Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (3) 1990, S. 235–272

Исследование экстремалей в обобщенной изопериметрической задаче с помощью условий высшего порядка

Н. П. Осмоловский

Es wird eine Aufgabe betrachtet, welche dem isoperimetrischen Problem verwandt ist: Ein Punkt in der Ebene soll die Randkurve eines Gebietes durchlaufen, so daß dessen Flächeninhalt maximal wird, wobei der Geschwindigkeitsvektor des Punktes in einer kompakten Menge U variieren darf. Unter einigen Voraussetzungen bezüglich U wird mit Hilfe von Bedingungen höherer Ordnung bewiesen, daß mehrfach umlaufende Extremalen nicht einmal ein sogenanntes θ-schwaches Maximum liefern (welches im Falle stetiger Geschwindigkeiten gleichzeitig ein schwaches Maximum wäre). Für einfach umlaufende Extremalen, welche ein absolutes Maximum realisieren, wird ein nichttriviales Resultat über die Art des Maximums bewiesen. Weiterhin werden endlich- und unendlichdimensionale quadratische Formen, die mit der genannten Verallgemeinerung des isoperimetrischen Problems im Zusammenhang stehen, untersucht; es wird bewiesen, daß sie auf den entsprechenden Unterräumen nichtnegativ sind, und einige andere Eigenschaften werden verifiziert.

Рассматривается задача об обходе материальной точкой максимальной площади за фиксированное время при условии, что годографом скорости точки служит произвольный компакт U на плоскости. При некоторых предположениях относительно U с помощью условий высшего порядка доказывается, что многообходные экстремали не доставляют даже так называемого θ-слабого максимума, совпадающего со слабым в случае, когда скорость точки непрерывна, а для однообходных экстремалей, доставляющих абсолютный максимум в задаче, устанавливается нетривиальный результат об остроте максимума. Исследуются также бесконечномерные и конечномерные квадратичные формы, связанные с указанным обобщением изопериметрической задачи, устанавливаются их неотрицательность на соответствующих подпространствах и другие свойства.

The problem of a material point going round maximum area on a plane in a fixed period of time, with its velocity vector varying in a compact set U, is considered. Under some assumptions on U and with the help of higher-order conditions it is proved that multiply-traversing extremals do not even give a so-called θ-weak maximum (which would at the same time be a weak maximum in the case of continuous velocity). For simply-traversing extremals providing an absolute maximum, a non-trivial result on the kind of the maximum is obtained. Furthermore, finite-dimensional and infinite-dimensional quadratic forms connected with the pointed-out generalization of the isoperimetric problem are studied; their non-negativeness on the corresponding subspaces and some other properties are established.

1. Введение

В работе рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (Px, u)\, dt \to \max \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = u, x(0) = x(1), \quad u(t) \in U \quad \text{п.в. на} \quad [0, 1]. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t), u(t) \in \mathbb{R}^2$, P — матрица поворота в $\mathbb{R}^2$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, $U \subset \mathbb{R}^2$ — компакт, овыпукление которого со U содержит ноль внутренней точкой. Максимум ищется среди пар $w = (x, u)$ таких, что $x = x(t)$ — липшицева, а $u = u(t)$ — ограниченная измеримая функция.

Если U — окружность единичного радиуса с центром в нуле, то (1.1), (1.2) — одна из возможных формализаций классической изопериметрической задачи: на максимум площади фигуры при ограниченном её периметре. Если U — круг с центром, не совпадающим с нулём, то (1.1), (1.2) — задача Чаплыгина [13]: самолету требуется облететь максимальную площадь при условии, что годографом его скорости в неподвижной воздушной среде служит круг с центром в нуле, а облет происходит при ветре, имеющем всюду постоянный вектор скорости. В общем случае (1.1), (1.2) можно трактовать как задачу об обходе материальной точкой максимальной площади при условии, что годографом скорости точки служит произвольный компакт U.

Нас будут интересовать три вопроса, связанные с этой задачей:

а) описать все её экстремали;

б) для каждой экстремали исследовать с помощью условий высшего порядка [3—11] вопрос о наличии локального (например, сильного, слабого) максимума;

в) для экстремали, доставляющей абсолютный максимум (мы покажем, что такая существует), определить остроту максимума.

Первый вопрос несложно решается с помощью принципа максимума. Оказывается, что в задаче имеется континуум экстремалей. Все экстремали естественным образом разбиваются на счетное множество типов. При этом экстремаль $w^0 = (x^0, u^0)$ относится к типу n ($n = 1, 2, \ldots$), если x^0, u^0 — периодические функции с периодом $1/n$. На всех экстремалях данного типа n функционал J принимает одно и то же значение, причем, максимальное значение достигается на однообходных экстремалях ($n = 1$). Они и доставляют абсолютный максимум в задаче. Все это устанавливается в § 2.

Далее мы исследуем более сложные вопросы: о наличии локального (в том или ином смысле) максимума при $n > 1$ и об остроте максимума при $n = 1$. Для этого привлекается теория условий высших порядков в оптимальном управлении, анонсированная в [3—5, 11] и полностью изложенная в [6—10]. Сделав определенные предположения относительно компакта U (о возможности задания его в виде конечной системы неравенств с помощью функций класса $\mathbf{C}^2$), мы выписываем в § 3 для произвольной экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$ типа n условия высшего порядка γ из [3—9, 11]. Рассматриваемый порядок γ является положительным всюду, кроме нуля, функционалом в пространстве пар вариаций $\delta w = (\delta x, \delta u)$ и определяется нетривиальным образом: он не является ни квадратичным, ни даже положительно однородным с какой-либо степенью. Порядок γ характеризует то, насколько грубыми (или тонкими) являются отвечающие ему необходимые и достаточные условия. Он же определяет остроту максимума для однообходной экстремали. Хотя, как было сказано, порядок γ квадратичным не является, условия [3—9, 11], отвечающие этому порядку, формулируются в виде требования знакоопределенности некоторой квадратичной формы ω на, так называемом, критическом подпространстве $\mathbf{L}$. Выписав в § 3 указанные условия для произвольной экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$, мы преобразуем их к возможно более простому виду. Здесь же, в § 3, определяется понятие θ-слабого максимума, где θ — конечное множество точек разрыва управления u^0. Это понятие отличается от традиционного понятия слабого максимума тем, что малому шевелению подвергается не только сама экстремаль (x^0, u^0), но и точки множества θ. Условие неотрицательной определенности ω на $\mathbf{L}$ является необходимым для θ-слабого максимума, и в дальнейшем показывается, что при $n > 1$ оно не выполняется. В § 3 это устанавливается для случая, когда U не является строго выпуклым множеством.

В §4 выписываются и анализируются условия типа Якоби, относящиеся к задаче определения знака квадратичной формы на критическом подпространстве. Они затем используются в §5, где получены основные результаты, относящиеся к задаче (1.1), (1.2).

В §5 мы сначала показываем, что в случае строго выпуклого U экстремаль с $n > 1$ не доставляет слабого максимума в задаче. Затем при общих предположениях относительно U исследуется вопрос об остроте максимума для однообходной экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$. Поскольку этот максимум не является строгим, то мы рассматриваем задачу (1.1), (1.2) при дополнительных ограничениях $x(0) = b$, $\int (q, x - b)\, dt = 0$, где $b = x^0(0)$, $q \in \mathbb{R}^2$ — ненулевой вектор, ортогональный к центру тяжести $r^0 = \int (x^0 - b)\, dt$ кривой $x^0 - b$. При этом дополнительном ограничении максимум в точке w^0 становится строгим и удовлетворяет следующей оценке: существуют $C > 0, \varepsilon > 0$ такие, что $J(w^0) - J(w) \geqq C_\gamma(w - w^0)$ для всех допустимых ограничениями $w = (x, u)$ таких, что $\|x - x^0\|_\infty < \varepsilon$ (функционал γ определяется в §5). В этом смысле мы и говорим об остроте максимума. Приведенная оценка устанавливается в §5 с помощью достаточных условий высшего порядка. Здесь же в §5 мы анализируем как связаны задачи с ограничениями $u \in U$ и $u \in \operatorname{co} U$ и даем простое описание класса компактов, являющихся выпуклой оболочкой тех U, которые удовлетворяют предположениям из §2.

В §6 рассматриваются некоторые квадратичные формы, связанные с задачей (1.1), (1.2), и устанавливается их неотрицательность.

Наконец, в §7 мы указываем прием, позволяющий доказывать с помощью условий высших порядков наличие сильного максимума для однообходных экстремалей в случае выпуклого, но не строго выпуклого U. Трудность непосредственного применения достаточных условий высших порядков здесь состоит в том, что из-за наличия прямолинейных отрезков на границе U теряется усиленное условие Лежандра. Восстановить это условие позволяет переход к новой задаче с невыпуклым ограничением $u \in U'$ таким, что овыпукление U' есть U и дуги на границе $\partial U'$ во всех крайних точках множества U имеют нужные кривизны. Здесь операция овыпукления предстает в совершенно неожиданной роли. Традиционное использование этой операции состоит в том, что невыпуклое множество стремятся овыпуклить с тем, чтобы расширить возможности применения теории экстремума. Здесь же ситуация как раз обратная: для выпуклого множества достаточные условия оказываются неприменимы, поэтому его представляют как овыпукление другого множества, для которого можно доказать достаточность; затем доказывается лемма о том что из наличия сильного максимума на любом „представляющем" множестве U' следует сильный максимум на его овыпуклении U.

2. Экстремали

2.1 Принцип максимума. Пусть $w^0 = (x^0, u^0)$ — допустимая ограничениями (1.2) траектория. Пусть $x^0 \not\equiv \mathrm{const}$, следовательно, $u^0 \not\equiv 0$. Условия принципа максимума [12] для w^0 таковы: существуют липшицева функция ψ и константа $\alpha > 0$ такие, что

$$\dot\psi = \frac{1}{2} P u^0, \quad \psi(0) = \psi(1), \tag{2.1}$$

$$\max_{v \in U} \left(\psi(t) + \frac{1}{2} P x^0(t), v\right) = \left(\psi(t) + \frac{1}{2} P x^0(t), u^0(t)\right) = \alpha \tag{2.2}$$

на $[0, 1]$ (здесь мы положили множитель при функционале J равным 1, что не ограничивает общности; условие $\alpha > 0$ вытекает из того, что $0 \in \operatorname{int} \operatorname{co} U$ и $\psi + \frac{1}{2} Px^0 \not\equiv 0$ из-за $\frac{d}{dt}\left(\psi + \frac{1}{2} Px^0\right) = \dot\psi + \frac{1}{2} P\dot x^0 = \frac{1}{2} Pu^0 + \frac{1}{2} Pu^0 = Pu^0 \not\equiv 0$).

Положим $\eta = \psi + \frac{1}{2} Px^0$. Тогда $\dot\eta = Pu^0$ и $\max\left\{(\eta(t), v) \mid v \in U\right\} = \left(\eta(t), u^0(t)\right) = \alpha$. Разделим два последних равенства на α:

$$\max_{v \in U} \left(\eta(t)/\alpha, v\right) = \left(\eta(t)/\alpha, u^0(t)\right) = 1. \tag{2.3}$$

Пусть $U^0 = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (y, v) \leqq 1$ для всех $v \in U\}$ — поляра к множеству U и ∂U её граница. Ясно, что U^0 — выпуклый компакт, причём, $0 \in \operatorname{int} U^0$. Из (2.3) вытекает, что $\eta(t)/\alpha \in \partial U^0$. Следовательно, $\eta(t) \in \alpha\, \partial U^0$. Кроме того, из (2.3) вытекает также, что $\left(\eta(t), u^0(t)\right) = \alpha$. Итак, если $w^0 = (x^0, u^0)$ — экстремаль, то существуют константа α и липшицева функция η такие, что

$$\dot\eta = Pu^0, \eta(t) \in \alpha\, \partial U^0, \left(\eta(t), u^0(t)\right) = \alpha > 0. \tag{2.4}$$

Обратно, если $w^0 = (x^0, u^0)$ — допустимая пара, для которой существуют константа α и липшицева функция η такие, что выполнены условия (2.4), то положив $\psi = \eta - \frac{1}{2} Px^0$, получаем, что для ψ, α, x^0, u^0 выполнены условия принципа максимума (2.1), (2.2), т.е. (x^0, u^0) — экстремаль. Итак, условия (2.4) эквивалентны условиям принципа максимума.

2.2 Структура экстремалей. Проанализируем теперь условия (2.4). Из них вытекает, что

$$\left(P\eta(t), \dot\eta(t)\right) = \left(P\eta(t), Pu^0(t)\right) = \left(\eta(t), u^0(t)\right) = \alpha > 0. \tag{2.5}$$

Следовательно, вектор $\eta(t)$ обходит с ненулевой скоростью границу выпуклого компакта ∂U^0, „заметая“ за равные промежутки времени равные площади. Поскольку $\psi(0) = \psi(1)$, $x^0(0) = x^0(1)$, то $\eta(0) = \eta(1)$. Следовательно, при $t = 1$ вектор η возвращается в исходное положение $\eta(0)$, совершив при этом одно-или многократный обход границы множества U^0. Ниже через n обозначается число полных оборотов вектора $\eta(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

За время, пока вектор $\eta(t)$ совершает полный оборот, вектор $\dot\eta(t)$ также совершает полный оборот. За это же время совершают полный оборот и вектор $u^0(t)$, поскольку $\dot\eta = Pu^0$, а также вектор $x^0(t)$, поскольку $\eta = P(x^0 + c_x)$, где $c_x = \mathrm{const} \in \mathbb{R}^2$. Итак, все функции $x^0, u^0, \eta, \dot\eta$ имеют период $1/n$.

Пусть $\varphi(t)$ есть угол между вектором $\dot\eta(t)$ и, например, вектором $(0, 1)^{\mathsf T}$. Из условия (2.5) вытекает, что $\varphi = \varphi(t)$ — монотонная функция. Следовательно, каждая точка $t \in (0, 1)$ есть либо точка разрыва первого рода функции φ, либо точка ее непрерывности, причем, число точек разрыва у φ не более чем счетно. Нетрудно показать, что точка непрерывности функции φ является точкой непрерывности функции $\dot\eta$, а точка разрыва функции φ является точкой разрыва первого рода функции $\dot\eta$. Таким образом, $\dot\eta$, как и φ, в каждой точке либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода, причем число ее точек разрыва не более, чем счетно. Такими же свойствами обладает и u^0, поскольку $\dot\eta = Pu^0$.

Пусть $\mathfrak{U} = \operatorname{co} U$. Тогда $\mathfrak{U}^0 = U^0$ и $(\mathfrak{U}^0)^0 = \mathfrak{U}$ (последнее верно, т.к. $0 \in \mathfrak{U}$). Из условий

$$\max_{v \in \mathfrak{U}} \left(\eta(t), v\right) = \max_{v \in U} \left(\eta(t), v\right) = \left(\eta(t), u^0(t)\right) = \alpha$$

вытекает, что $u^0(t) \in \partial\mathfrak{U}$ п.в. на $[0, 1]$. Положим $\eta^0 = \eta/\alpha$. Тогда п.в. на $[0, 1]$ имеем

$$u^0(t) \in \partial\mathfrak{U},\ \eta^0(t) \in \partial\mathfrak{U}^0,\ \big(\dot\eta^0(t), u^0(t)\big) = 1. \tag{2.6}$$

Пусть

$$\mathcal{N}(\hat u, \mathfrak{U}) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (v, u - \hat u) \leqq 0\ \forall\, u \in \mathfrak{U}\}$$

— конус внешних нормалей к множеству $\mathfrak{U}$ в точке $\hat u \in \partial\mathfrak{U}$, а

$$\mathcal{N}_1(\hat u, \mathfrak{U}) = \{v \in \mathcal{N}(\hat u, \mathfrak{U}) \mid (v, \hat u) = 1\}$$

— его сечение. Аналогично определим конус внешних нормалей $\mathcal{N}(\hat v, \mathfrak{U}^0)$ к множеству $\mathfrak{U}^0$ в точке $\hat v \in \partial\mathfrak{U}^0$ и его сечение $\mathcal{N}_1(\hat v, \mathfrak{U}^0)$. Из (2.6) легко следует, что п.в. на $[0, 1]$

$$\eta^0(t) \in \mathcal{N}_1(u^0, \mathfrak{U}) \subset \partial\mathfrak{U}^0,\ u^0(t) \in \mathcal{N}_1(\eta^0, \mathfrak{U}^0) \subset \partial\mathfrak{U}.$$

Ясно, что при каждом $\hat u \in \partial\mathfrak{U}$ множество $\mathcal{N}_1(\hat u, \mathfrak{U})$ есть отрезок или точка. Если $\mathcal{N}_1(\hat u, \mathfrak{U})$ — отрезок, то будем говорить, что $\hat u$ — *угловая точка* границы $\partial\mathfrak{U}$; если $\mathcal{N}_1(\hat u, \mathfrak{U})$ — точка, то будем называть $\hat u$ *точкой гладкости* границы $\partial\mathfrak{U}$. Такие же понятия будем использовать и для точек границы $\partial\mathfrak{U}$. Ясно, что границы $\partial\mathfrak{U}$ и $\partial\mathfrak{U}^0$ содержат не более, чем счетное число отрезков, а, значит, и угловых точек.

Рассмотрим теперь поведение функций u^0, η^0. Угловой точке на $\partial\mathfrak{U}$ соответствует отрезок на $\partial\mathfrak{U}^0$. Следовательно, все время, пока липшицева функция η^0 проходит отрезок на $\partial\mathfrak{U}^0$, управление u^0 „стоит" в угловой точке границы $\partial\mathfrak{U}$. Далее, угловой точке на $\partial\mathfrak{U}^0$ соответствует отрезок на $\partial\mathfrak{U}$. Поскольку в силу (2.5) $(P\eta^0, \dot\eta^0) = 1/\alpha > 0$, то вектор η^0 „мгновенно" проходит угловую точку на $\partial\mathfrak{U}^0$, следовательно, u^0 „мгновенно", т.е. скачком, проходит внутреннюю часть отрезка на $\partial\mathfrak{U}$ (при этом любой из концов отрезка на $\partial\mathfrak{U}$ может оказаться угловой точкой, и тогда u^0 „стоит" в этом конце положительное время). Верно и обратное: если u^0 имеет скачок, то левое и правое предельные значения u^0 в момент скачка u^{0-} и u^{0+} расположены в концах отрезка на $\partial\mathfrak{U}$ (в чем нетрудно убедиться, если учесть, что в момент скачка t^* выполнено условие $\eta^0(t^*) \in \mathcal{N}_1(u^0, \mathfrak{U}) \cap \mathcal{N}_1(u^{0+}, \mathfrak{U})$, но это возможно лишь тогда, когда u^{0-} и u^{0+} принадлежат отрезку на $\partial\mathfrak{U}$). Итак, отрезкам на $\partial\mathfrak{U}$ и только им соответствуют скачки управления u^0.

Пусть θ — множество точек разрыва u^0 (как уже отмечалось, оно не более, чем счетно). В силу сказанного выше, на $(0, 1)\setminus\theta$ управление u^0 непрерывно и $u^0(t)$ принадлежит множеству ex $\mathfrak{U}$ — крайних точек $\mathfrak{U}$. Следовательно, $u^0(t) \in \operatorname{ex}\mathfrak{U}$ на множестве полной меры.

Пусть имеется n-обходная экстремаль $w^0 = (x^0, u^0)$. Из равенства $\big(P\eta^0(t), \dot\eta^0(t)\big) = 1/\alpha$ вытекает, что $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (P\eta^0, \dot\eta^0)\, dt = 1/2\alpha$, или $nS_0 = 1/2\alpha$, где S_0 — площадь поляры $\mathfrak{U}^0$. Следовательно,

$$\alpha = 1/2nS_0. \tag{2.7}$$

Число обходов n, начальные значения $\eta_0 = \eta^0(0)$, $x_0 = x^0(0)$ однозначно определяют экстремаль. Действительно, зная n, по (2.7) находим α, а отсюда и из условий $\eta^0(t) \in \partial\mathfrak{U}^0$, $\big(P\eta^0(t), \dot\eta^0(t)\big) = 1/\alpha$, $\eta^0(0) = \eta_0$ однозначно определяется η^0, а, значит, и $\eta = \alpha\eta^0$. Далее, условия $\dot\eta = Pu^0$, $\dot x^0 = u^0$, $x^0(0) = x_0$ однозначно определяют x^0, u^0.

