, Y_{n-1}$ diese Nullstellen haben. Also ist Y eine Extremallösung auf dem Segment $[t_0, \eta(t_0)]$.

e) $\Rightarrow$ a): Sei Y eine Extremallösung von (1), die eine i-fache Nullstelle in t_0, $n-i-1$ einfache Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$ und eine Nullstelle in $\eta(t_0)$ hat. Wir können voraussetzen, daß Y in dem Intervall $\left(t_{n-1}, \eta(t_0)\right)$ positiv ist. t_{n-1} ist die erste Nullstelle von Y links von $\eta(t_0)$. Wir setzen Rang $A_i(Y) = i+1$ voraus. Dann sind die $i+1$ Zeilen in $A_i(Y)$ linear unabhängig. Existiert also eine Lösung y von (1) mit einer i-fachen Nullstelle in t_0 und $y\left(\eta(t_0)\right) > 0$, so ist $v = Y - \varepsilon y$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, Lösung von (1) mit einer i-fachen Nullstelle in t_0, und für genügend kleines $\varepsilon > 0$ besitzt diese Lösung $n-i$ Nullstellen in $\left(t_0, \eta(t_0)\right)$. Die Lösung v hat somit n Nullstellen in $\left[t_0, \eta(t_0)\right)$, und das ist ein Widerspruch, da jede Lösung von (1) höchstens $n-1$ Nullstellen darin hat.

Wenn wir im Satz 1 $\eta(t_0)$ mit t_0 vertauschen, ist der Beweis ganz analog ∎

Der Rang der Matrix $A_{n-1}(Y)$ im Satz 1 kann nur gleich $n - 1$ oder n sein, weil die Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von (1) linear unabhängig sind und somit in jedem Fall die ersten $n - 1$ Zeilen linear unabhängig sind (siehe den Beweis der Implikation a) $\Rightarrow$ b)). Nach Satz 1 existieren für $i = n - 1$ Extremallösungen von (1) mit beliebiger Verteilung der Nullstellen im Intervall $[t_0, \eta(t_0)]$. Dies ist der Fall, wenn Rang $A_{n-1}(Y) = n - 1$ ist. Im folgenden Satz ist der Fall für die Gleichung (1) der Ordnung $n \geqq 3$ gelöst, wenn Rang $A_{n-1}(Y) = n$ ist.

Satz 2: *Sei $n \geqq 3$. Es ist* Rang $A_{n-1}(Y) = n$ *dann und nur dann, wenn genau eine Extremallösung Y von (1) mit einer $(n - k)$-fachen Nullstelle $(2 \leqq k \leqq n - 2)$ in t_0, einer k-fachen Nullstelle in $\eta(t_0)$ und $Y(t) \neq 0$ für $t \in (t_0, \eta(t_0))$ existiert.*

Beweis: Wir setzen voraus, daß Rang $A_{n-1}(Y) = n$ ist und daß noch eine Extremallösung von (1) existiert, die kein konstantes Vielfaches von Y ist. Solche Extremallösungen sind im Satz 1 eingeführt und Rang $A_{n-1}(Y) = n - 1$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung Rang $A_{n-1}(Y) = n$. Wir setzen nun voraus, daß genau eine Extremallösung Y mit der vorausgesetzten Verteilung von Nullstellen existiert, und es sei Rang $A_{n-1}(Y) = n - 1$. Dann existiert nach Satz 1 eine Extremallösung Y_{n-1} mit einer genau $(n - 1)$-fachen Nullstelle in t_0 und einer Nullstelle in $\eta(t_0)$, was aber mit der Voraussetzung in Widerspruch steht ∎

Satz 1 ist eine Verallgemeinerung des Satzes in der Arbeit [2], in der das Problem der Existenz von Extremallösungen linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit genau n einfachen Nullstellen im Intervall $[t_0, \eta(t_0)]$ gelöst wurde.

Beispiel: Es sei $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $y^{(4)} + py'' + qy = 0$ mit $p, q \in C(a, \infty)$ und $p(t) \leqq 0$; $q(t) < 0$ für alle $t > a$ $(-\infty \leqq a)$, welche die Anfangsbedingungen $y_i^{(k)}(t_0) = \delta_{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ erfüllen. Dann gelten nach [1: Lemma 1] für $t > t_0$ die Ungleichungen $y_i(t) > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Nach [1: Satz 17] existiert eine Extremallösung Y auf dem Segment $[t_0, \eta(t_0)]$, wo $\eta(t_0)$ der erste zu t_0 konjugierte Punkt und $Y(t_0) = Y'(t_0) = Y(\eta(t_0)) = Y'(\eta(t_0)) = 0$, $Y(t) \neq 0$ für $t \in (t_0, \eta(t_0))$ ist. Der Rang der Matrix im Satz 1 für obiges System,

$$A_3(Y) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \right\|, \quad \text{mit} \quad y_i(\eta(t_0)) = a_i > 0,$$

ist gleich 4. Nach Satz 2 ist die Extremallösung Y die einzige.

LITERATUR

[1] Pudei, V.: Über die Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen gerader Ordnung. Časopis pro pěstování matematiky 94 (1969), 401–425.

[2] Pudei, V.: Zur Problematik der Extremallösungen von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Wiss. Z. Techn. Hochschule Leuna-Merseburg 29 (1987) 1, 115–118.

[3] Sherman, T. L.: Properties of solutions of n-th order linear differential equations. Pac. J. Math. 15 (1965), 1045–1060.

Manuskripteingang: 07. 07. 1988; in revidierter Fassung 21. 02. 1989

VERFASSER:

RNDr. Vratislav Pudei, CSc
Vysoká škola chemicko-technologická
Leninovo náměstí 565
CS-532 10 Pardubice