Наконец, отметим, что для любой экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$ набор множителей, удовлетворяющих принципу максимума, определяется единственным образом. Это видно, например, из (2.4). Действительно, пусть помимо пары (η, α) имеется пара (η^1, α) удовлетворяющая условиям (2.4). Поскольку $\dot\eta = Pu^0$, $\dot\eta^1 = Pu^0$, то $\eta^1 = \eta + c$, где $c = \overrightarrow{\mathrm{const}} \in \mathbb{R}^2$. Но $(\eta(t), u^0(t)) = (\eta^1(t), u^0(t)) = \alpha$. Следовательно, $(c, u^0(t)) = 0$ п.в. на $[0, 1]$, откуда следует, что $c = 0$, ибо $\dot u^0$ не сохраняет направление на $[0, 1]$. Значит, $\eta = \eta^1$.

2.3 Оптимальное решение. Поскольку $u^0(t) \in \mathrm{ex}\,\mathfrak{U}$ на множестве полной меры, то, как видно из условий (2.4), определяющих экстремаль, при замене в задаче (1.1), (1.2) ограничения $u(t) \in U$ на ограничение $u(t) \in \mathrm{co}\,U$ (т.е. $u(t) \in \mathfrak{U}$) множество экстремалей не меняется. Отсюда, в частности, вытекает существование оптимального решения в задаче (1.1), (1.2). Действительно, рассмотрим новую задачу с ограничением $u \in \mathfrak{U}$. В ней оптимальное решение существует, поскольку множество $\left\{u \in (\mathbf{L}_\infty)^2 \mid u(t) \in \mathfrak{U}, \int_0^1 u\,dt = 0\right\}$ компактно в $*$-слабой топологии пространства $(\mathbf{L}_\infty)^2$, а функционал $u \mapsto \int_0^1 (Px, u)\,dt$ где $x(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$, непрерывен в этой топологии (здесь следует также учесть, что $\int (Px, u)\,dt = \int \big(P(x + c), u\big)\,dt$, если $c = \overrightarrow{\mathrm{const}} \in \mathbb{R}^2$, $\int u\,dt = 0$). Точка максимума в новой задаче является экстремалью новой, а, значит, и старой задачи; но тогда она есть точка максимума и в старой задаче, поскольку в старой задаче допустимое множество уже, чем в новой.

Вычислим значение функционала J на каждой экстремали. Из условий $P(x^0 + c_x) = \eta$, $(\eta(t), u^0(t)) = \alpha$ следует, что $(Px^0(t), u^0(t)) + (Pc_x, u^0(t)) = \alpha$. Интегрируя это равенство и деля на 2, получаем $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (Px^0, u^0)\,dt = \alpha/2 = 1/4nS_0$. Наибольшее значение достигается при $n = 1$, т.е. на однообходных экстремалях. Поскольку оптимальное решение существует, то любая однообходная экстремаль и является оптимальным решением. Однако не ясно, не будут ли локальными (в том или ином смысле) максимумами многообходные экстремали. Кроме того, как уже отмечалось, нас будет интересовать вопрос об остроте максимума для однообходной экстремали. Ответить на эти вопросы позволит исследование экстремалей с помощью условий высшего порядка. Переходя к этому исследованию, сделаем дополнительные предположения относительно компакта U.

3. Условия высшего порядка

3.1 Предположения. Предполагается, что

а) существуют открытое множество $Q \subset \mathbb{R}^2$ и набор функций $G_i : Q \mapsto \mathbb{R}^1$ $(i = 1, \ldots, m)$ класса $\mathbf{C}^2$ такие, что $U = \{u \in Q \mid G_i(u) \leqq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, причем, из условий $u \in Q$, $G_i(u) = 0$ следует, что $G_i'(u) \neq 0$, а из условий $u \in Q$, $G_i(u) = 0$, $G_j(u) = 0$, $i \neq j$ следует, что градиенты $G_i'(u)$, $G_j'(u)$ линейно независимы; наконец, никакие три функции из набора $\{G_i\}$ одновременно в ноль не обращаются;

б) из условий $u \in \mathrm{ex}\,\mathfrak{U}$, $G_i(u) = 0$ следует, что матрица $G_i''(u)$ положительно определена (здесь, как и выше, $\mathfrak{U} = \mathrm{co}\,U$);

в) у любого отрезка на $\partial\mathfrak{U}$ лишь концы принадлежат U (под *отрезком* на $\partial\mathfrak{U}$ всегда подразумевается максимальный прямолинейный отрезок, содержащийся в $\partial\mathfrak{U}$).

Как и выше, предполагается, что

г) U компакт и $0 \in \mathrm{int}\,\mathfrak{U}$.

Определение 3.1: Будем говорить, что компакт $U \subset \mathbb{R}^2$ задан *каноническим образом*, если он удовлетворяет всем условиям а)—в).

Нетрудно проверить, что объединение конечного числа попарно непересекающихся компактов, заданных каноническим образом, есть снова компакт, заданный каноническим образом. Далее, отметим, что поскольку множество крайних точек выпуклого компакта в $\mathbb{R}^2$ замкнуто, то из условия б) вытекает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $u \in \mathrm{ex}\,\mathfrak{U}$, $G_i(u) = 0$ следует, что $(G_i''(u)\,\overline{u}, \overline{u}) \geqq \varepsilon\,|\overline{u}|^2$ для всех $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$. Все дальнейшие рассмотрения остаются в силе, если это требование заменить на более слабое: существует $\varepsilon > 0$ такое, что из условий $u \in \mathrm{ex}\,\mathfrak{U}$, $G_i(u) = 0$ следует, что $\left(G_i''(u)\,\overline{u}, \overline{u}\right) \geqq \varepsilon\,|\overline{u}|^2$ для всех $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ таких, что $(G_i'(u), \overline{u}) = 0$. Наконец, имеет место следующее

Предложение 3.1: *Из условий* а), б), г) *следует, что* $\partial\mathfrak{U}$ *содержит не более конечного числа отрезков и угловых точек.*

Доказательство: Покажем, что $\partial\mathfrak{U}$ содержит не более конечного числа угловых точек. Пусть это не так. Тогда имеется счетная последовательность угловых точек $u_n \in \partial\mathfrak{U}$. Для каждой угловой точки u_n имеется пара функций G_{i_n}, G_{j_n} таких, что $G_{i_n}(u_n) = G_{j_n}(u_n) = 0$. Не ограничивая общности можно считать, что, для всех n, $i_n = i$, $j_n = j$ и $u_n \to u \in \partial\mathfrak{U}$. Итак, $G_i(u_n) = G_j(u_n) = 0$. Тогда $G_i(u) = G_j(u) = 0$. Далее, положим $\overline{u}_n = u_n - u$, $\varepsilon_n = |\overline{u}_n|$. Считаем, что $\overline{u}_n/\varepsilon_n \to \overline{u}$, $|\overline{u}| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} O = G_i(u_n) &= G_i(u + \overline{u}_n) \\ &= G_i(u) + G_i'(u)\,\overline{u}_n + o(\varepsilon_n) = G_i'(u)\,\overline{u}_n + o(\varepsilon_n). \end{aligned}$$

Деля на ε_n и переходя к пределу, получаем $G_i'(u)\,\overline{u} = 0$. Но аналогично и $G_j'(u)\,\overline{u} = 0$. Поскольку $G_i(u) = G_j(u) = 0$, то в силу предположения а) градиенты $G_i'(u)$, $G_j'(u)$ линейно независимы. Следовательно, $\overline{u} = 0$. Но это противоречит условию $|\overline{u}| = 1$.

Точно так же доказывается более сильное утверждение: точки $u \in U$ такие, что, для некоторых $i \neq j$, $G_i(u) = G_j(u) = 0$, не могут накапливаться, и следовательно, на U их имеется лишь конечное число. Это утверждение нам понадобится ниже.

Покажем теперь, что $\partial\mathfrak{U}$ содержит не более конечного числа отрезков. Пусть есть счетное число отрезков $[u_n', u_n'']$ на $\partial\mathfrak{U}$. Положим $\overline{u}_n = u_n'' - u_n'$. Тогда $\varepsilon_n = |\overline{u}_n| \to 0$, $u_n', u_n'' \to u \in \mathrm{ex}\,\mathfrak{U}$. Не ограничивая общности, считаем, что $\overline{u}_n/\varepsilon_n \to \overline{u}$, где $|\overline{u}| = 1$. В силу предыдущего утверждения мы можем считать, что существует индекс $i \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что $G_i(u_n') = G_i(u_n'') = 0$, причем, u_n', u_n'' угловыми точками не являются. Тогда

$$\begin{aligned} 0 = G_i(u_n'') &= G_i(u_n' + \overline{u}_n) \\ &= G_i(u_n') + G_i'(u_n')\,\overline{u}_n + \frac{1}{2}\left(G_i''(u_n')\,\overline{u}_n, \overline{u}_n\right) + o(\varepsilon_n^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(G_i''(u_n')\,\overline{u}_n, \overline{u}_n\right) + o(\varepsilon_n^2). \end{aligned}$$

Член $G_i'(u_n')\,\bar u_n$ равен нулю, поскольку $\bar u_n$ есть касательное направление к кривой $G_i(u) = 0$. Следовательно, $\frac{1}{2}\left(G_i''(u_n')\,\bar u_n/\varepsilon_n, \bar u_n/\varepsilon_n\right) + o(\varepsilon_n^2)/\varepsilon_n^2 = 0$. Переходя к пределу, получаем $1/2\left(G_i''(u)\,\bar u, \bar u\right) = 0$. Но это противоречит предположению б), поскольку $|\bar u| = 1$, $u \in \operatorname{ex} \mathfrak{U}$ ∎

Пусть $w^0 = (x^0, u^0)$ — какая-либо n-обходная экстремаль. Согласно пункту 2.2 и предложению 3.1 u^0 имеет конечное множество точек разрыва $\theta = \{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ $(0 < t_1 < \cdots < t_s < 1)$. Положим $u_-^{0i} = u^0(t_i - 0)$, $u_+^{0i} = u^0(t_i + 0)$, $i = 1, \ldots, s$. Согласно пункту 3.2 u_-^{0i}, u_+^{0i} — концы отрезков на $\partial\mathfrak{U}$. Предполагается, что $u^0(+0)$ и $u^0(1-0)$ концами отрезков на $\partial\mathfrak{U}$ не являются. Согласно сказанному выше, отрезок $[0, 1]$ является объединением конечного числа отрезков двух типов:

а) отрезков, внутри которых u^0 непрерывно и проходит по границе лишь одного ограничения $G_i = 0$; интервалы, соответствующие таким отрезкам, мы будем обозначать через e, а сами отрезки — через $\bar e$;

б) отрезков, внутри которых u^0 „стоит" в угловой точке множества $\partial\mathfrak{U}$ определяемой двумя ограничениями $G_i = 0$, $G_j = 0$; интервалы, соответствующие таким отрезкам мы будем обозначать через e', а сами отрезки — через $\bar e'$.

Положим $\mathscr{E} = \cup e$, $\mathscr{E}' = \cup e'$, $\bar{\mathscr{E}} = \cup \bar e$, $\bar{\mathscr{E}}' = \cup \bar e'$. Тогда $\bar{\mathscr{E}}$ есть замыкание $\mathscr{E}$, а $\bar{\mathscr{E}}'$ — замыкание $\mathscr{E}'$, $\bar{\mathscr{E}} \cup \bar{\mathscr{E}}' = [0, 1]$, $\operatorname{mes}(\bar{\mathscr{E}} \setminus \mathscr{E}) = \operatorname{mes}(\bar{\mathscr{E}}' \setminus \mathscr{E}') = 0$, $\dot u(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathscr{E}$, $\dot u(t) = 0$ для всех $t \in \mathscr{E}'$.

Как было сказано во введении, для экстремали w^0 с числом обходов $n > 1$ будет показано, что w^0 не доставляет в задаче даже θ-слабый максимум. Определение такого максимума мы дадим ниже.

3.2 θ-слабый максимум. Пусть $\overline{u^{0i}}$ — замыкание в $\mathbb{R}^3$ графика сужения u^0 на интервал (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, s+1$, где $t_0 = 0$, $t_{s+1} = 1$. Пусть $\overline{u^0}$ есть объединение $\overline{u^{0i}}$ по $i = 1, \ldots, s+1$ (другими словами $\overline{u^0}$ есть замыкание графика u^0 без изолированных точек замыкания, что в рассматриваемом случае совпадает с введенным А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным понятием замыкания по мере; обозначение этих авторов мы и используем).

Положим $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_1^1)^2 \times (\mathbf{L}_\infty)^2$, где $(\mathbf{W}_1^1)^2$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Определим в $\mathbf{W}$ норму

$$\|w\| = \|x\|_{\mathbf{W}_1^1} + \|u\|_{\mathbf{L}_\infty} = |x(0)| + \int |\dot x|\, dt + \operatorname{vraimax} |u|.$$

Локальный максимум в смысле этой нормы есть слабый максимум. Обозначим через $\Pi(\theta)$ множество последовательностей $\{\delta w_n\}$, $\delta w_n = (\delta x_n, \delta u_n)$ в пространстве $\mathbf{W}$ таких, что $\|\delta x_n\|_{\mathbf{W}_1^1} \to 0$ и для любой окрестности $\mathcal{V}$ множества $\overline{u^0}$ существует номер $\mathbf{N}$ такой, что для всех $n \geq \mathbf{N}$ выполнено условие $\left(u^0(t) + \delta u_n(t), t\right) \in \mathcal{V}$ п.в. на $[0, 1]$. Положим $\delta_n J = J(w^0 + \delta w_n) - J(w^0)$. Следуя [5, 6, 8], будем говорить, что w^0 — точка *θ-слабого максимума*, если не существует $\{\delta w_n\} \in \Pi(\theta)$ такой, что для всех n, $w^0 + \delta w_n$ удовлетворяет ограничениям задачи и $\delta_n J > 0$.

Обозначим через Π^s множество последовательностей $\{\delta w_n\}$ в пространстве $\mathbf{W}$ таких, что $\|\delta x_n\|_{\mathbf{C}} \to 0$. Заменяя в предыдущем определении $\Pi(0)$ на Π^s, получаем определение *сильного максимума*. Очевидно, θ-слабый максимум занимает промежуточное положение между сильным и слабым максимумом.

3.3 Уравнение Эйлера. Для экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$ в условиях принципа максимума (2.1), (2.2) заменим условие (2.2) на вытекающее из него условие: существует множитель Лагранжа $a(t) = (a_1(t), \ldots, a_m(t))$ такой, что

$$\psi + \frac{1}{2} Px^0 = aG'(u^0), \tag{3.1}$$

где $G = (G_1, \ldots, G_m)$, $aG'(u^0) = \Sigma a_i G_i'(u^0)$, причем,

$$a(t) \geqq 0,\ aG(u^0) = \Sigma a_i G_i(u^0) = 0. \tag{3.2}$$

Условия (3.1), (3.2) и условия

$$\dot\psi = \frac{1}{2} Pu^0,\ \psi(0) = \psi(1) \tag{3.3}$$

определяют локальный принцип максимума, который, как известно, представляет собой необходимое условие первого порядка для слабого максимума. Полагая, как и раньше, $\eta = \psi + \frac{1}{2} Px^0$, получаем $\eta = aG'(u^0)$, $\dot\eta = Pu^0$, $\eta(0) = \eta(1)$.

В задачах оптимального управления локальный принцип максимума представляет собой полный аналог классического уравнения Эйлера в вариационном исчислении, поэтому его называют также обобщенным уравнением Эйлера или просто уравнением Эйлера. В общем случае уравнение Эйлера есть следствие принципа максимума. Однако в рассматриваемом случае уравнение Эйлера эквивалентно принципу максимума, поскольку задача (1.1)—(1.3) выпукла по управлению. Отсюда и из полученной в пункте (2.2) единственности набора множителей, удовлетворяющих принципу максимума, вытекает

Предложение 3.2: *Набор множителей (ψ, a), удовлетворяющих условиям (3.1)—(3.3), единствен, и его функция ψ совпадает с функцией ψ принципа максимума.*

Далее мы будем рассматривать функцию ψ принципа максимума и соответствующие ей функции η, a и константу α. Напомним, что η — липшицева функция и

$$\eta = aG'(u^0). \tag{3.4}$$

Исследуем теперь некоторые свойства функций η, a, u^0.

3.4 Свойства функций η, a, u^0. Рассмотрим какой-либо интервал $e \subset [0, 1]$, на котором u^0 идет по границе лишь одного ограничения $G_i(u^0) = 0$. На e уравнение (3.4) имеет вид $\eta = a_i G_i'(u^0)$. Из условия $\eta \in \alpha\, \partial\mathfrak{U}^0$ следует, что $|\eta| \geqq \text{const} > 0$. Значит, $a_i \geqq \text{const} > 0$ на e.

Далее, покажем, что на e функции u^0, a_i являются непрерывно дифференцируемыми. Пусть имеется произвольная точка $t \in e$. В окрестности точки $(\eta(t), u^0(t), a_i(t))$ рассмотрим систему уравнений

$$G_i(u) = 0,\ a_i G'_{iu_1}(u) - \eta_1 = 0,\ a_i G'_{iu_2}(u) - \eta_2 = 0, \tag{3.5}$$

которую кратко запишем в виде $\varphi(\eta, u, a_i) = 0$. В малой окрестности точки $(\eta(t), u^0(t), a_i(t))$ эта система определяет неявную функцию $\eta \mapsto (u(\eta), a_i(\eta))$ класса C^1. Чтобы убедиться в этом, следует вычислить производную φ по переменным u, a_i. Эта производная имеет вид

$$\begin{pmatrix} G_{iu_1} & G_{iu_2} & 0 \\ a_i G_{iu_1u_1} & a_i G_{iu_1u_2} & G_{iu_1} \\ a_i G_{iu_2u_1} & a_i G_{iu_2u_2} & G_{iu_2} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы в точке $(\eta(t), u^0(t); a_i(t))$ (его удобно вычислять разложением по первой строке) равен

$$d = -a_i(t)\,(G_i''(u^0(t)\,\bar{u}, \bar{u}) \leqq \text{const} < 0;$$

где $\bar{u} = (G'_{u_2}(u^0(t)), -G'_{u_1}(u^0(t)))$ причем, константа не зависит от $t \in e$. Таким образом, условия теоремы о неявной функции оказываются выполнены. Поскольку $\dot{\eta} = Pu^0$ и u^0 непрерывна на e, то η — функция класса C^1 на e. Тогда u^0, a_i также функции класса C^1 на e (и, следовательно, η — класса C^2 на e).

Пусть $e' \subset [0, 1]$ — интервал, на котором $u^0(t)$ „стоит" в угловой точке на $\partial\mathfrak{U}$. Напомним, что $\eta^0 = \eta/\alpha$, $\eta^0(t) \in \partial\mathfrak{U}^0$, $\dot{\eta}^0 = Pu^0/\alpha$. Поскольку $u^0(t) = \text{const}$ на e', то η^0 — линейная функция на e', пробегающая отрезок $\mathcal{N}_1(u^0, \mathfrak{U})$ на $\partial\mathfrak{U}^0$, и, следовательно, не сохраняющая постоянного направления. Далее, из определения e' следует, что найдутся индексы i, j такие, что на e' имеем $G_i(u^0) = 0, G_j(u^0) = 0$, но $G_k(u^0) < 0$ при $k \notin \{i, j\}$ и, следовательно, на e' имеем

$$a_i G_i'(u^0) + a_j G_j'(u^0) = \alpha\eta^0. \tag{3.6}$$

Так как $G_i'(u^0)$, $G_j'(u^0)$ на e' постоянные линейно независимые векторы, а η^0 — линейная функция, то a_i, a_j также линейны на e'. Поскольку a_i, a_j неотрицательны, то отсюда следует, что a_i, a_j положительны на e' (действительно, если, например, линейная функция a_i не является положительной на e', то в силу неотрицательности она равна нулю на e', но тогда $\alpha\eta^0 = a_j G_j'(u^0)$, т.е. η^0 сохраняет постоянное направление на e', что, как мы видели, не верно). Из (3.6) также следует, что $a_i + a_j \geqq \text{const} > 0$ на e'.

Рассмотрим поведение $a(t)$ на e' чуть подробнее. Предположим сначала, что концы t', t'' отрезка $\bar{e}'$ не принадлежат θ. В этом случае G'_{iu}, G'_{ju} имеют направления двух крайних нормалей из отрезка $\mathcal{N}_1(u^0, \mathfrak{U})$, который пробегает η^0 на e'. Следовательно, одна из функций a_i, a_j возрастает на e' линейно от нуля до некоторого положительного значения, в то время как другая линейно убывает от некоторого положительного значения до нуля. Нетрудно видеть, что при этом концы отрезка $\bar{e}'$ — точки непрерывности функций a_i, a_j а, значит, и функции a. Предположим теперь, что один из концов отрезка $\bar{e}'$, например, правый, принадлежит θ, $t'' \in \theta$. Здесь либо может повториться предыдущая ситуация (и тогда a непрерывна в t''), либо может оказаться, что та из функций a_i, a_j, которая убывает, остается на e' больше некоторой положительной константы; в последнем случае конус $\mathcal{N}(u^0, \mathfrak{U})$ составляет лишь часть конуса, натянутого на векторы $G_i'(u^0), G_j'(u^0)$, а функция a терпит разрыв в точке t''. При этом, как и выше, если t' — точка непрерывности управления u^0, то t' — точка непрерывности и функции a. Напомним теперь, что отрезок $[0, 1]$ можно представить в виде объединения отрезков типа $\bar{e}$ (где u^0 непрерывна и проходит по границе лишь одного ограничения) и типа $\bar{e}'$ (где u^0 стоит в угловой точке на $\partial\mathfrak{U}$), причем, тех и других отрезков имеется лишь конечное число. Поэтому из сказанного выше вытекает

Предложение 3.3: *Пусть $w^0 = (x^0, u^0)$ удовлетворяет интегральному принципу максимума с множителями ψ, α, а множитель a удовлетворяет условиям $\dot{\psi} + \frac{1}{2}Px^0 = aG'(u^0)$, $a \geqq 0$, $aG(u^0) = 0$. Тогда функция a — кусочно-липшицева (т.е. кусочно-непрерывна и удовлетворяет условию Липшица на каждом интервале непрерывности), причем, все её точки разрыва принадлежат множеству θ. Далее, для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ п.в. на множестве $\{t \mid G_i(u^0(t)) = 0\}$ выполняется неравенство $a_i(t) > 0$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $t \in [0, 1] \setminus \theta$ выполняется неравенство $\sum a_i(t) \geqq \varepsilon$. Наконец, функция u^0 также является ку-*

сочно-липшицевой и, более того, на каждом интервале непрерывности u^0 непрерывно дифференцируема.

Это предложение сыграет в дальнейшем важную роль.

Теперь мы переходим непосредственно к выписыванию соответствующих необходимых и достаточных условий высшего порядка для локального максимума.

3.5 Критический конус $\mathcal{K}$. Следуя [3—9], определим критический конус $\mathcal{K}$ в точке w^0. Для этого представим нашу задачу в канонической форме:

$$\dot{x} = u, \dot{y} = \frac{1}{2}(Px, u), G_i(u) \leqq 0, i = 1, \ldots, m, u \in Q,$$

$$x_0 - x_1 = 0, \quad y_0 - y_1 \to \min,$$

где $x_0 = x(0)$, $x_1 = x(1)$, $y_0 = y(0)$, $y_1 = y(1)$. Через $\mathbf{W}_2{}^1$ обозначается пространство абсолютно непрерывных функций y: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, у которых первая производная суммируема с квадратом. Через $\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1$ обозначим пространство кусочно непрерывных функций $\bar{y}$: $[0, 1] \to \mathbb{R}$, все точки разрыва которых принадлежат θ, абсолютно непрерывных на каждом интервале непрерывности и таких, что их производная суммируема с квадратом. Через $(\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1)^2$ обозначим пространство таких же функций, но со значениями в $\mathbb{R}^2$. Согласно [3—9] $\mathcal{K}$ есть множество наборов $(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ таких, что

$$\bar{\xi} \in \mathbb{R}^s, \bar{x} \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1)^2, \bar{y} \in \mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1, \bar{u} \in (\mathbf{L}_2)^2, \tag{3.7}$$

$$\bar{y}(0) - \bar{y}(1) \leqq 0, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}(1); \tag{3.8}$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{u}, \quad \dot{\bar{y}} = 1/2\big((P\bar{x}, u^0) + (Px^0, \bar{u})\big), \tag{3.9}$$

$$\Delta^i\bar{x} = \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i, \quad \Delta^i\bar{y} = 1/2\big(Px^0(t_i), \Delta^i u^0\big)\,\bar{\xi}_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{3.10}$$

$$G_j'\bar{u} \leqq 0, \quad \text{если} \quad G_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.11}$$

Здесь и далее

$$G_j' = G_j'(u^0), G_j = G_j(u^0),$$

$$\Delta^i\bar{x} = \bar{x}_+{}^i - \bar{x}_-{}^i = \bar{x}(t_i + 0) - \bar{x}(t_i - 0),$$

$$\Delta^i\bar{y} = \bar{y}_+{}^i - \bar{y}_-{}^i = \bar{y}(t_i + 0) - \bar{y}(t_i - 0),$$

$$\Delta^i u^0 = u_+{}^{0i} - u_-{}^{0i}, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Согласно [3, 5, 8] для любого элемента $(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ конуса $\mathcal{K}$ выполнено условие $aG'\bar{u}: = \Sigma a_j(G_j'\bar{u}) = 0$. Далее, согласно предложению 3.3 $a_j > 0$, если $G_j = 0, t \notin \theta$. Следовательно, условие (3.11) можно заменить на условие

$$G_j'\bar{u} = 0, \quad \text{если} \quad G_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.12}$$

Согласно [3, 5, 8] после такой замены неравенство $\bar{y}(0) - \bar{y}(1) \leqq 0$ вообще можно опустить, не изменив при этом $\mathcal{K}$. Итак, $\mathcal{K}$ определяется условиями (3.7), (3.9), (3.10), (3.12) и условием $\bar{x}(0) = \bar{x}(1)$.

Обратимся к условию (3.12). Рассмотрим произвольный интервал e, на котором u^0 непрерывно и движется по границе одного ограничения $G_i(u^0) = 0$. На e имеем $\dot{G}_i = 0$, или $G_i'\dot{u}^0 = 0$. Если показать, что $|\dot{u}^0| \geqq \text{const} > 0$ на e (неравенство $|\dot{u}^0| \leqq \text{const}$ также имеет место), то из (3.12) будет следовать представление на e

$$\bar{u} = \bar{v}\dot{u}^0, \quad \bar{v} \in \mathbf{L}_2, \tag{3.13}$$

которое в дальнейшем сыграет важную роль. Итак, покажем, что $|\dot{u}^0| \geqq \text{const} > 0$ на e. Действительно, на e имеет место равенство $a_i G_i' = \eta$. Дифференцируя его по t, получаем

$$\dot{a}_i G_i' + a_i G_i'' \dot{u}^0 = \dot{\eta}. \tag{3.14}$$

Из условия $a_i G_i' = \eta$ следует, что $(P\eta, \dot{a}_i G_i') = 0$. Тогда умножая (3.14) на $P\eta$ и учитывая, что $(P\eta, \dot{\eta}) = \alpha$, получаем $(P\eta, a_i G_i'' \dot{u}^0) = \alpha > 0$ на e. Отсюда вытекает требуемая оценка, а, значит, и возможность представления (3.13) на e. Рассмотрим теперь интервал e' на котором u^0 стоит в угловой точке на $\partial\mathfrak{U}$. Найдутся i, j такие, что на e' имеем $G_i(u^0) = 0$, $G_j(u^0) = 0$, $G_k(u^0) < 0$ при $k \notin \{i, j\}$. На e' условия (3.12) означают, что $G_i'\overline{u} = 0$, откуда в силу линейной независимости G_i', G_j' вытекает, что $\overline{u} = 0$ на e'. Но $\dot{u}^0 = 0$ на e. Таким образом на e' представление (3.13) также имеет место. Поскольку отрезок $[0, 1]$ есть объединение конечного числа отрезков типа $\bar{e}$ и $\bar{e}'$, то представление (3.13) имеет место п.в. на $[0, 1]$.

Мы показали, что для всякой $\overline{u} \in (\mathbf{L}_2)^2$, удовлетворяющей условиям (3.12), существует $\overline{v} \in \mathbf{L}_2$ такая, что имеет место представление (3.13). Очевидно, верно и обратное: из (3.13) вытекает, что $\overline{u} \in (\mathbf{L}_2)^2$ и для неё выполнены условия (3.12). Наконец, отметим, что в (3.13), очевидно, можно условие $\overline{v} \in \mathbf{L}_2$ заменить на условие $\overline{v} \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E} = \cup e$, $\mathbf{L}_2(\mathscr{E}) = \{\overline{v} \in \mathbf{L}_2 \mid \overline{v}\chi(\mathscr{E}) = \overline{v}\}$, $\chi(\mathscr{E})$ — характеристическая функция множества $\mathscr{E}$.

Итак, $\mathscr{K}$ состоит из наборов $(\bar{\xi}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{u})$, удовлетворяющих условиям

$$\bar{\xi} \in \mathbb{R}^s,\ \overline{x} \in (\mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_2{}^1)^2,\ \overline{y} \in \mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_2{}^1,\ \overline{x}(0) = \overline{x}(1),$$

$$\dot{\overline{x}} = \overline{u},\ \dot{\overline{y}} = \frac{1}{2}\left[(Px^0, \overline{u}) + (P\overline{x}, u^0)\right],$$

$$\Delta^i\overline{x} = \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i,\ \Delta^i\overline{y} = \frac{1}{2}\left(Px^0(t_i), \Delta^i u^0\right)\bar{\xi}_i, \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$\overline{u} = \overline{v}\dot{u}^0,\ \overline{v} \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E}).$$

3.6 Квадратичная форма ω. Далее, следуя [3—9], определим квадратичную форму, ω, „знак“ которой на $\mathscr{K}$ связан с наличием или отсутствием экстремума в точке w^0. В [3—9] исследовалась каноническая задача

$$J(p) \to \min,\ \varkappa(p) \leqq 0, \quad K(p) = 0,\ p = (x_0, x_1) = \left(x(T_0), x(T_1)\right),$$
$$\dot{x} = f(w, t),\ g(w, t) = 0,\ G(w, t) \leqq 0,\ w = (x, u),\ (w, t) \in Q$$

на фиксированном отрезке $[T_0, T_1]$ (здесь x — фаза, u — управление, Q — открытое множество), и для неё в точке $w^0 = (x^0, u^0)$ для набора множителей Лагранжа, удовлетворяющих принципу максимума, была определена квадратичная форма от переменных $(\bar{\xi}, \overline{x}, \overline{u}) = \bar{z}$:

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\left[D_i(\overline{H})\,\bar{\xi}_i{}^2 - 2(\Delta^i\overline{H}_x)\,\overline{x}_m{}^i/\bar{\xi}_i\right] + \frac{1}{2}\left[(l''\overline{p}, \overline{p}) - \int (\overline{H}_{ww}\overline{w}, \overline{w})\,dt\right]$$

где

$$l = \alpha_0 J + (\alpha, \varkappa) + (\beta, K),$$
$$H = (\psi, f), \quad \overline{H} = H - (a, G) - (b, g),$$

$$\bar{x}_m{}^i = (\bar{x}_-{}^i + \bar{x}_+{}^i)/2,\ \bar{w} = (\bar{x}, \bar{u}),\ \bar{p} = \left(\bar{x}(T_0), \bar{x}(T_1)\right),$$
$$\Delta^i\bar{H}_x = \bar{H}^i_{x+} - \bar{H}^i_{x-} = \bar{H}_x\left(\psi(t_i), a_+{}^i, b_+{}^i, x^0(t_i), u_+{}^{0i}, t_i\right)$$
$$- \bar{H}_x\left(\psi(t_i), a_-{}^i, b_-{}^i, x^0(t_i), u_-{}^{0i}, t_i\right),$$
$$D_i(\bar{H}) = \bar{H}^i_{x+}\bar{H}^i_{\psi-} - \bar{H}^i_{x-}\bar{H}^i_{\psi+} + \Delta^i\bar{H}_t.$$

У нас (x, y) — фаза, u — управление, $H = \left(\psi + \frac{1}{2}Px, u\right)$, $\bar{H} = H - \left(a, G(u)\right)$. При этом $\bar{H}_y = 0$, поэтому $\bar{y}$ в форму не входит. Кроме того, у нас

$$l'' = 0,\ (\bar{H}_{ww}\bar{w}, \bar{w}) = (P\bar{x}, \bar{u}) - (aG''\bar{u}, \bar{u}),$$
$$D_i(\bar{H}) = \frac{1}{2}(P^*u_+{}^{0i}, u_-{}^{0i}) - \frac{1}{2}(P^*u_-{}^{0i}, u_+{}^{0i}) = (Pu_-{}^{0i}, u_+{}^{0i}),$$
$$\Delta^i\bar{H}_x = \frac{1}{2}P^*\Delta^iu^0 = -\frac{1}{2}P\,\Delta^iu^0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\left[(Pu_-{}^{0i}, u_+{}^{0i})\,\bar{\xi}_i{}^2 + (P\,\Delta^iu^0, \bar{x}_m{}^i)\,\bar{\xi}_i\right]$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\left[(P\bar{x}, \bar{u}) - (aG''\bar{u}, \bar{u})\right]dt.$$

Согласно результатам [3—9] и в силу предложения 3.2 имеет место

Теорема 3.1: *Если w^0 — точка θ-слабого максимума, то квадратичная форма ω неотрицательна на $\mathcal{K}$.*

Далее, мы преобразуем ω на $\mathcal{K}$ к наиболее простому виду.

3.7 Преобразование ω на $\mathcal{K}$. Поскольку ω не зависит от $\bar{y}$, то значения ω на $\mathcal{K}$ совпадают со значениями ω на подпространстве, определяемом условиями

$$\bar{\xi} \in \mathbb{R}^s,\quad \bar{x} \in (\mathrm{K}_\theta\mathrm{W}_2{}^1)^2,\quad \bar{x}(0) = \bar{x}(1),\quad \dot{\bar{x}} = \bar{u},$$
$$\Delta^i\bar{x} = \Delta^iu^0\bar{\xi}_i\quad (i = 1, \ldots, s),\ \bar{u} = \bar{v}\dot{u}^0,\ \bar{v} \in \mathrm{L}_2(\mathcal{E})$$

(условия, относящиеся к $\bar{y}$ мы опустили). На этом подпространстве имеем $(aG''\bar{u}, \bar{u}) = (aG''\dot{u}^0, \dot{u}^0)\,\bar{v}^2$. Преобразуем коэффициент при $\bar{v}^2$. Рассмотрим сначала интервал типа e. Имеем равенство (3.14), из которого вытекает, что на e

$$\dot{a}_iG_i' + a_iG_i''\dot{u}^0 = Pu^0. \tag{3.15}$$

Кроме того, $G_i(u^0) = 0$, откуда $G_i'\dot{u}^0 = 0$. Умножая (3.15) на $\dot{u}^0$, получаем $(a_iG_i''\dot{u}^0, \dot{u}^0) = (Pu^0, \dot{u}^0)$. Но $a_iG_i'' = aG''$. Следовательно, на e

$$(aG''\dot{u}^0, \dot{u}^0) = (Pu^0, \dot{u}^0). \tag{3.16}$$

На интервале типа e' равенство (3.16) также имеет место, поскольку там $\dot{u}^0 = 0$. Следовательно, (3.16) имеет место п.в. на $[0, 1]$. Отметим, что из условий $|\dot{u}^0| \geqq \mathrm{const} > 0$ на $\mathcal{E}$, $\sum a_i \geqq \varepsilon > 0$ и предположения б), пункт 3.1 следует, что на множестве $\mathcal{E}$

$$(Pu^0, \dot{u}^0) = (aG''\dot{u}^0, \dot{u}^0) \geqq \mathrm{const}' > 0. \tag{3.17}$$

Наконец, отметим, что (Pu_-^{0i}, u_+^{0i}) можно записать как $(Pu_m^{0i}, \Delta^i u^0)$, где $u_m^{0i} = \frac{1}{2}(u_-^{0i} + u_+^{0i})$.

Итак, мы приходим к задаче определения знака формы

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [(Pu_m^{0i}, \Delta^i u^0)\,\bar\xi_i^2 - (P\bar x_m^i, \Delta^i u^0)\,\bar\xi_i] + \frac{1}{2}\int_0^1 [(P\dot u^0, \dot u^0)\,\bar v^2 - (P\bar x, \dot u^0)\,\bar v]\,dt \tag{3.18}$$

на подпространстве $\mathbf{L}$ троек $\bar z = (\bar\xi, \bar x, \bar v)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} \bar\xi \in \mathbb{R}^s, \quad \bar x \in (\mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_2^1)^2, \quad \bar v \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E}), \\ \dot{\bar x} = \bar v \dot u^0, \quad \bar x(0) = \bar x(1), \quad \Delta^i \bar x = \Delta^i u^0 \bar\xi_i, \quad i = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{3.19}$$

При этом выполнено условие (3.17). Поскольку однообходная экстремаль доставляет абсолютный максимум в задаче, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1: *При $n = 1$ квадратичная форма ω неотрицательна на подпространстве $\mathbf{L}$.*

Далее мы покажем, что при $n > 1$ форма ω неотрицательной на $\mathbf{L}$ не является. При этом будут рассмотрены отдельно случаи непрерывного и разрывного управления u^0. Начнем с рассмотрения последнего случая.

3.8 Случай, когда компакт $\mathfrak{U}$ не является строго выпуклым. В этом случае на $\partial\mathfrak{U}$ имеется хотя бы один отрезок и, следовательно, для любой экстремали w^0 множество θ непусто. Пусть на $[0, 1]$ u^0 совершает $n > 1$ обходов $\partial\mathfrak{U}$. На одном обходе имеется $s_0 = s/n$ разрывов управления. Фиксируем точку $t_j \in \theta$, где $j \leqq s_0$, т.е. t_j — точка разрыва u^0 на первом обходе. Пусть на последнем обходе ей соответствует точка t_k, т.е. $t_k \in [(n-1)/n, 1]$, $k = (n-1)s_0 + j$. Тогда $u_-^{0j} = u_-^{0k}$, $u_+^{0j} = u_+^{0k}$. Положим

$$\bar\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i < j, \\ 1/2 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad j < i < k, \\ 1/2 & \text{при} \quad i = k, \\ 1 & \text{при} \quad i > k \end{cases} \quad \text{и} \quad \bar v = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t < t_j,\ t \in \mathscr{E}, \\ 0 & \text{при} \quad t_j < t < t_k, \\ 1 & \text{при} \quad t > t_k,\ t \in \mathscr{E}. \end{cases}$$

Далее, положим

$$\bar x = \begin{cases} u^0 & \text{при} \quad t < t_j, \\ u_-^{0j} + 1/2\,\Delta^j u^0 & \text{при} \quad t_j < t < t_k, \\ u^0 & \text{при} \quad t > t_k. \end{cases}$$

Тогда $\Delta^j \bar x = \frac{1}{2}\Delta^j u^0 = \frac{1}{2}\Delta^k u^0 = \Delta^k \bar x$. Очевидно, что $\bar z = (\bar\xi, \bar x, \bar v) \in \mathbf{L}$. Но нетрудно видеть, что на указанной вариации $\omega(\bar z) = -\frac{1}{2} S_j$, где $S_j = \frac{1}{2}(Pu_-^{0j}, u_+^{0j}) > 0$. Таким образом, доказана следующая

Лемма 3.1: *Пусть компакт $\mathfrak{U}$ не является строго выпуклым. Тогда при $n > 1$ квадратичная форма ω не является неотрицательной на подпространстве $\mathbf{L}$.*

Отсюда и из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2: *Если компакт* $\mathfrak{U}$ *не является строго выпуклым, то многообходная экстремаль* ($n > 1$) *не доставляет θ-слабого максимума в задаче* (1.1), (1.2).

Далее мы выпишем условия типа Якоби, относящиеся к задаче исследования знака ω на $\mathbf{L}$ при общих предположениях относительно U. Ими мы воспользуемся дважды: сначала для доказательства утверждения, аналогичного лемме 3.1, в случае строго выпуклого U, а затем для определения подпространства нулей ω на $\mathbf{L}$ при $n = 1$ в общем случае. Подпространство нулей нам понадобится для исследования остроты максимума в задаче для однообходной экстремали.

Замечание 3.1: Пусть имеется тройка $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in \mathbf{L}$ и имеется тройка $\bar{z}' = (\bar{\xi}, \bar{x}', \bar{v}) \in \mathbf{L}$, где $\bar{x}' = \bar{x} + \bar{c}$, $\bar{c} = \overrightarrow{\mathrm{const}} \in \mathbb{R}^2$. Элементарно проверяется, что тогда $\omega(\bar{z}) = \omega(\bar{z}')$. Следовательно, множество значений ω на подпространстве $\mathbf{L}$ совпадает с множеством значений ω на подпространстве

$$S = \{\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in \mathbf{L} \mid \bar{x}(0) = 0\}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу определения знака формы ω на подпространстве $\mathbf{S}$.

4. Условия типа Якоби

4.1 Уравнение Эйлера-Якоби. Пусть снова U — компакт, заданный каноническим образом (см. § 3), $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{co} U)$, w^0 — n-обходная экстремаль. Пусть $0 \leq \tau \leq 1$. Положим

$$\mathscr{E}_\tau = \mathscr{E} \cap [0, \tau], \quad \mathbf{L}_2(\mathscr{E}_\tau) = \{\bar{v} \in \mathbf{L}_2 \mid \bar{v}\chi(\mathscr{E}_\tau) = \bar{v}\},$$

$$\mathbf{S}(\tau) = \{\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in \mathbf{S} \mid \bar{v}\chi(\mathscr{E}_\tau) = \bar{v}\}.$$

Ниже мы будем использовать понятия, содержащиеся, например, в [1].

Определение 4.1: Будем говорить, что $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$ — *нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на* $[0, \tau]$ когда

а) $\bar{z} \in \mathbf{S}(\tau) \setminus \{0\}$,

б) $\bar{z}$ — стационарная точка задачи $\omega(z) \to \min$, $z \in \mathbf{S}(\tau)$, т.е. производная $\omega'(\bar{z})$ равна нулю на подпространстве $\mathbf{S}(\tau)$.

Ниже нас будет интересовать двойственный критерий того, что z является нетривиальным решением уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$. Его легко можно получить, используя результаты работы [10]. Однако мы выведем этот критерий непосредственно. Он состоит в следующем:

Лемма 4.1: *Набор* $\bar{z} \in \mathbf{S}(\tau) \setminus \{0\}$ *является нетривиальным решением уравнения Эйлера-Якоби тогда и только тогда, когда существует функция* $\bar{\psi} \in (\mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_2{}^1)^2$ *такая, что*

$$\dot{\bar{\psi}} = \frac{1}{2} P \dot{u}^0 \bar{v}, \tag{4.1}$$

$$\left(\bar{\psi} + \frac{1}{2} P \bar{x} - P u^0 \bar{v}, \dot{u}^0\right) = 0 \quad \text{на } \mathscr{E}_\tau, \tag{4.2}$$

$$\Delta^i\bar{\psi} = \frac{1}{2} P\, \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{4.3}$$

$$\left(\bar{\psi}_m{}^i + \frac{1}{2} P\bar{x}_m{}^i - Pu_m{}^{0i}\bar{\xi}_i, \Delta^i u^0\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, s. \tag{4.4}$$

Доказательство: Производная $\omega'(\bar{z})$ есть функционал, значение которого на произвольном элементе $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$, принадлежащем пространству $\mathbf{Z}_2 := \mathbb{R}^s \times (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1)^2 \times \mathbf{L}_2(\mathscr{E})$, вычисляется по формуле

$$\langle\omega'(\bar{z}), \bar{z}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [2\,(Pu_m{}^{0i}, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i\bar{\xi}_i - (P\bar{x}_m{}^i, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i - (P\bar{x}_m{}^i, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i]$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 [2(Pu^0, \dot{u}^0)\,\bar{v}\bar{v} - (P\bar{x}, \dot{u}^0)\, \bar{v} - (P\bar{x}, \dot{u}^0)\, \bar{v}]\, dt. \tag{4.5}$$

Далее, определим общий вид функционала, равного нулю на $\mathrm{S}(\tau)$. С этой целью рассмотрим линейный оператор A_τ, отображающий $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^s \times (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1)^2 \times \mathbf{L}_2(\mathscr{E}_\tau) =: \mathbf{Z}_2(\tau)$ в набор $(\dot{\bar{x}} - \bar{v}\dot{u}^0, \Delta^i\bar{x} - \Delta^i u^0\bar{\xi}_i, \bar{x}(0), \bar{x}(1))$, принадлежащий пространству $\mathbf{L}_2{}^2 \times \mathbb{R}^{2s} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Поскольку оператор $\bar{z} \in \mathbf{Z}_2(\tau) \mapsto (\dot{\bar{x}} - \bar{v}\dot{u}^0) \in \mathbf{L}_2{}^2$ сюрьективен, а оператор $\bar{z} \in \mathbf{Z}_2(\tau) \mapsto (\Delta^i\bar{x} - \Delta^i u^0\bar{\xi}_i, \bar{x}(0), \bar{x}(1))$ конечномерен, то оператор A_τ имеет замкнутый образ. Очевидно, $\mathrm{S}(\tau)$ есть ядро оператора A_τ. Следовательно, произвольный линейный функционал z^*, аннулирующийся на $\mathrm{S}(\tau)$, может быть представлен в виде

$$\langle z^*, \bar{z}\rangle = \int_0^1 (\bar{\psi}, \dot{\bar{x}} - \bar{v}\dot{u}^0)\, dt + \sum_{i=1}^{s} (\bar{d}_i, \Delta^i\bar{x} - \Delta^i u^0\bar{\xi}_i) + (\bar{c}_0, \bar{x}(0)) - (\bar{c}_1, \bar{x}(1)), \tag{4.6}$$

где

$$\bar{\psi} \in (\mathbf{L}_2)^2,\ \bar{d}_i \in \mathbf{R}^2 \quad (i = 1, \ldots, s),\ \bar{c}_0, \bar{c}_1 \in \mathbf{R}^2. \tag{4.7}$$

Таким образом, $\bar{z} \in \mathrm{S}(\tau) \setminus \{0\}$ есть нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$ тогда и только тогда, когда существует набор $\bar{\psi}, \bar{d}_i, \bar{c}_0, \bar{c}_1$, удовлетворяющий условиям (4.7), и такой, что $\langle\omega'(\bar{z}), \bar{z}\rangle + \langle z^*, \bar{z}\rangle = 0$ для всех $\bar{z} \in \mathbf{Z}_2(\tau)$, где $\omega'(\bar{z})$ и z^* вычисляются по формулам (4.5), (4.6) соответственно, т.е. для всех $\bar{z} \in \mathbf{Z}_2(\tau)$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [2(Pu_m{}^{0i}, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i\bar{\xi}_i - (P\bar{x}_m{}^i, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i - (P\bar{x}_m{}^i, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i]$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^1 [2(Pu^0, \dot{u}^0)\, \bar{v}\bar{v} - (P\bar{x}, \dot{u}^0)\, \bar{v} - (P\bar{x}, \dot{u}^0)\, \bar{v}]\, dt$$
$$+ \int_0^1 (\bar{\psi}, \dot{\bar{x}} - \bar{v}\dot{u}^0)\, dt + \sum_{i=1}^{s} (\bar{d}_i, \Delta^i\bar{x} - \Delta^i u^0\bar{\xi}_i) + (\bar{c}_0, \bar{x}(0)) + (\bar{c}_1, \bar{x}(1)) = 0. \tag{4.8}$$

Проанализируем это уравнение.

а) Положим в (4.8) $\bar{\xi}_i = 0, \bar{x} = 0$. Получим для всех $\bar{v} \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E}_\tau)$

$$\int_0^1 \left[(Pu^0, \dot{u}^0)\, \bar{v} - \frac{1}{2} (P\bar{x}, \dot{u}^0) - \bar{\psi}\dot{u}^0\right] \bar{v}\, dt = 0,$$

откуда следует, что $\left(Pu^0\bar{v} - \frac{1}{2} P\bar{x} - \bar{\psi}, \dot{u}^0\right) = 0$ на $\mathscr{E}_\tau$.

б) Далее, положим в (4.8) $\bar{\xi} = 0, \bar{v} = 0$. Получим для всех $\bar{x} \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1)^2$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} (P\bar{x}_m{}^i, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i - \frac{1}{2} \int_0^1 (P\bar{x}, \dot{u}^0)\, \bar{v}\, dt + \int_0^1 (\bar{\psi}, \dot{\bar{x}})\, dt + \sum_{i=1}^{s} (\bar{d}_i, \Delta^i\bar{x})$$
$$+ (\bar{c}_0, \bar{x}(0)) + (\bar{c}_1, \bar{x}(1)) = 0. \tag{4.9}$$

Предположим, что $\bar\psi \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$. Каким условиям должна удовлетворять функция $\bar\psi$ в этом случае? Поскольку

$$\int_0^1 (\bar\psi, \dot{\bar x})\,dt = (\bar\psi, \bar x)\,|_0^1 - \sum_{i=1}^{s} \Delta^i(\bar\psi, \bar x) - \int_0^1 (\dot{\bar\psi}, \bar x)\,dt,$$

$$\bar x_{\mathrm m}^i = \frac{1}{2}(\bar x_-^i + \bar x_+^i),\ \Delta^i\bar x = \bar x_+^i - \bar x_-^i,$$

то для всех $\bar x \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$

$$-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}(P(\bar x_-^i + \bar x_+^i), \Delta^i u^0)\,\bar\xi_i + \sum_{i=1}^{s}(\bar d_i, \bar x_+^i - \bar x_-^i)$$
$$+ (\bar c_0, \bar x(0)) + (\bar c_1, \bar x(1)) + (\bar\psi(1), \bar x(1)) - (\bar\psi(0), \bar x(0))$$
$$- \sum_{i=1}^{s}[(\bar\psi_+^i, \bar x_+^i) - (\bar\psi_-^i, \bar x_-^i)] + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}P\dot u^0\bar v - \dot{\bar\psi}, \bar x\right)dt = 0.$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что равен нулю подинтегральный множитель при $\bar x$, а также равны нулю коэффициенты при $\bar x_-^i$, $\bar x_+^i$ и $\bar x(0)$, $\bar x(1)$, т.е.

$$\dot{\bar\psi} = \frac{1}{2}P\dot u^0\bar v,$$

$$\frac{1}{4}P\Delta^i u^0\bar\xi_i - \bar d_i + \bar\psi_-^i = 0,\ i = 1, \ldots, s; \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{4}P\Delta^i u^0\bar\xi_i + \bar d_i - \bar\psi_+^i = 0,\ i = 1, \ldots, s; \tag{4.11}$$

$$\bar\psi(0) = \bar c_0,\ \bar\psi(1) = -\bar c_1. \tag{4.12}$$

Складывая (4.10) и (4.11), получаем $\frac{1}{2}P\Delta^i u^0\bar\xi_i = \Delta^i\bar\psi$, $i = 1, \ldots, s$. Вычитая (4.11) из (4.10) и деля на 2, получаем

$$\bar d_i = \bar\psi_{\mathrm m}^i,\ i = 1, \ldots, s. \tag{4.13}$$

Отметим теперь, что для данных $\bar c_0$, $\bar\xi$, $\bar v$ условия

$$\dot{\bar{\bar\psi}} = \frac{1}{2}P\dot u^0\bar v,\ \bar{\bar\psi}(0) = \bar c_0,\ \Delta^i\bar{\bar\psi} = \frac{1}{2}P\Delta^i u^0\bar\xi_i,\ i = 1, \ldots, s$$

однозначно определяют функцию $\bar{\bar\psi} \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$. Пусть $\bar{\bar\psi}$ найдена из этих условий, а $\bar\psi \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$ удовлетворяет уравнению (4.8). Тогда элементарно устанавливается, что $\bar\psi = \bar{\bar\psi}$. Следовательно, $\bar\psi \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$ и, значит, предшествующие преобразования были законны.

в) Наконец, положим в (4.8) $\bar x = 0$, $\bar v = 0$ и приравняем к нулю коэффициенты при $\bar\xi_i$. Получим

$$(Pu_{\mathrm m}^{0i}, \Delta^i u^0)\bar\xi_i - \frac{1}{2}(P\bar x_{\mathrm m}^i, \Delta^i u^0) - (\bar d_i, \Delta^i u^0) = 0. \tag{4.14}$$

Учитывая (4.13), отсюда получаем $\left(Pu_{\mathrm m}^{0i}\bar\xi_i - \frac{1}{2}P\bar x_{\mathrm m}^i - \bar\psi_{\mathrm m}^i, \Delta^i u^0\right) = 0.$

Итак, мы показали, что из уравнения (4.8) вытекает, что $\bar\psi \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$ и выполнены условия (4.1) — (4.4). Обратно, если $\bar\psi \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2^1)^2$ и выполнены условия (4.1)—(4.4), то, определив $\bar c_0$, $\bar c_1$ по (4.12), а $\bar d_i$ по (4.13), нетрудно проверить, что мы получаем уравнение (4.8) ∎

Отметим, что если $\bar{x} = 0$, то из условий $\dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}^0$, $\Delta^i\bar{x} = \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i$ следует, что $\bar{v} = 0$, $\bar{\xi}_i = 0$, т.е. набор $\bar{z}$ тривиален. Поэтому условие нетривиальности $\bar{z}$ равносильно условию $\bar{x} \neq 0$. Условие $\bar{z} \in \mathbf{S}(\tau) \setminus \{0\}$ совместно с условиями (4.1)—(4.4) будем называть *условиями Якоби на* $[0, \tau]$.

4.2 Анализ условий Якоби. Поскольку $\bar{\psi} = \dfrac{1}{2} P\dot{u}^0\bar{v} = \dfrac{1}{2} P\dot{\bar{x}}$, $\Delta^i\bar{\psi} = \dfrac{1}{2} P\Delta^i u^0\bar{\xi}_i = \dfrac{1}{2} P\Delta^i\bar{x}$, то $d\left(\bar{\psi} + \dfrac{1}{2} P\bar{x}\right)\Big/dt = d(P\bar{x})/dt$, $\Delta^i\left(\bar{\psi} + \dfrac{1}{2} P\bar{x}\right) = \Delta^i P\bar{x}$. Следовательно, существует вектор $\bar{c} \in \mathbb{R}^2$ такой, что $\bar{\psi} + \dfrac{1}{2} P\bar{x} = P(\bar{x} + \bar{c})$. Полагая в условиях Якоби $\bar{\zeta} = \bar{x} + \bar{c}$ и переходя от переменных $\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}, \bar{\psi}$ к переменным $\bar{\zeta}, \bar{v}$, получаем следующую лемму.

Лемма 4.2: *Если $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$ — нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$, то существует функция $\bar{\zeta} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ такая, что $\bar{x} = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}(0)$, а пара $(\bar{\zeta}, \bar{v})$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\bar{\zeta} \in (\mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_2{}^1)^2, \ \bar{\zeta} \neq \overrightarrow{\mathrm{const}}, \ \bar{v} \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E}_\tau), \tag{4.15}$$

$$\dot{\bar{\zeta}} = \bar{v}\dot{u}^0, \tag{4.16}$$

$$(P\bar{\zeta} - \bar{v}Pu^0, \dot{u}^0) = 0 \quad \text{на} \quad \mathscr{E}_\tau, \tag{4.17}$$

$$(P\Delta^i\bar{\zeta}, \Delta^i u^0) = 0, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{4.18}$$

$$\Delta^i(P\bar{\zeta}, u^0) = 0, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{4.19}$$

$$\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(1). \tag{4.20}$$

Эта лемма вытекает из предыдущей почти очевидным образом. Покажем лишь как условие (4.19) вытекает из условия (4.4) и условия $\Delta^i\bar{x} = \Delta^i u^0\bar{\xi}_i$. Поскольку $\bar{\psi} + \dfrac{1}{2} P\bar{x} = P\bar{\zeta}$, то (4.4) можно переписать в виде $\left(P(\zeta_{\mathrm{m}}{}^i - u_{\mathrm{m}}{}^{0i}\bar{\xi}_i), \Delta^i u^0\right) = 0$. Учитывая, что $\Delta^i u^0\bar{\xi}_i = \Delta^i\bar{x} = \Delta^i\bar{\zeta}$, отсюда получаем $(P\bar{\zeta}_{\mathrm{m}}{}^i, \Delta^i u^0) + (P\Delta^i\bar{\zeta}, u_{\mathrm{m}}{}^{0i}) = 0$. Подставляя сюда выражения $\bar{\zeta}_{\mathrm{m}}{}^i = \bar{\zeta}_+{}^i - \dfrac{1}{2}\Delta^i\bar{\zeta}$, $u_{\mathrm{m}}{}^{0i} = u_-{}^{0i} + \dfrac{1}{2}\Delta^i u^0$ и учитывая (4.18), получаем $(P\bar{\zeta}_+{}^i, \Delta^i u^0) + (P\Delta^i\bar{\zeta}, u_-{}^{0i}) = 0$, откуда вытекает (4.19) ∎

Далее, напомним, что $\dot{\eta} = Pu^0$, где $\eta \in \alpha\partial U^0$ и $(\eta, u^0) = \alpha$. Из уравнений $\dot{\eta} = Pu^0$, $\dot{x}^0 = u^0$ следует, что $\eta = P(x^0 + c_x)$, где $c_x = \overrightarrow{\mathrm{const}} \in \mathbb{R}^2$. Положим $\zeta^0 = x^0 + c_x$. Тогда $\eta = P\zeta^0$, $(P\zeta^0, \dot{u}^0) = \alpha$, $\dot{\zeta}^0 = u^0$. Покажем, что

$$\dot{u}^0 = -\varrho\zeta^0, \qquad \text{где} \quad \varrho = 1/\alpha(Pu^0, \dot{u}^0) \geqq \mathrm{const} > 0 \quad \text{на} \quad \mathscr{E}.$$

Действительно, дифференцируя равенство $(P\zeta^0, u^0) = \alpha$ и учитывая, что $\dot{\zeta}^0 = u^0$, получаем $(P\zeta^0, \dot{u}^0) = \alpha$, откуда следует существование функции ϱ такой, что $\dot{u}^0 = -\varrho\zeta^0$. Умножая это равенство на Pu^0 слева, получаем $(Pu^0, \dot{u}^0) = -\varrho(Pu^0, \zeta^0) = \varrho(P\zeta^0, u^0) = \alpha\varrho$. Но в силу (3.17) $(Pu^0, \dot{u}^0) \geqq \mathrm{const} > 0$ на $\mathscr{E}$. Следовательно, $\varrho = (Pu^0, \dot{u}^0)/\alpha \geqq \mathrm{const}' > 0$ на $\mathscr{E}$.

Пусть пара $(\bar{\zeta}, \bar{v})$ удовлетворяет условиям (4.15)—(4.20) и $\bar{\zeta} \neq \overrightarrow{\mathrm{const}} \in \mathbb{R}^2$. Поскольку $\dot{u}^0 = -\varrho\zeta^0$, то равенство (4.17) равносильно следующему:

$$\left(P(\bar{\zeta} - \bar{v}u^0), \zeta^0\right) = 0 \quad \text{на} \quad \mathscr{E}_\tau. \tag{4.21}$$

Представим $\bar\zeta$ на [0, 1] в виде

$$\bar\zeta = \bar\mu\zeta^0 + \bar\nu u^0, \tag{4.22}$$

где $\bar\mu$, $\bar\nu$ — некоторые функции. Поскольку $(P\zeta^0, u^0) = \alpha \neq 0$, то такое представление существует и единственно. Из (4.21), (4.22) вытекает, что

$$\bar\nu = \bar v \quad \text{на } \mathscr{E}_\tau. \tag{4.23}$$

Действительно, из (4.21) получаем $(P\zeta^0, \bar\zeta) = \bar v(P\zeta^0, u^0) = \alpha\bar v$ на $\mathscr{E}_\tau$. Умножая (4.22) слева на $P\zeta^0$, получаем

$$(P\zeta^0, \bar\zeta) = \alpha\bar\nu. \tag{4.24}$$

Следовательно, имеет место равенство (4.23).

Далее, установим свойства гладкости коэффициентов $\bar\mu, \bar\nu$. Из (4.24) вытекает, что $\bar\nu \in \mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1$, поскольку $\zeta^0 \in (\mathbf{W}^1_\infty)^2$, $\bar\zeta \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1)^2$. Далее, умножая (4.22) на $P\dot u^0$, получаем

$$(P\zeta^0, u^0) = \alpha\bar\mu. \tag{4.25}$$

Но $u^0 \in (\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}^1_\infty)^2$, где $\mathbf{K}_\theta\mathbf{W}^1_\infty$ — пространство кусочно-липшицевых функций, все точки разрыва которых принадлежат θ. Следовательно, $\bar\mu \in \mathbf{K}_\theta\mathbf{W}_2{}^1$. Покажем теперь, что $\bar\mu, \bar\nu$ — непрерывны на [0, 1]. Действительно, из (4.19), (4.25) следует, что $\Delta^i\bar\mu = 0$, $i = 1, \ldots, s$, т.е. $\bar\mu$ — непрерывна. Тогда из (4.22) вытекает, что $\Delta^i\bar\zeta = \Delta^i(\bar\nu u^0) = (\nu^i + \Delta^i\bar\nu)(u_-{}^{0i} + \Delta^i u^0) - \bar\nu_-{}^i u_-{}^{0i} = \bar\nu_-{}^i \Delta^i u^0 + \Delta^i\bar\nu u_+{}^{0i}$. Отсюда и из (4.18) получаем

$$0 = (P\Delta^i\bar\zeta, \Delta^i u^0) = \Delta^i\bar\nu(Pu_+{}^{0i}, \Delta^i u^0) = \Delta^i\bar\nu(Pu_-{}^{0i}, u_+{}^{0i}).$$

Поскольку $(Pu_-{}^{0i}, u_+{}^{0i}) \neq 0$, то отсюда получаем, что $\Delta^i\bar\nu = 0$, т.е. $\bar\nu$ — непрерывна. Следовательно, $\bar\mu, \bar\nu \in \mathbf{W}_2{}^1$.

Дифференцируя равенство (4.22) и учитывая (4.16), получаем $\bar v\dot u^0 = \dot{\bar\zeta} = \bar\mu\zeta^0 + \bar\mu u^0 + \dot{\bar\nu} u^0 + \bar\nu\dot u^0$. Но $\dot u^0 = -\varrho\zeta^0$. Следовательно, $[\dot{\bar\mu} + \varrho(\bar v - \bar\nu)]\zeta^0 + (\bar\mu + \dot{\bar\nu})u^0 = 0$. Поскольку $(P\zeta^0, u^0) = \alpha \neq 0$, то отсюда получаем $\dot{\bar\mu} + \varrho(\bar v - \bar\nu) = 0$, $\bar\mu + \dot{\bar\nu} = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\bar\nu \in \mathbf{W}^2_\infty$. Далее, $\varrho(\bar v - \bar\nu) = 0$ п.в. на $[0, \tau]$, поскольку $\bar v = \bar\nu$ на $\mathscr{E}_\tau$ и $\varrho\chi(\mathscr{E}') = 0$. Кроме того, $\bar v = 0$ на $(\tau, 1]$, поскольку $\bar v\chi(\mathscr{E}_\tau) = \bar v$. Следовательно,

$$\ddot{\bar\nu} = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau], \\ -\varrho\bar\nu, & t \in (\tau, 1]. \end{cases} \tag{4.26}$$

Поскольку $\zeta^0(0) = \zeta^0(1)$, $u^0(0) = u^0(1)$, $\bar\zeta(0) = \bar\zeta(1)$, то из (4.24), (4.25) следует, что

$$\bar\nu(0) = \bar\nu(1), \quad \dot{\bar\nu}(0) = \dot{\bar\nu}(1). \tag{4.27}$$

Таким образом,

$$\bar\zeta = -\dot{\bar\nu}\zeta^0 + \bar\nu u^0, \tag{4.28}$$

где $\bar\nu \in \mathbf{W}^2_\infty$ удовлетворяет уравнению (4.26) и граничным условиям (4.27). Отметим ещё, что из условий $\bar\nu = \bar v$ на $\mathscr{E}_\tau$, $\bar v\chi(\mathscr{E}_\tau) = \bar v$ следует, что

$$\bar v = \bar\nu\chi(\mathscr{E}_\tau). \tag{4.29}$$

Наконец, из условия нетривиальности $\bar\zeta \not\equiv \overrightarrow{\text{const}}$ в силу (4.28) вытекает, что $\bar\nu \not\equiv 0$.

Итак, мы показали, что для любой пары $(\bar\zeta, \bar v)$, удовлетворяющей условиям (4.15)—(4.20) и условию нетривиальности $\bar\zeta \not\equiv \overrightarrow{\text{const}}$, существует нетривиальное решение $\bar{v} \in W^2_\infty$ краевой задачи (4.26), (4.27) такое, что справедливы равенства (4.28), (4.29). Отметим ещё, что в силу (4.28) $\Delta^i\bar{\zeta} = \bar{v}(t_i{}^*)\,\Delta^i u^0$.

Из сказанного выше и леммы 4.2 вытекает следующая

Лемма 4.3: *Если $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$ — нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$, то существует нетривиальное решение $\bar{v} \in W^2_\infty$ краевой задачи* (4.26), (4.27) *такое, что имеют место равенства*

$$\begin{aligned} &\bar{\xi}_i = \bar{v}(t_i), \quad i = 1, \ldots, s, \ \bar{v} = \bar{v}\chi(\mathscr{E}_\tau), \\ &\bar{x} = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}(0), \quad \text{где} \quad \bar{\zeta} = -\dot{\bar{v}}\zeta^0 + \bar{v}u^0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Установим теперь справедливость обратного утверждения.

Лемма 4.4: *Пусть $\bar{v} \in W^2_\infty$ — нетривиальное решение краевой задачи* (4.26), (4.27). *Тогда условия* (4.30) *определяют нетривиальное решение $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$ уравнения Эйлера-Якоби на* $[0, \tau]$.

Доказательство: Покажем сначала, что набор $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$, определенный (4.30), принадлежит подпространству $S(\tau)$. Из (4.30) следует, что $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^s$, $\bar{x} \in K_\theta W^1_\infty$, $\bar{v} \in L_\infty(\mathscr{E}_\tau)$ (т.е. $\bar{v} \in L_\infty$, $\bar{v}\chi(\mathscr{E}_\tau) = \bar{v}$). Далее, поскольку $\dot{\zeta}^0 = u^0$, то $\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{\zeta}} = -\ddot{\bar{v}}\zeta^0 - \dot{\bar{v}}u^0 + \dot{\bar{v}}u^0 + \bar{v}\dot{u}^0 = -\ddot{\bar{v}}\zeta^0 + \bar{v}\dot{u}^0$. П.в. на $[0, \tau]$ имеем $\bar{v}\dot{u}^0 = \bar{v}\chi(\mathscr{E}_\tau)\,\dot{u}^0 = \bar{v}\dot{u}^0$, $\ddot{\bar{v}} = 0$. Следовательно, $\dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}^0$ п.в. на $[0, \tau]$. Далее, п.в. на $(\tau, 1]$ имеем $\ddot{\bar{v}} = -\varrho\bar{v}$ и, следовательно, $\dot{\bar{x}} = \varrho\bar{v}\zeta^0 + \bar{v}\dot{u}^0 = 0$ на $(\tau, 1]$ (поскольку $\dot{u}^0 = -\varrho\zeta^0$). Но $\bar{v} = 0$ на $(\tau, 1]$. Следовательно, равенство $\dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}^0$ имеет место п.в. на $[0, 1]$. Т.к. $\bar{v}(0) = \bar{v}(1)$, $\dot{\bar{v}}(0) = \dot{\bar{v}}(1)$, $u^0(0) = u^0(1)$, $\zeta^0(0) = \zeta^0(1)$, то $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(1)$ и, следовательно, $\bar{x}(0) = \bar{x}(1) = 0$. Наконец, $\Delta^i\bar{x} = \Delta^i\bar{\zeta} = \Delta^i(\bar{v}u^0) = \bar{v}(t_i)\,\Delta^i u^0 = \bar{\xi}_i\Delta^i u^0$. Следовательно, $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in S(\tau)$.

Теперь воспользуемся леммой 4.1. Положим $\bar{\psi} = \dfrac{1}{2}P(\bar{x} + 2\bar{c})$, где $\bar{c} = \bar{\zeta}(0)$, и покажем, что условия (4.1)—(4.4) леммы 4.1 выполнены. Действительно, $\dot{\bar{\psi}} = \dfrac{1}{2}P\dot{\bar{x}} = \dfrac{1}{2}P\dot{u}^0\bar{v}$, т.е. выполнено условие (4.1). Отметим, что $\bar{\psi} + \dfrac{1}{2}P\bar{x} = P(\bar{x} + \bar{c}) = P\bar{\zeta}$. Проверим условие (4.2). Поскольку на $\mathscr{E}_\tau$ имеем $\bar{\psi} + \dfrac{1}{2}P\bar{x} - Pu^0\bar{v} = P\bar{\zeta} - Pu^0\bar{v} = P(-\dot{\bar{v}}\zeta^0)$, то $\left(\bar{\psi} + \dfrac{1}{2}P\bar{x} - Pu^0\bar{v},\, \dot{u}^0\right) = -\dot{\bar{v}}(P\zeta^0, \dot{u}^0) = 0$ на $\mathscr{E}_\tau$. Далее, $\Delta^i\bar{\psi} = \dfrac{1}{2}P\Delta^i\bar{x} = \dfrac{1}{2}P\Delta^i u^0\bar{\xi}_i$, т.е. имеет место условие (4.3). Наконец, проверим условие (4.4). Имеем

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}_m{}^i + 1/2P\bar{x}_m{}^i - Pu_m{}^{0i}\bar{\xi}_i = P\bar{\zeta}_m{}^i - Pu_m{}^{0i}\bar{\xi}_i \\ &= P\big(-\dot{\bar{v}}(t_i)\,\zeta^0(t_i) + \bar{v}(t_i)\,u_m{}^{0i} - u_m{}^{0i}\bar{\xi}_i\big) = -\dot{\bar{v}}(t_i)\,P\zeta^0(t_i). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\psi_m{}^i + 1/2P\bar{x}_m{}^i - Pu_m{}^{0i}\bar{\xi}_i, \Delta^i u^0) = -\dot{\bar{v}}(t_i)\,\big(P\zeta^0(t_i), u_+{}^{0i} - u_-{}^{0i}\big) = 0,$$

поскольку $(P\zeta^0, u^0) = \alpha$ п.в. на $[0, 1]$.

Итак, все условия (4.1)—(4.4) выполнены. Тогда согласно лемме 4.1 $\bar{z}$ — нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$ ∎

Лемма 4.5: *Пусть $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau > 0$. Тогда различным нетривиальным решениям $\bar{v} \in W^2_\infty$ краевой задачи* (4.26), (4.27) *формулы* (4.30) *сопоставляют различные тройки $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in S(\tau)$.*

Доказательство: Пусть $\bar v_1, \bar v_2 \in W^2_\infty$ — два решения краевой задачи (4.26), (4.27), каждому из которых формулы (4.30) сопоставляют одну и ту же тройку $\bar z = (\bar\xi, \bar x, \bar v)$. Положим $\delta\bar v = \bar v_2 - \bar v_1$. Покажем, что $\delta\bar v = 0$. Действительно, $\delta\bar v$ удовлетворяет условиям краевой задачи (4.26), (4.27). Далее, пусть $\delta\bar\zeta = -\delta\dot{\bar v}\zeta^0 + \delta\bar v u^0$. Поскольку $\delta\bar x = 0$, то $\delta\bar\zeta = \overrightarrow{\text{const}}$ и, значит, $\delta\dot{\bar\zeta} = 0$. Но $\delta\dot{\bar\zeta} = -\delta\ddot{\bar v}\zeta^0 + \delta\bar v\dot u^0$ и $\delta\ddot{\bar v} = 0$ на $[0, \tau]$. Следовательно, $\delta\bar v\dot u^0 = 0$ на $[0, \tau]$, откуда $\delta\bar v = 0$ на $\mathscr{E}_\tau$. Из условий $\delta\bar v \in W^2_\infty$, $\delta\bar v = 0$ на $\mathscr{E}_\tau$, $\delta\ddot{\bar v} = 0$ на $[0, \tau]$, $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau > 0$ следует, что $\delta\bar v = 0$ на $[0, \tau]$. Но тогда $\delta\bar v$ — тривиальное решение краевой задачи (4.26), (4.27) ∎

Из лемм 4.3—4.5 вытекает

Теорема 4.1: *Пусть $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau > 0$. Тогда формулы (4.30) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между всеми нетривиальными решениями $\bar v \in W^2_\infty$ краевой задачи (4.30) и всеми нетривиальными решениями $\bar z = (\bar\xi, \bar x, \bar v)$ уравнения Эйлера-якоби на $[0, \tau]$.*

Следующая теорема, легко вытекающая из теоремы 4.1, удобна для указания конкретного нетривиального решения уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$.

Теорема 4.2: *Пусть $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau > 0$. Пусть функция $\bar\zeta \in K_\theta W^1_\infty$ такова, что $\bar\zeta(0) = \bar\zeta(1)$, $\dot{\bar\zeta} = 0$ п.в. на $(\tau, 1]$ и коэффициенты $\bar\mu$, $\bar v$ представления $\bar\zeta = \bar\mu\zeta^0 + \bar v u^0$, однозначно определяемые по формулам (4.24), (4.25), непрерывны (а, значит, и липшицевы) на $[0, 1]$, а на $[0, \tau]$ удовлетворяют условиям $-\dot{\bar v} = \bar\mu = \text{const}$, $\bar v \not\equiv 0$. Тогда равенства*

$$\bar x = \bar\zeta - \bar\zeta(0),\ \bar v = \bar v\chi(\mathscr{E}_\tau),\ \bar\xi_i = \bar v(t_i),\quad i = 1, \ldots, s$$

определяют нетривиальное решение $\bar z = (\bar\xi, \bar x, \bar v)$ уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$.

Доказательство: Имеем

$$\dot{\bar\zeta} = \dot{\bar\mu}\zeta^0 + \bar\mu u^0 + \dot{\bar v}u^0 - \varrho\bar v\zeta^0. \tag{4.31}$$

Из условия $\dot{\bar\zeta} = 0$ на $(\tau, 1]$ следует, что $\bar\mu = -\dot{\bar v}$ на $(\tau, 1]$. Следовательно, $\ddot{\bar v} = -\varrho\bar v$ на $(\tau, 1]$, $\bar\mu = -\dot{\bar v}$ на $[0, 1]$. Из последнего равенства и условия $\bar\mu \in W^1_\infty$ вытекает, что $\bar v \in W^2_\infty$. Из условия $-\dot{\bar v} = \bar\mu = \text{const}$ на $[0, \tau]$ вытекает, что $\ddot{\bar v} = 0$ на $[0, \tau]$. Значит, $\bar v \in W^2_\infty$ удовлетворяет уравнению (4.26). Из условий $\bar\zeta(0) = \bar\zeta(1)$, $\zeta^0(0) = \zeta^0(1)$, $u^0(0) = u^0(1)$, $\bar\mu = -\dot{\bar v}$ вытекают условия (4.27). Наконец, условие $\bar v \not\equiv 0$ на $[0, \tau]$ гарантирует нетривиальность $\bar v$. Итак, $\bar v$ — нетривиальное решение краевой задачи (4.26), (4.27) и $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau > 0$. Остается применить теорему 4.1 ∎

4.3 Непродолжимость нетривиального решения уравнения Эйлера-Якоби. Пусть $0 < \tau < \tau' \leqq 1$ и пусть $\bar z$ — нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$. Говорят, что *решение $\bar z$ можно продолжить с $[0, \tau]$ на $[0, \tau']$, если $\bar z$ является нетривиальным решением* уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau']$. Из теоремы 4.1 очевидным образом вытекает

Следствие 4.1: *Пусть $0 < \operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau < \operatorname{mes}\mathscr{E}$. Тогда никакое нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, \tau]$ не продолжимо с $[0, \tau]$ на $[0, \tau']$.*

Отсюда вытекает

Лемма 4.6: *Пусть $0 < \operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau < \operatorname{mes}\mathscr{E}$. Пусть на $[0, \tau]$ имеется нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби. Тогда ω не является неотрицательной на $\mathbf{S}$.*

Действительно, пусть на $[0, \tau]$ имеется нетривиальное решение $\bar{z}$ уравнения Эйлера-Якоби. Тогда $\bar{z} \in \mathrm{S}(\tau) \setminus \{0\}$ и $\omega'(\bar{z}) = 0$ на $\mathrm{S}(\tau)$. В частности, $\langle \omega'(\bar{z}), \bar{z} \rangle = 0$, откуда следует, что $\omega(\bar{z}) = 0$. Если предположить, что при этом $\omega \geqq 0$ на S, то $\bar{z}$ — точка минимума ω на S. Тогда $\bar{z}$ — нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби на $[0, 1]$. Но это противоречит следствию 4.1 о непродолжимости нетривиального решения с $[0, \tau]$ на $[0, 1]$. Значит, ω не является неотрицательной на S ∎

5. Основные результаты

5.1 Случай $n > 1$: отсутствие θ-слабого максимума. Пользуясь теоремой 4.2 и леммой 4.6, докажем, что и в случае строго выпуклого $\mathfrak{U}$ для экстремали с числом обходов $n > 1$ форма ω не является неотрицательной на подпространстве S.

Итак, пусть $\mathfrak{U} = U$ — строго выпуклый компакт, w^0 экстремаль с $n > 1$. В этом случае u^0 — непрерывная, а, значит, и липшицева функция. Положим

$$\tau = \frac{1}{n}, \ \bar{\zeta}(t) = \begin{cases} u^0(t), \ t \leqq \tau, \\ u^0(\tau), \ t > \tau, \end{cases}$$

и пусть $\bar{\nu} = 1$, $\bar{\mu} = 0$ на $[0, \tau]$. Очевидно, все условия теоремы 4.2 выполнены. Следовательно, на $[0, \tau]$ имеется нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби и при этом $0 < \operatorname{mes} \mathscr{E}_\tau < \operatorname{mes} \mathscr{E}$. Тогда по лемме 4.6 ω не является неотрицательной на подпространстве S. Сопоставляя это результат с леммой 3.1, получаем, что имеет место

Теорема 5.1: *Пусть U — компакт, заданный каноническим образом, и $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{co} U)$. Тогда для любой экстремали с числом обходов $n > 1$ квадратичная форма ω не является неотрицательной на подпространстве* S.

Из теоремы 5.1 и предложения 3.2 в силу следствия 1 из [8: гл. I, § 3] (или утверждения A′ в [5], или в силу [6]) вытекает

Теорема 5.2: *Пусть U — компакт, заданный каноническим образом, и $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{co} U)$. Тогда любая экстремаль с числом обходов $n > 1$ не доставляет θ-слабого максимума в задаче* (1.1), (1.2).

Наконец, займемся наиболее интересным и нетривиальным вопросом — об остроте максимума для экстремали с $n = 1$.

5.2 Случай $n = 1$: острота максимума. Пусть U — произвольный канонически заданный компакт, $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{co} U)$, и пусть w^0 — экстремаль с $n = 1$. Для неё, как мы знаем из § 2, ω неотрицательна на S. Однако положительно определенной ω на S не является, что связано с нестрогостью максимума в точке w^0. Ниже мы опишем подпространство нулей ω на S и добавим два таких ограничения к задаче, что w^0 станет точкой строгого максимума, а ω окажется положительно определена на критическом подпространстве. Это позволит затем воспользоваться достаточными условиями высшего порядка из [3—9] и определить с их помощью остроту максимума в задаче.

Итак, опишем сначала подпространство нулей ω на S. Поскольку ω неотрицательна на S, то нетривиальные решения уравнения Эйлера-Якоби на $[0, 1]$ и только они являются нетривиальными нулями ω на S. Согласно теореме 4.1 нетривиальным решениям уравнения Эйлера-Якоби на $[0, 1]$ взаимно-однозначно соответствуют нетривиальные решения краевой задачи

$$\ddot{\bar{v}} = 0,\ \bar{v}(0) = \bar{v}(1),\ \dot{\bar{v}}(0) = \dot{\bar{v}}(1),\ \bar{v} \in W^2_\infty.$$

Очевидно, константы и только они удовлетворяют этим условиям. Тогда по теореме 4.1 нули ω на S представляют собой одномерное подпространство N, состоящее из $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$ таких, что

$$\bar{x} = \bar{v}\big(u^0 - u^0(0)\big),\quad \bar{v} = \mathrm{const},\quad \bar{\xi}_i = \bar{v},\quad i = 1, \ldots, s. \tag{5.1}$$

Для экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$ положим $b = x^0(0)$, $r^0 = \int\limits_0^1 (x^0 - b)\,dt$. Очевидно, r^0 есть центр тяжести кривой $x^0 - x^0(0)$. Пусть $q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ — произвольный вектор, ортогональный к r^0: $(q, r^0) = 0$. Добавим к ограничениям задачи (1.1), (1.2) следующие два ограничения:

$$x(0) = b,\qquad \int\limits_0^1 (q, x - b)\,dt = 0. \tag{5.2}$$

Согласно выбору векторов b, q экстремаль w^0 этим ограничениям удовлетворяет. Как мы увидим ниже, максимум при этих дополнительных ограничениях в точке w^0 становится строгим.

Отметим, что $\big(q, u^0(0)\big) \neq 0$. Действительно, если это не так, то вектор $u^0(0)$ коллинеарен вектору r^0. Но это невозможно, поскольку центр тяжести кривой, ограничивающей выпуклое множество с непустой внутренностью, не может находиться на касательной к этой кривой.

Далее, отметим, что экстремаль w^0 „старой" задачи (1.1), (1.2) является экстремалью и „новой" задачи (1.1), (1.2), (5.2), причем, в новой задаче для w^0 в принципе максимума множитель при ограничении $\int (q, x - b)\,dt = 0$ равен нулю, а остальные компоненты принципа максимума — те же, что и в задаче (1.1), (1.2). Для такого набора компонент принципа максимума в новой задаче квадратичная форма ω остается прежней, поскольку ограничения (5.2) линейны, в определении же подпространства L появляются два дополнительных условия: $\bar{x}(0) = 0$, $\int\limits_0^1 (q, \bar{x})\,dt = 0$, причем, первое из этих условий уже учтено в определении подпространства S. Таким образом, в новой задаче квадратичную форму ω следует рассматривать на подпространстве S_1 векторов $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$, удовлетворяющих условиям:

$$\bar{\xi} \in \mathbb{R}^s,\ \bar{x} \in (K_\theta W_2{}^1)^2,\ \bar{v} \in L_2(\mathscr{E}), \tag{5.3}$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}^0,\ \bar{x}(0) = \bar{x}(1) = 0,\ \Delta^i\bar{x} = \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i,\qquad i = 1, \ldots, s, \tag{5.4}$$

$$\int\limits_0^1 (q, \bar{x})\,dt = 0. \tag{5.5}$$

Напомним, что условия (5.3), (5.4) определяют подпространство S, на котором ω неотрицательна.

Покажем, что квадратичная форма ω положительно определена на подпространстве S_1. Поскольку выполнено усиленное условие Лежандра (3.17), то достаточно показать, что ω положительна на $S_1 \setminus \{0\}$. Для этого в свою очередь достаточно показать, что гиперплоскость (5.5) пересекается с подпространством N нулей ω на S по нулю. Действительно, из условий (5.1), (5.5) вытекает, что

$\bar{v}\int_0^1 \big(q, u^0 - u^0(0)\big)\,dt = 0$. Но $\int_0^1 u^0\,dt = 0$. Следовательно, $\bar{v}\big(q, u^0(0)\big) = 0$. Поскольку $\big(q, u^0(0)\big) \neq 0$, то $\bar{v} = 0$.

Итак, доказана

Теорема 5.3: *Пусть U — компакт, заданный каноническим образом, $0 \in \operatorname{int} \times (\operatorname{co} U)$. Пусть w^0 — однообходная экстремаль. Тогда квадратичная форма ω положительно определена на подпространстве S_1.*

Эта теорема означает, что выполнено достаточное условие высшего порядка для сильного максимума (см. [3] или [7]) в задаче (1.1), (1.2), (5.2) в точке w^0. Более того, согласно [3, 7] указанное достаточное условие гарантирует определенную остроту максимума в точке w^0. Эта острота определяется с помощью функционала $\gamma(\delta w)$ в пространстве W, который одновременно является высшим порядком в смысле [2], связанным с выписанными здесь необходимыми и достаточными условиями.

Следуя [3—9], для $\delta w = (\delta x, \delta u) \in \mathrm{W}$ положим

$$\gamma(\delta w) = \|\delta x\|_c^2 + \int_0^1 \Gamma(u^0 + \delta u, t)\,dt$$

где функция $\Gamma = \Gamma(u, t)$ определяется следующим образом. Пусть $V_i \subset Q \times \mathbb{R}^1$ — непересекающиеся ограниченные окрестности множеств $\overline{u^{0i}}$ (где $\overline{u^{0i}}$ — замыкание в $\mathbb{R}^3$ графика сужения u^0 на интервал (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, s+1$, $t_0 = 0$, $t_{s+1} = 1$, см. пункт 3.2). Пусть V есть объединение V_i по $i = 1, \ldots, s+1$. Тогда $\Gamma\colon Q \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\Gamma(u, t) = \begin{cases} |u - u^0(t)|^2, & \text{если} \quad (u, t) \in V_i,\ t \in (t_{i-1}, t_i), \\ |u - u^0(t_i - 0)|^2 + |t - t_i|, & \text{если} \quad (u, t) \in V_i,\ t > t_i, \\ |u - u^0(t_i + 0)|^2 + |t - t_i|, & \text{если} \quad (u, t) \in V_{i+1},\ t < t_i \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, s)$ и $\Gamma(u, t) > 0$, если $(u, t) \in (Q \times [0, 1]) \setminus V$.

Определение 5.1: Следуя [3—9], будем говорить, что точка w^0 доставляет *сильный γ-максимум* в задаче (1.1), (1.2), (5.2), если существуют $C > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любой пары $w = (x, u) \in \mathrm{W}$, удовлетворяющей ограничениям (1.2), (5.2) и условию $\|x - x^0\|_\infty < \varepsilon$ выполняется неравенство

$$(Jw^0) - J(w) \geqq C\gamma(w - w^0), \quad \text{где} \quad J(w) = \frac{1}{2}\int_0^1 (Px, u)\,dt.$$

Остроту максимума в точке w^0 мы понимаем в смысле данного выше определения.

В силу теоремы 5 из [3] (см. также [7]) из теоремы 5.1 и предложения 3.3 вытекает следующая

Теорема 5.4: *Пусть U — компакт, заданный каноническим образом, $0 \in \operatorname{int} (\operatorname{co} U)$. Тогда однообходная экстремаль w^0 доставляет сильный γ-максимум в задаче* (1.1), (1.2), (5.2).

Отметим, что в теореме 5 из [3] требуется ещё, чтобы набор множителей, удовлетворяющих принципу максимума, был „C-лежандровым" при некотором $C > 0$, но это условие, очевидно, выполнено, что легко следует из предположения б) пункта 3.1, предложения3. 3, а также из условий $D_i(\bar{H}) = (Pu_-^i, u_+^i) > 0$, $i = 1, \ldots, s$.

Мы получили нетривиальный результат об остроте максимума для однообходной экстремали. Для случая непрерывного u^0 (т.е. когда U — строго выпуклый компакт) его можно было бы предсказать и без общей теорий высших порядков, ибо в этом случае острота максимума задается функционалом $\int \delta\dot{x}^2\,dt$, традиционным для вариационного исчисления. Однако для случая разрывного u^0 (т.е. когда компакт U строго выпуклым не является) предсказать остроту без общей теории не представляется возможным, поскольку функционал γ, задающий остроту в этом случае, не совпадает с квадратичным функционалом, оценивающим снизу квадратичную форму на подпространстве и, более того, вообще не является ни квадратичным, ни даже положительно однородным с какой-либо степенью.

5.3 Задача с выпуклым годографом скорости. Заменим в задаче (1.1), (1.2) ограничение $u \in U$ на ограничение $u \in \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U} = \operatorname{co} U$. В какой мере сохранятся полученные результаты?

Как уже отмечалось, экстремали старой и новой задач совпадают. Экстремали с $n > 1$ не доставляют θ-слабый максимум в старой задаче, и тем более не доставляют θ-слабый максимум в новой задаче. Однообходные экстремали доставляют в новой задаче абсолютный максимум; при любом представлении $\mathfrak{U} = \operatorname{co} U$, где U — произвольный канонически заданный компакт, на U имеет место оценка остроты масимума, сформулированная в теореме 4.2. Возникает вопрос, какие выпуклые компакты $\mathfrak{U}$ могут быть получены в результате овыпукления канонически заданных компактов U? Имеется ли у них простое независимое описание? Ниже мы дадим такое описание.

Дугой класса $\mathbf{C}^2$ *положительной кривизны* назовем образ отрезка $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^1$ при инъективном отображении $r\colon I \mapsto \mathbb{R}^2$ класса $\mathbf{C}^2$ таком, что $\dot{r} \neq 0$ и $(P\dot{r}, \ddot{r}) \neq 0$ всюду на I.

Замкнутой кривой класса $\mathbf{C}^2$ *положительной кривизны* назовем образ окружности S^1 при инъективном отображении $r\colon S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$ класса $\mathbf{C}^2$ таком, что $\dot{r} \neq 0$ и $(P\dot{r}, \ddot{r}) \neq 0$ на S^1.

Определение 5.2: Выпуклый компакт $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью назовем *правильным*, когда либо

а) его граница $\partial\mathfrak{U}$ является замкнутой кривой класса $\mathbf{C}^2$ положительной кривизны либо

б) $\partial\mathfrak{U}$ состоит из конечного числа отрезков и (или) конечного числа дуг класса $\mathbf{C}^2$ положительной кривизны, причём, у любых двух смежных дуг на $\partial\mathfrak{U}$ их общая точка является угловой.

Напомним, что компакт U мы назвали *канонически заданным*, если он удовлетворяет всем предположениям пункта 3.1. Имеет место следующая

Теорема 5.5: *Всякий правильный компакт* $\mathfrak{U}$ *является овыпуклением некоторого канонически заданного компакта* U.

Доказательство мы проведем, опуская некоторые детали. Ниже рассматриваются только кривые без самопересечений.

Пусть σ — замкнутая кривая класса $\mathbf{C}^2$, под которой мы понимаем образ окружности S^1 при инъективном отображении $r\colon S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$ класса $\mathbf{C}^2$ таком, что $\dot{r} \neq 0$ на S^1. Будем говорить, что $x' \in \sigma$ — точка *строгой выпуклости кривой* σ, если $\big(P\dot{r}(t'), \ddot{r}(t')\big) \neq 0$, где $r(t') = x'$, и существует круг с центром в точке x' такой, что его пересечение с компактом, ограниченным кривой σ, есть выпуклое множество. Имеет место

Предложение 5.1: *Всякая замкнутая кривая σ класса $\mathbb{C}^2$ является нулевой линией уровня некоторой функции $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ класса $\mathbb{C}^2$ такой, что её градиент G' отличен от нуля во всякой точке кривий σ, а матрица вторых производных G'' положительно определена во всякой точке строгой выпуклости кривой σ, причем, множество $\{x \mid G(x) \leq 0\}$ совпадает с компактом, ограничиваемым кривой σ.*

Доказательство: Пусть $d(x,\sigma)$ — расстояние от точки x до кривой σ. Положим $V_\varepsilon(\sigma) = \{x \mid d(x,\sigma) < \varepsilon\}$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что для каждой точки $x \in V_\varepsilon(\sigma)$ существует единственная точка $a(x) \in \sigma$, реализующая расстояние от x до σ. Пусть K_σ — компакт, ограничиваемый кривой σ. Определим на $V_\varepsilon(\sigma)$ две функции:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} d(x,\sigma), & \text{если } x \in V_\varepsilon(\sigma) \setminus K_\sigma, \\ -d(x,\sigma), & \text{если } x \in V_\varepsilon(\sigma) \cap K_\sigma, \end{cases}$$

$$G_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\, g_\varepsilon^2(x) + g_\varepsilon(x),\ x \in V_\varepsilon(\sigma).$$

Можно проверить, что на $V_\varepsilon(\sigma)$ функция G_ε обладает требуемыми свойствами. Теперь не представляет труда построить функцию $G\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$ класса $\mathbb{C}^2$, совпадаюшую с G_ε в малой окрестности кривой σ, отрицательную во внутренних точках компакта K_σ и, следовательно, обладаюшую нужными свойствами ∎

Из предложения 5.1 сразу следует, что компакт, ограниченный замкнутой кривой σ положительной кривизны, допускает каноническое задание.

Рассмотрим теперь правильный компакт $\mathfrak{U}$, граница которого $\partial\mathfrak{U}$ состоит из конечного числа отрезков δ и конечного числа дуг β класса $\mathbb{C}^2$ положительной кривизны. Представим $\mathfrak{U}$ как овыпукление такого компакта U, что его граница ∂U состоит из конечного числа дуг класса $\mathbb{C}^2$ (т.е. образов отрезка $I = [\tau_0, \tau_1] \subset \mathbb{R}^1$ при инъективном отображении $r\colon I \to \mathbb{R}^2$ класса $\mathbb{C}^2$ таком, что $\dot r(t) \neq 0$ всюду на I), причем, любые две смежные дуги в их общей точке имеют различные касательные. Это можно сделать следующим образом. Заменим каждый из отрезков δ близкой к нему дугой $\beta(\delta)$ класса $\mathbb{C}^2$ так, чтобы были выполнены условия:

а) все точки дуги $\beta(\delta)$, кроме её концов, расположены внутри компакта $\mathfrak{U}$;

б) никакие две дуги $\beta(\delta)$, $\beta(\delta')$, заменившие отрезки δ и δ' на $\partial\mathfrak{U}$, не имеют между собой общих точек, кроме, возможно, своих концов;

в) если какой-либо конец a_δ отрезка δ не является угловой точкой границы $\partial\mathfrak{U}$ и, следовательно, δ лежит на касательной, проведенной в точке a_δ к смежной с ним дуге β, то β и $\beta(\delta)$ имеют в точке a_δ соприкосновение второго порядка, а, значит, β и $\beta(\delta)$ составляют вместе новую дугу класса $\mathbb{C}^2$ (аналогично, если оба конца отрезка δ не являются угловыми точками границы, то дуга $\beta(\delta)$ соприкасается с двумя смежными дугами во втором порядке и, следовательно, три дуги вместе образуют новую дугу класса $\mathbb{C}^2$);

г) если какой-либо конец a_δ отрезка δ является угловой точкой границы $\partial\mathfrak{U}$, то $\beta(\delta)$ касается δ в точке a_δ и имеет в этой точке положительную кривизну.

После такой замены всех отрезков δ на $\partial\mathfrak{U}$ дугами $\beta(\delta)$ с последующим объединением каждой цепочки дуг, соприкасающихся друг с другом во втором порядке, в одну дугу, мы получаем замкнутую кривую без самопересечений, ограничивающую компакт U, овыпукление которого есть $\mathfrak{U}$, причем, граница U состоит из конечного числа дуг класса $\mathbb{C}^2$, не соприкасающихся друг с другом в первом порядке.

Теперь следует продолжить каждую дугу β' класса $\mathbb{C}^2$ на границе U до некоторой замкнутой кривой σ класса $\mathbb{C}^2$, ограничивающей множество, содержащее в себе U, причем, так, что $\sigma \cap \partial U = \beta'$. Очевидно, это можно сделать (причем, дуги положительной кривизны можно продолжить дугами положительной кривизны, что, впрочем, не существенно). Остается указать с помощью предложения 5.1 для каждой построенной замкнутой кривой σ функцию G класса C^2 со свойствами, описанными в предложении 5.1. Это и завершит доказательство теоремы 5.5 ∎

Из утверждений, высказанных в начале этого пункта, и теоремы 5.5 вытекает следующая

Теорема 5.6: *Пусть U — правильный компакт, содержащий ноль внутренней точкой. Тогда*

а) *экстремаль с $n = 1$ доставляет абсолютный максимум в задаче* (1.1), (1.2);
б) *экстремаль с $n > 1$ не доставляет θ-слабый максимум в задаче* (1.1), (1.2).

6. О квадратичных формах обобщённой изопериметрической задачи

Здесь мы проведем дополнительные рассмотрения квадратичных форм, связанных с задачей (1.1), (1.2). Все основные рассмотрения будут относиться к случаю $n = 1$. Прежде всего, мы дадим независимые доказательства того, что для однообходных экстремалей квадратичная форма ω неотрицательна на подпространстве $\mathbf{L}$. Мы начнем со случая непрерывного u^0 и воспользуемся для доказательства неотрицательности формы на подпространстве условиями Якоби из § 4. Далее мы распространим это доказательство на случай разрывного u^0. Мы рассмотрим также некоторые следствия, вытекающие из неотрицательности ω на $\mathbf{L}$ для однообходных экстремалей.

6.1 Случай строго выпуклого U. Пусть U — строго выпуклый компакт, содержащий ноль внутренней точкой, граница которого ∂U либо является замкнутой кривой класса C^2 положительной кривизны, либо ∂U состоит из конечного числа дуг положительной кривизны, причем, у любых двух смежных дуг на ∂U их общая точка является угловой. Согласно теореме 5.3 такой компакт является канонически заданным. Пусть $w^0 = (x^0, u^0)$ — какая-либо однообходная экстремаль задачи (1.1), (1.2). Ей, как мы знаем (см. § 3), соответствует квадратичная форма

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 [(Pu^0, \dot{u}^0)\,\bar{v}^2 - (P\bar{x}, \dot{u}^0)\,\bar{v}]\,dt \tag{6.1}$$

неотрицательная на подпространстве $\mathbf{L}_0$, состоящем из пар $(\bar{x}, \bar{v})$ таких, что

$$\bar{x} \in (\mathbf{W}_2{}^1)^2,\ \bar{v} \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E}),\ \dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}^0,\ \bar{x}(0) = \bar{x}(1). \tag{6.2}$$

При этом ω_0 удовлетворяет усиленному условию Лежандра:

$$(Pu^0, \dot{u}^0) \geqq \mathrm{const} > 0 \quad \text{на} \quad \mathscr{E}. \tag{6.3}$$

Неотрицательность ω_0 на $\mathbf{L}_0$ была получена как следствие того факта, что однообходная экстремаль доставляет абсолютный максимум в задаче (1.1), (1.2), а этот факт в свою очередь был получен из существования оптимального решения в задаче. Однако интересно было бы иметь независимое доказательство неотрицательности ω_0 на $\mathbf{L}_0$. Это доказательство мы и приведем ниже.

Согласно [1] для доказательства неотрицательности ω_0 на $\mathbf{L}_0$ достаточно показать, что при любом $\tau \in (0, 1)$ таком, что $0 < \operatorname{mes} \mathscr{E}_\tau < \operatorname{mes} \mathscr{E}$, на $[0, \tau]$ не существует нетривиального решения уравнения Эйлера-Якоби. Покажем это. Пусть

$0 < \tau < 1$, $0 < \operatorname{mes} \mathscr{E}_\tau < \operatorname{mes} \mathscr{E}$ и пусть на $[0, \tau]$ имеется нетривиальное решение уравнения Эйлера-Якоби. Тогда согласно теореме 4.1 существует нетривиальное решение $\bar{\nu} \in W^2_\infty$ краевой задачи (4.26), (4.27):

$$\ddot{\bar{\nu}} = \begin{cases} 0. & t \in [0, \tau], \quad \bar{\nu}(0) = \bar{\nu}(1), \\ -\varrho\bar{\nu}, & t \in (\tau, 1]; \quad \dot{\bar{\nu}}(0) = \dot{\bar{\nu}}(1). \end{cases}$$

Положим $\bar{\zeta} = -\dot{\bar{\nu}}\zeta^0 + \bar{\nu}u^0$. Тогда $\bar{\zeta}$ — липшицева функция такая, что $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(1)$ и $\dot{\bar{\zeta}} = 0$ на $(\tau, 1]$. Отсюда вытекает, что $\bar{\zeta} = \mathrm{const}$ на $(\tau, 1]$ и, следовательно, $\bar{\zeta}(\tau) = \bar{\zeta}(1) = \bar{\zeta}(0)$. Если $\dot{\bar{\nu}} = 0$ на $[0, \tau]$, то $\bar{\nu} = \mathrm{const} \neq 0$ на $[0, \tau]$, и тогда из условий $\bar{\zeta} = \bar{\nu}u^0$ на $[0, \tau]$, $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(\tau)$ получаем $u^0(0) = u^0(\tau)$, что неверно, поскольку $\operatorname{mes} \mathscr{E}_\tau < \operatorname{mes} \mathscr{E}$. Следовательно, $\dot{\bar{\nu}} \neq 0$ на $[0, \tau]$. Тогда, не ограничивая общности, мы можем положить $\dot{\bar{\nu}} = -1$ на $[0, \tau]$. Следовательно, на $[0, \tau]$

$$\bar{\zeta} = \zeta^0 + \bar{\nu}u^0, \dot{\bar{\nu}} = -1, \bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(\tau). \tag{6.4}$$

Покажем, что это также невозможно. Действительно, поскольку $(P\zeta^0, \bar{\zeta}) = \bar{\nu}(P\zeta^0, u^0) = \alpha\bar{\nu}$ на $[0, \tau]$, то $d(P\zeta^0, \bar{\zeta})/dt = \dot{\bar{\nu}}\alpha = -\alpha = -(P\zeta^0, u^0)$ на $[0, \tau]$. Следовательно, $\frac{1}{2} d(P\bar{\zeta}, \zeta^0)/dt = \frac{1}{2}(P\zeta^0, \dot{\zeta}^0)$ на $[0, \tau]$. Интегрируя это равенство по $[0, \tau]$, получаем

$$\frac{1}{2}(P\bar{\zeta}, \zeta^0)(\tau) + \frac{1}{2}(P\zeta^0, \bar{\zeta})(0) = \frac{1}{2}\int_0^\tau (P\zeta^0, \dot{\zeta}^0)\, dt. \tag{6.5}$$

Поскольку $\bar{\zeta} = \zeta^0 + \bar{\nu}\dot{\zeta}^0$, то в каждый момент времени $\bar{\zeta}$ лежит на касательной к кривой ζ^0. Следовательно, $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(\tau)$ есть точка пересечения касательных, проведенных к кривой ζ^0 в точках $\zeta^0(0)$ и $\zeta^0(\tau)$. Возможны два случая а) и б) изображенных на рис. 6.1.

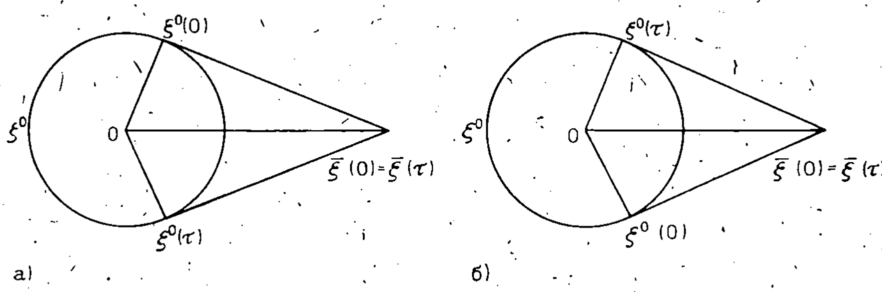

Рис. 6.1

В случае а) имеем $\big(P\bar{\zeta}(\tau), \zeta^0(\tau)\big) < 0$, $\big(P\zeta^0(0), \bar{\zeta}(0)\big) < 0$, так что выражение слева в (6.5) отрицательно, в то время как площадь сектора, стоящая справа в (6.5), положительна. Значит, случай а) невозможен. Случай а) невозможен и по другой причине: согласно условию $\dot{\bar{\nu}} = -1$ движение вектора $\bar{\zeta}$ по касательной происходит в направлении противоположном вращению вектора ζ^0, что не соответствует случаю а) на рис. 6.1.

Рассмотрим случай б). Слева в равенстве (6.5) стоит площадь четырехугольника с вершинами в точках 0, $\zeta^0(0)$, $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(\tau)$, $\zeta^0(\tau)$ (представленная в виде суммы площадей двух треугольников, на которые разбивает указанный четырехугольник диагональ с концами в точках 0 и $\bar{\zeta}(0) = \bar{\zeta}(\tau)$), а справа в (6.5) стоит площадь сектора, который получается при вращении вектора ζ^0 против часовой стрелки (ибо $(P\zeta^0, \dot\zeta^0) = \alpha > 0$) из положения $\zeta^0(0)$ до положения $\zeta^0(\tau)$. Этот сектор не может совпасть с указанным четырехугольником, поскольку $\operatorname{mes}\mathscr{E}_\tau > 0$. Поэтому площадь сектора меньше площади четырехугольника, т.е. случай б) также невозможен. Неотрицательность формы ω_0 на подпространстве $\mathbf{L}_0$ доказана.

6.2 О классе неотрицательных квадратичных форм, связанных с изопериметрической задачей. Для однообходной экстремали $w^0 = (x^0, u^0)$ задачи (1.1), (1.2) в случае правильного строго выпуклого компакта U, содержащего ноль внутренней точкой, мы показали, что квадратичная форма ω_0 неотрицательна на подпространстве $\mathbf{L}_0$. Насколько важно, что w^0 — экстремаль задачи (1.1), (1.2)? Насколько существенны предположения, сделанные относительно компакта U? Не сохранится ли этот результат для произвольной липшицевой функции $\varkappa$, совершающей однократный обход границы произвольного выпуклого компакта U, содержащего ноль внутренней точкой? Оказывается, что ответ на этот вопрос положителен.

Пусть сначала U — правильный строго выпуклый компакт, содержащий ноль внутренней точкой, (x^0, u^0) — однообходная экстремаль. Во-первых, заметим, что совершенно не важно, сколько времени u^0 простаивает в каждой угловой точке на ∂U: если увеличить или сократить (возможно, даже до нуля) каждый такой отрезок времени, соответственно изменив отрезок $[0, 1]$, то значения ω_0 на „новых" $(\bar x, \bar v)$ будут соответственно равны значениям ω_0 на „старых" $(\bar x, \bar v)$. Пользуясь этим обстоятельством, уберем из отрезка $[0, 1]$ все интервалы типа e, на которых u^0 простаивает в соответствующих угловых точках на ∂U. Получим новый отрезок времени $[0, T]$, где $T = \operatorname{mes}\mathscr{E}$, и новое управление $\tilde u^0$. Очевидно, $\tilde u^0$ — липшицева функция на $[0, T]$ такая, что $\dot{\tilde u}^0 \geqq \mathrm{const} > 0$ п.в. на $[0, T]$. Зададим на $[0, 1]$ произвольную ограниченную измеримую функцию $\varkappa : [0, 1] \to \mathbb{R}$ такую, что $\varkappa(\tau) \geqq 0$ п.в. на $[0, 1]$, $\int_0^1 \varkappa(\tau)\, d\tau = T$. Эта функция определяет замену времени: $dt/d\tau = \varkappa(\tau)$, $t(0) = 0$. Получаем монотонно неубывающую функцию $t(\tau)$ такую, что $t(0) = 0$, $t(1) = T$. Положим $u(\tau) = \tilde u^0(t(\tau))$. Тогда $du/d\tau = (d\tilde u^0/dt)\,\varkappa$. После такой замены уравнение $\dot{\bar x} = \bar v \dot{\tilde u}^0$ переходит в уравнение $d\bar x(t(\tau))/d\tau = \bar v(t(\tau))\, du(\tau)/d\tau$, а имеющиеся в форме члены вида $\dot u^0\, dt$ переписываются к виду $(du/d\tau)\, d\tau$. Следовательно, как форма ω_0, так и подпространство $\mathbf{L}_0$ оказываются инвариантны относительно замены времени. Ясно, что с помощью такой замены из функции $\tilde u^0$ может быть получена произвольная липшицева функция $u(\tau)$, совершающая в направлении против часовой стрелки однократный обход границы ∂U. Таким образом, из сказанного выше вытекает следующая

Теорема 6.1: *Пусть U — правильный строго выпуклый компакт, содержащий ноль внутренней точкой. Пусть $\varkappa: [0, 1] \mapsto \partial U$ — произвольная липшицева функция, совершающая против часовой стрелки (т.е. $(Pu, \dot u) \geqq 0$ п.в. на $[0, 1]$) однократный одход границы ∂U. Тогда квадратичная форма*

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 [(Pu, \dot u)\, \bar v^2 - (P\bar x, \dot u)\, \bar v]\, dt \tag{6.6}$$

неотрицательна на подпространстве пар $(\bar x, \bar v)$ таких, что

$$\bar x \in (\mathbf{W}_2{}^1)^2,\ \bar v \in \mathbf{L}_2,\ \dot{\bar x} = \bar v \dot u,\ \bar x(0) = \bar x(1). \tag{6.7}$$

Условие $\bar v \in \mathbf{L}_2(\mathscr{E})$ мы заменили здесь на условие $\bar v \in \mathbf{L}_2$. Чтобы не вводить новых обозначений, подпространство (6.7) будем по-прежнему обозначать через $\mathbf{L}_0$.

Распространим теперь теорему 5.1 на случай произвольного выпуклого компакта $U \subset \mathbb{R}^2$, содержащего ноль внутренней точкой. Пусть U — такой компакт, а u — произвольная липшицева функция, совершающая однократный обход его границы ∂U в направлении против часовой стрелки. Приблизим U последовательностью строго выпуклых правильных компактов U_n, а функцию u — последовательностью липшицевых функций u_n, каждая из которых совершает однократный обход границы ∂U_n. Последовательность $\{U_n\}$ должна удовлетворять условию $d(\partial U_n, \partial U) \to 0$, где $d(\cdot,\cdot)$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Компакты U_n можно выбрать такими, что граница каждого U_n является замкнутой кривой класса C^2 положительной кривизны. Последовательность $\{u_n\}$ следует задать таким образом, чтобы были выполнены условия $\|u_n - u\|_\infty \to 0$, $\|\dot u_n - \dot u\|_1 \to 0$ (значения u_n на ∂U_n можно задать, например, так: при каждом t значение $u_n(t)$ есть точка пересечения границы ∂U_n с лучом, исходящим из нуля и проходящим через точку $u(t)$ — при этом получается липшицева функция на ∂U_n).

Рассмотрим теперь произвольную пару $(\bar x, \bar v) \in (\mathbf{W}^1_\infty)^2 \times \mathbf{L}_\infty$ такую, что $\dot{\bar x} = \bar v \dot u$, $\bar x(0) = \bar x(1) = 0$. Покажем, что ω_0, вычисленная для u, неотрицательна на $(\bar x, \bar v)$. Действительно, пусть $\bar x_n'$ удовлетворяет условиям $\dot{\bar x}_n' = \bar v \dot u_n$, $\bar x(0) = 0$. Тогда $\bar x_n'(1)$ может не быть нулем, но $\bar x_n'(1) \to 0$. Следовательно, существует $\bar v_n$ такая, что $\|\bar v_n - \bar v\|_\infty \to 0$, $\int_0^1 \bar v_n \dot u_n \, dt = 0$. Пусть $\bar x_n$ определяется из условий $\dot{\bar x}_n = \bar v \dot u_n$, $\bar x_n(0) = 0$. Тогда $\bar x_n(1) = 0$. Поскольку

$$
\begin{aligned}
\|\dot{\bar x}_n - \dot{\bar x}\|_1 &= \|\bar v_n \dot u_n - \bar v \dot u\|_1 = \|(\bar v_n - \bar v)\,\dot u_n + \bar v(\dot u_n - \dot u)\|_1 \\
&\leqq \|\bar v_n - \bar v\|_1 \, \|\dot u_n\|_\infty + \|\bar v\|_\infty \, \|\dot u_n - \dot u\|_1 \to 0,
\end{aligned}
$$

то $\|\bar x_n - \bar x\|_{\mathbf{W}_1^1} \to 0$ и, следовательно, $\|\bar x_n - \bar x\|_\infty \to 0$. Значит,

$$
\int [(Pu_n, \dot u_n)\, \bar v_n^2 - (P\bar x_n, \dot u_n)\, \bar v_n]\, dt \to \int [(Pu, \dot u)\, \bar v^2 - (P\bar x, \dot u)\, \bar v]\, dt.
$$

Но по теореме 6.1 интеграл в левой части является неотрицательным. Следовательно, интеграл в правой части также неотрицателен.

Итак, мы показали, что для любой пары $(\bar x, \bar v) \in (\mathbf{W}^1_\infty)^2 \times \mathbf{L}_\infty$ такой, что $\dot{\bar x} = \bar v \dot u$, $\bar x(0) = \bar x(1) = 0$ квадратичная форма $\int [(Pu, \dot u)\, \bar v^2 - (P\bar x, \dot u)\, \bar v]\, dt$ неотрицательна. Отсюда легко следует, что та же форма неотрицательна на всех таких же парах $(\bar x, \bar v) \in (\mathbf{W}_2{}^1)^2 \times \mathbf{L}_2$.

Итак, доказана

Теорема 6.2: *Пусть U — произвольный выпуклый компакт, содержащий ноль внутренней точкой, $u\colon [0, 1] \to \partial U$ — липшицева функция, совершающая однократный обход границы ∂U в направлении против часовой стрелки* (*т.е.* $(Pu, \dot u) \geqq 0$ *п.в. на* $[0, 1]$). *Тогда квадратичная форма* (6.6) *неотрицательна на подпространстве* (6.7).

6.3 О связи между квадратичными формами, отвечающими случаям непрерывного и разрывного оптимального управления. Как связаны между собой две формы: та, что рассмотрена в предыдущем пункте для непрерывного u^0, и форма ω, выписанная в § 3 для случая, когда u^0 разрывно? На первый взгляд представляется очевидным, что вторая форма является формой более общего вида, поскольку содержит дополнительные члены, учитывающие разрывы управления. С другой стороны, разница между формами не может быть большой, поскольку более или менее ясно, что форма, отвечающая разрывному u^0, может быть получена из непрерывного случая предельным переходом. Однако дело обстоит еще проще: квадратичная форма ω разрывного случая совпадает с квадратичной формой ω_0 непрерывного случая на некотором более узком подпространстве, чем $\mathbf{L}_0$, и, таким образом, не является обобщением. Это мы и покажем ниже.

Пусть имеются компакт U и траектория $u(t)$, удовлетворяющие условиям теоремы 6.2. Пусть δ — отрезок на ∂U, а $[t_-, t_+] \subset [0, 1]$ — соответствующий отрезок времени, в течении которого $u(t)$ находится на δ. Пусть $u^- = u(t_-)$, $u^+ = u(t_+)$. Рассмотрим уравнение $\dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}$. Положим $\bar{v} = \mathrm{const} = \bar{\xi}$ на $[t_-, t_+]$. Тогда

$$\bar{x}^+ - \bar{x}^- = \bar{v}\int_{t_-}^{t_+} \dot{u}\, dt = \bar{\xi}(u^+ - u^-),$$

где $\bar{x}^+ = \bar{x}(t_+)$, $\bar{x}^- = \bar{x}(t_-)$. Далее,

$$\frac{1}{2}\int_{t_-}^{t_+} (Pu, \dot{u})\, \bar{v}^2\, dt = \frac{1}{2}\bar{\xi}^2 \int_{t_-}^{t_+} (Pu, \dot{u})\, dt = \frac{1}{2}\bar{\xi}^2 \left(P\left(\frac{1}{2}(u^+ + u^-)\right), u^+ - u^-\right),$$

ибо половина интеграла от $(Pu, \dot{u})$ по $[t_-, t_+]$ есть площадь треугольника с вершинами в точках 0, u^-, u^+, а она может быть вычислена по приведенной выше формуле. Аналогично,

$$\frac{1}{2}\int_{t_-}^{t_+} (P\bar{x}, \dot{u})\, \bar{v}\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_-}^{t_+} (P\bar{x}, \dot{\bar{x}})\, dt = \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{1}{2}(\bar{x}^+ + \bar{x}^-)\right), \bar{x}^+ - \bar{x}^-\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{1}{2}(\bar{x}^+ + \bar{x}^-)\right), u^+ - u^-\right)\bar{\xi}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int_{t_-}^{t_+} [(Pu, \dot{u})\, \bar{v}^2 - (P\bar{x}, \dot{u})\, \bar{v}]\, dt$$

$$= \frac{1}{2}(Pu_m, \Delta u)\, \bar{\xi}^2 - \frac{1}{2}(P\bar{x}_m, \Delta u)\, \bar{\xi},\ \Delta\bar{x} = \Delta u\bar{\xi},$$

где $u_m = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$, $\Delta u = u^+ - u^-$, $\bar{x}_m = \frac{1}{2}(\bar{x}^+ + \bar{x}^-)$, $\Delta\bar{x} = \bar{x}^+ - \bar{x}^-$. Но точно такие же члены имеются у формы ω, определенной формулой (3.18).

Выберем теперь произвольный конечный набор из s отрезков на ∂U. Возьмем произвольный i-й отрезок на ∂U этого набора и на соответствующем ему отрезке времени (на котором $u(t)$ проходит i-й отрезок на ∂U) положим $\bar{v} = \mathrm{const} = \bar{\xi}_i$, где $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s$ — произвольный набор чисел (нумеровать отрезки на ∂U надо в направлении против часовой стрелки). Поступив таким образом, мы получаем форму вида (3.18) на подпространстве вида (3.19). Теперь нам безразлично, как ведет себя функция u на i-м отрезке времени. В частности, мы можем считать, что она разрывна на каждом таком отрезке. Из сказанного в этом пункте и теоремы 6.2 вытекает следующая

Теорема 6.3: *Пусть U — выпуклый компакт, содержащий ноль внутренней точкой. Пусть $u\colon [0, 1] \mapsto \partial U$ — кусочно-липшицева функция, совершающая однократный обход границы ∂U в направлении против часовой стрелки (т.е. $(Pu, \dot{u})$*

≥ 0 *п.в. на* $[0, 1]$). *Пусть* $\theta = \{t_1, \ldots, t_s\}$ — *множество точек разрыва* u. *Предполагается, что для каждой* $t_i \in \theta$ *значения* $u_-{}^i = u(t_i - 0)$, $u_+{}^i = u(t_i + 0)$ *являются концами отрезка на* ∂U. *Тогда квадратичная форма*

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [(Pu_{\mathrm{m}}{}^i, \Delta^i u)\, \bar{\xi}_i{}^2 - (P\bar{x}_{\mathrm{m}}{}^i, \Delta^i u)\, \bar{\xi}_i] + \frac{1}{2} \int_0^1 [(Pu, \dot{u})\, \bar{v}^2 - (P\bar{x}, \dot{u})\, \bar{v}]\, dt$$

неотрицательна на подпространстве троек $(\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v})$ *таких, что* $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^s, \bar{x} \in (\mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_2{}^1)^2$, $\bar{v} \in \mathbf{L}_2$, $\dot{\bar{x}} = \bar{v}\dot{u}$, $\Delta^i \bar{x} = \Delta^i u \bar{\xi}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, $\bar{x}(0) = \bar{x}(1)$.

6.4 Конечномерные формы. Пусть U — выпуклый многоугольник на плоскости, содержащий нуль внутри себя, $w^0 = (x^0, u^0)$ — однообходная экстремаль задачи (1.1), (1.2). Тогда управление u^0 кусочно постоянно. На каждом интервале постоянства значение u^0 принадлежит одной из вершин многоугольника U. За весь отрезок времени $[0, 1]$ u^0 совершает однократный обход вершин многоугольника U в направлении против часовой стрелки. Поскольку всюду на $(0, 1) \setminus \theta$ будет $\dot{u}^0 = 0$, то интегральные члены квадратичной формы ω равны нулю. Для любого $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{v}) \in \mathbf{L}$ имеем $\dot{\bar{x}} = 0$ п.в. на $[0, 1]$ и, следовательно, $\bar{x}$ является кусочно постоянной функцией, имеющей разрывы лишь в точках множества θ. Таким образом, в указанном случае ω и $\mathbf{L}$ приобретают вид

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [(Pu_{\mathrm{m}}{}^{0i}, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i{}^2 - (P\bar{x}_{\mathrm{m}}{}^i, \Delta^i u^0)\, \bar{\xi}_i],$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \{(\bar{\xi}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^s \times (\mathbf{K}_\theta \mathbf{W}_\infty^1)^2 \mid \dot{\bar{x}} = 0,\ \Delta^i \bar{x} = \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i\ (i = 1, \ldots, s),\ \bar{x}(0) = \bar{x}(1)\}.$$

Как мы знаем, для однообходной экстремали форма $\tilde{\omega}$ неотрицательна на $\tilde{\mathbf{L}}$, а для многообходной это не так.

Форму $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathbf{L}}$ можно также представить в виде

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [(Pu_-{}^{0i}, u_+{}^{0i})\, (\Delta^i \bar{x})^2 / (\Delta^i u^0)^2 - (P\bar{x}_-{}^i, \bar{x}_+{}^i)]$$

(мы исключили, таким образом, $\bar{\xi}_i$, воспользовавшись равенством $\Delta^i \bar{x} = \Delta^i u^0 \bar{\xi}_i$). Введем для удобства обозначения $r^i = u_+{}^{0i} = u_-{}^{0(i+1)}$ $(i = 1, \ldots, s - 1)$, $r^0 = u^0(0) = u_-{}^{01} = u^0(1) = u_+{}^{0s} = r^s$. Набор $r = (r^0, r^1, \ldots, r^s)$ представляет собой последовательность векторов, совершающую n-кратный обход вершин многоугольника U против часовой стрелки, причем, $r^0 = r^s$. Далее, положим $\bar{r}^i = \bar{x}_+{}^i = \bar{x}_-{}^{(i+1)}$ $(i = 1, \ldots, s - 1)$, $\bar{r}^0 = \bar{x}(0) = \bar{x}^1_- = \bar{x}(1) = \bar{x}_+{}^s = \bar{r}^s$. Набор $\bar{r} = (\bar{r}^0, \bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^s)$ определяет замкнутую ломаную с вершинами в точках $\bar{r}^0, \bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^s$, причем, $\bar{r}^0 = \bar{r}^s$. Наконец, положим $\Delta^i r = r^i - r^{i-1}$, $\Delta^i \bar{r} = \bar{r}^i - \bar{r}^{i-1}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда задача определения знака $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathbf{L}}$ равносильна задаче определения знака формы

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} [(Pr^{i-1}, r^i)\, |\Delta^i \bar{r}|^2 / |\Delta^i r|^2 - (P\bar{r}^{i-1}, \bar{r}^i)]$$

на подпространстве замкнутых s-звенных ломаных со сторонами соответственно параллельными сторонам многоугольника U:

$$\hat{\mathbf{L}} = \{\bar{r} = (\bar{r}^0, \bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^s) \in \mathbb{R}^{2(s+1)} \mid \bar{r}^0 = \bar{r}^s,\ (P\Delta^i r, \Delta^i \bar{r}) = 0\ \forall i\}. \tag{6.9}$$

Из сказанного вытекает

Теорема 6.4: *Справедливы следующие утверждения:*

а) *При* $n = 1$ (*один обход*) *квадратичная форма* (6.8) *неотрицательна на подпространстве* (6.9).

б) *При* $n > 1$ *квадратичная форма* (6.8) *неотрицательной на подпространстве* (6.9) *не является.*

Из этой теоремы вытекает, что при $n = 1$ для всех $\bar{r} \in \hat{\mathbf{L}}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(Pr^{i-1}, r^i)\,|\Delta^i\bar{r}|^2/|\Delta^i r|^2 \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(P\bar{r}^{i-1}, \bar{r}^i). \tag{6.10}$$

Поясним геометрический смысл этого неравенства. Многоугольник с вершинами в точках $r^0, r^1, \ldots, r^s$ ($r^0 = r^s$) разобъём на s треугольников T_i с вершинами в точках r^{i-1}, r^i, 0. Пусть $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s)$ — произвольный набор чисел. Каждый треугольник T_i заменим на подобный ему треугольник $T_i(\bar{\xi}) = \bar{\xi}_i T_i$, получаемый из T_i умножением на $\bar{\xi}_i = |\Delta^i\bar{r}|/|\Delta^i r|$. Объединение треугольников $T_i(\bar{\xi})$ обозначим через $U(\bar{\xi})$ и назовем *цветком*, а отрезки $\Delta^i\bar{r} = \Delta^i r\bar{\xi}_i$ будем называть *ребрами* цветка. Если $\sum\Delta^i\bar{r} = \sum\Delta^i r\bar{\xi}_i = 0$, т.е. если ломаная, составленная из ребер цветка, является замкнутой, то такой цветок будем называть *правильным*. Неравенство (6.10) означает, что площадь всякого правильного цветка больше или равна площади фигуры, ограниченной замкнутой ломаной, составленной из ребер цветка (эта ломаная может иметь самопересечения, и тогда функционал, стоящий справа в (6.10) мы лишь условно называем „площадью").

Неравенство (6.10) для $\bar{r} \in \hat{\mathbf{L}}$ мы получили как следствие неотрицательности формы (6.6) на подпространстве (6.7) для однообходных u^0. Интересно было бы иметь непосредственное доказательство неравенства (6.10). Помочь в этом, возможно, позволит эквивалентная переписка неравенства (6.10), которую мы укажем ниже. Из условий $\Delta^i\bar{r} = \Delta^i r\bar{\xi}_i$, $\bar{r}^0 = \bar{r}^s$ вытекает, что $\sum\Delta^i r\bar{\xi}_i = 0$. Положим

$$\mathbf{L}_\xi = \{\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s) \in \mathbb{R}^s \mid \sum_{i=1}^{s}\Delta^i r\bar{\xi}_i = 0\}.$$

Каждый набор $\bar{\xi} \in \mathbf{L}_\xi$ вместе с вектором $\bar{r}^0$ однозначно определяет замкнутую ломаную $\bar{r} = (\bar{r}^0, \bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^s) \in \hat{\mathbf{L}}$. При этом форма $\hat{\omega}(\bar{r})$, как нетрудно видеть, не зависит от $\bar{r}^0$, а зависит лишь от $\bar{\xi} \in \mathbf{L}_\xi$, поэтому мы положим

$$\omega_\xi(\bar{\xi}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(Pr^{i-1}, r^i)\,\bar{\xi}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(P\bar{r}^{i-1}, \bar{r}^i).$$

Представим ω_ξ в явном виде как функцию от $\bar{\xi}$. Поскольку „площадь", ограниченная ломаной $\bar{r}$, не зависит от $\bar{r}^0$, то положим $\bar{r}^0 = 0$. Тогда

$$\bar{r}^i = (\bar{r}^1 - \bar{r}^0) + (\bar{r}^2 - \bar{r}^1) + \cdots + (\bar{r}^i - \bar{r}^{i-1}) = \sum_{j=1}^{i}\Delta^j\bar{r}.$$

Следовательно,

$$(P\bar{r}^{i-1}, \bar{r}^i) = \left(P\left(\sum_{j=1}^{i-1}\Delta^j\bar{r}\right), \sum_{k=1}^{i}\Delta^k\bar{r}\right) = \sum_{j=1}^{i-1}(P\Delta^j\bar{r}, \Delta^i\bar{r}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{s}(P\bar{r}^{i-1}, \bar{r}^i) = \sum_{1\leqq i<j\leqq s}(P\Delta^i\bar{r}, \Delta^j\bar{r}) = \sum_{1\leqq i<j\leqq s}(P\Delta^i r, \Delta^j r)\,\bar{\xi}_i\bar{\xi}_j.$$

Следовательно,

$$\omega_\xi(\bar\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}(Pr^{i-1}, r^i)\,\bar\xi_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le s}(P\Delta^i r, \Delta^j r)\,\bar\xi_i\bar\xi_j.$$

В силу теоремы 6.4 $\omega_\xi(\bar\xi)$ неотрицательна на $\mathbf{L}_\xi$.

Далее мы покажем, что форма ω_ξ и подпространство $\mathbf{L}_\xi$ могут быть переписаны к форме ω_α и подпространству $\mathbf{L}_\alpha$, определяемым следующим образом:

$$\omega_\alpha(\bar\alpha) = -\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le s}(Pr^i, r^j)\,\bar\alpha_i\bar\alpha_j, \tag{6.11}$$

$$\mathbf{L}_\alpha = \{\bar\alpha = (\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_s) \in \mathbb{R}^s \mid \sum_{i=1}^{s}\bar\alpha_i r^i = 0,\ \sum_{i=1}^{s}\bar\alpha_i = 0\}. \tag{6.12}$$

Таким образом, будет доказана

Теорема 6.5: *Пусть имеется выпуклый s-угольник на плоскости, содержащий внутри себя ноль и пусть $(r^1, \ldots, r^s)$ — набор его вершин, последовательно проходимых в направлении против часовой стрелки. Тогда квадратичная форма* (6.11) *неотрицательна на подпространстве* (6.12).

Прежде всего, установим связь между подпространствами $\mathbf{L}_\xi$ и $\mathbf{L}_\alpha$.

Предложение 6.1: *Пусть $\bar\xi \in \mathbf{L}_\xi$. Положим*

$$\bar\alpha_i = \bar\xi_i - \bar\xi_{i+1},\ i = 1, \ldots, s, \quad \text{где} \quad \bar\xi_{s+1} = \bar\xi_1. \tag{6.13}$$

Тогда $\bar\alpha = (\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_s) \in \mathbf{L}_\alpha$.

Доказательство: Имеем

$$\sum_{i=1}^{s}\bar\alpha_i = \sum_1^s\bar\xi_i - \sum_1^s\bar\xi_{i+1} = \bar\xi_1 - \bar\xi_{s+1} = 0,$$

$$\sum_1^s\bar\alpha_i r^i = \sum_1^s\bar\xi_i r^i - \sum_1^s\bar\xi_{i+1}r^i = \sum_1^s\bar\xi_i r^i - \sum_2^{s+1}\bar\xi_i r^{i-1}$$

$$= \bar\xi_1 r^1 - \bar\xi_{s+1}r^{s+1} + \sum_2^s\bar\xi_i(r^i - r^{i-1})$$

$$= \bar\xi_1(r^1 - r^0) + \sum_2^s\bar\xi_i(r^i - r^{i-1}) = \sum_1^s\bar\xi_i\,\Delta^i r = 0 \quad \blacksquare$$

Предложение 6.2: *Пусть $\bar\alpha \in \mathbf{L}_\alpha$. Зададим $\bar\xi_1 \in \mathbb{R}$ произвольным образом, а остальные $\bar\xi_2, \bar\xi_3, \ldots, \bar\xi_s$ однозначно определим из системы*

$$\bar\alpha_1 = \bar\xi_1 - \bar\xi_2,\ \bar\alpha_2 = \bar\xi_2 - \bar\xi_3, \ldots, \bar\alpha_{s-1} = \bar\xi_{s-1} - \bar\xi_s.$$

Тогда $\bar\alpha_s = \bar\xi_s - \bar\xi_{s+1} = \bar\xi_s - \bar\xi_1$ и $\bar\xi = (\bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_s) \in \mathbf{L}_\xi$.

Доказательство: Действительно,

$$\bar\alpha_s = -\bar\alpha_1 - \bar\alpha_2 - \cdots - \bar\alpha_{s-1} = \bar\xi_2 - \bar\xi_1 + \bar\xi_3 - \bar\xi_2 + \cdots + \bar\xi_s - \bar\xi_{s-1} = \bar\xi_s - \bar\xi_1.$$

Далее,

$$\sum_1^s\Delta^i r\bar\xi_i = \sum_1^s(r^i - r^{i-1})\,\bar\xi_i = \sum_1^s r^i\bar\xi_i - \sum_0^{s-1}r^i\bar\xi_{i+1}$$

$$= r^s\bar\xi_s - r^0\bar\xi_1 + \sum_1^{s-1}r^i(\bar\xi_i - \bar\xi_{i+1}) = r^s\bar\alpha_s + \sum_1^{s-1}r^i\bar\alpha_i = 0 \quad \blacksquare$$

Далее, сравним значения форм $\omega_\xi(\bar\xi)$ и $\omega_\alpha(\bar\alpha)$ на соответствующих $\bar\xi$ и $\bar\alpha$.

Предложение 6.3: *Пусть* $\bar\xi = (\bar\xi_1, \ldots, \bar\xi_s) \in \mathbb{R}^s$ *и* $\bar\alpha = (\bar\alpha_1, \ldots, \bar\alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ *связаны условиями* (6.13). *Тогда* $\omega_\alpha(\bar\alpha) = \omega_\xi(\bar\xi)$.

Доказательство: Имеем:

$$\begin{aligned}-2\omega_\alpha(\bar\alpha) &= \sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\alpha_i\bar\alpha_j = \sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, (\bar\xi_i - \bar\xi_{i+1})\, (\bar\xi_j - \bar\xi_{j+1}) \\ &= \sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_i\bar\xi_j + \sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_{i+1}\bar\xi_{j+1} \\ &\quad - \sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_i\bar\xi_{j+1} - \sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_{i+1}\bar\xi_j.\end{aligned}$$

Но, очевидно,

$$\sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_{i+1}\bar\xi_{j+1} = \sum_{i<j} (Pr^{i-1}, r^{j-1})\, \bar\xi_i\bar\xi_j;$$

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_i\bar\xi_{j+1} &= \sum_{i<j-1} (Pr^i, r^{j-1})\, \bar\xi_i\bar\xi_j \\ &= \sum_{i<j} (Pr^i, r^{j-1})\, \bar\xi_i\bar\xi_j - \sum_{i=j-1} (Pr^i, r^{j-1})\, \bar\xi_i\bar\xi_j \\ &= \sum_{i<j} (Pr^i, r^{j-1})\, \bar\xi_i\bar\xi_j;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} (Pr^i, r^j)\, \bar\xi_{i+1}\bar\xi_j &= \sum_{i-1<j} (Pr^{i-1}, r^j)\, \bar\xi_i\bar\xi_j = \sum_{i\le j} (Pr^{i-1}, r^j)\, \bar\xi_i\bar\xi_j \\ &= \sum_{i<j} (Pr^{i-1}, r^j)\, \bar\xi_i\bar\xi_j + \sum_i (Pr^{i-1}, r^i)\, \bar\xi_i^{\,2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}-2\omega_\alpha(\bar\alpha) &= \sum_{i<j} \bar\xi_i\bar\xi_j[(Pr^i, r^j) + (Pr^{i-1}, r^{j-1}) - (Pr^i, r^{j-1}) \\ &\quad - (Pr^{i-1}, r^j)] - \sum_i (Pr^{i-1}, r^i)\, \bar\xi_i^{\,2} \\ &= \sum_{i<j} (P(r^i - r^{i-1}), r^j - r^{j-1})\, \bar\xi_i\bar\xi_j - \sum_i (Pr^{i-1}, r^i)\, \bar\xi_i^{\,2} \\ &= \sum_{i<j} (P\Delta^i r, \Delta^j r)\, \bar\xi_i\bar\xi_j - \sum_i (Pr^{i-1}, r^i)\, \bar\xi_i^{\,2} = -2\omega_\xi(\bar\xi) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Поскольку $\omega_\xi(\bar\xi)$ неотрицательна на $\mathbf{L}_\xi$, то в силу предложений 6.2 и 6.3 $\omega_\alpha(\bar\alpha)$ неотрицательна на $\mathbf{L}_\alpha$. Таким образом, теорема 6.5 доказана.

7. О приеме овыпукления

Из теорем 5.2 и 5.3 непосредственно вытекает

Теорема 7.1: *Пусть* U *— правильный строго выпуклый компакт, содержащий ноль внутренней точкой. Тогда однообходная экстремаль доставляет сильный* γ*-максимум в задаче* (1.1), (1.2), (5.2).

Отметим, что в случае строго выпуклого U управление u^0 непрерывно и, следовательно, можно положить $\gamma(\delta w) = \|\delta x\|_\infty^2 + \int |\delta u|^2\, dt$.

Теорема 7.1 получена с помощью соответствующего достаточного условия высшего порядка γ. Из неё легко вытекает, что в случае правильного строго выпуклого U любая однообходная экстремаль доставляет сильный максимум в задаче (1.1), (1.2). Итак, в этом случае мы имеем путь доказательства наличия сильного максимума для однообходной экстремали, опирающийся на достаточное условие высшего порядка, а не на факт существования решения в задаче (1.1), (1.2). Имеется ли аналогичный путь в том случае, когда U — выпуклый, но не строго выпуклый компакт? Непосредственное применение условий высшего порядка в этом случае наталкивается на трудность, состоящую в потере усиленного условия Лежандра. Пусть, например, U — многоугольник, содержащий ноль внутри себя. Его можно задать в виде конечной системы неравенств $G_i(u) \leqq 0$ $(i = 1, \ldots; m)$, где G_i — линейные функции. Выписав соответствующие квадратичную форму ω и критическое подпространство, мы не можем воспользоваться достаточным условием высшего порядка (даже при дополнительных ограничениях типа (5.2)), поскольку ω не будет удовлетворять усиленному условию Лежандра, понимаемому в смысле [3, 7]. На первый взгляд, эта трудность представляется непреодолимой. Имеется однако прием, позволяющий восстановить утраченное из-за нестрогой выпуклости U условие Лежандра, но не в исходной задаче с ограничением $u \in U$, а в задаче с ограничением $u \in U'$, где U' таково, что $U = \operatorname{co} U'$ и U' является канонически заданным компактом. Основанием для этого приема служат теорема 5.3 и следующая

Лемма 7.1: *Пусть U — выпуклый компакт,* ex U *— множество его крайних точек. Пусть $w^0 = (x^0, u^0)$ — точка сильного максимума в задаче*

$$J(w) \mapsto \max,\ \dot{x} = u,\ x(0) = x(1),\ u \in \operatorname{ex} U. \tag{7.1}$$

Тогда w^0 — точка сильного максимума в задаче (1.1), (1.2).

Доказательство: Не ограничивая общности можно считать, что x удовлетворяет условиям $x(0) = x(1) = 0$. Пусть w^0 не является точкой сильного максимума в задаче (1.1), (1.2). Это означает, что существует последовательность $\{w^n\}$, $w^n = (x^n, u^n)$, такая, что $\dot{x}^n = u^n$, $x^n(0) = x^n(1) = 0$, $u^n \in U$, $J(w^n) > J(w^0)$ для всех n. Пусть $w = (x, u)$ — произвольный член указанной последовательности $\{w^n\}$. Как известно, существует последовательность $\{\tilde{w}^k\}$, $\tilde{w}^k = (\tilde{x}^k, \tilde{u}^k)$, такая, что

а) $\tilde{u}^k \in \operatorname{ex} U$ п.в. на $[0, 1]$,
б) $\tilde{u}^k \to u$ слабо* в $\mathbf{L}_\infty$,
в) $\|\tilde{x}^k - x\|_\infty \to 0$, где $\dot{\tilde{x}}^k = \tilde{u}^k$, $\tilde{x}^k(0) = \tilde{x}^k(1) = 0$.

Для неё имеем $J(\tilde{w}^k) \to J(w) = J(w^n)$. Отсюда легко следует, что существует допустимая ограничениями в задаче (7.1) последовательность $\{(\hat{x}^m, \hat{u}^m)\} = \{\hat{w}^m\}$ такая, что $\|\hat{x}^m - x^0\|_\infty \to 0$, $J(\hat{w}^m) > J(w^0)$. Следовательно, w^0 не является точкой сильного максимума и в задаче (7.1) ∎

Покажем теперь, как можно с помощью условий высшего порядка установить наличие сильного максимума для однообходной экстремали w^0 в случае правильного, но не строго выпуклого U. По теореме 5.3 U есть овыпукление некоторого канонически заданного компакта U'. По теореме 5.2 (которая и опиралась на достаточное условие высшего порядка) w^0 доставляет сильный γ-максимум в задаче

$$J(w) \to \max,\ \dot{x} = u,\ x(0) = x(1) = b;$$

$$u \in U',\ \int_0^1 (q, x - b)\, dt = 0,$$

где $b = x^0(0)$, q — ненулевой вектор, ортогональный к вектору $r^0 = \int (x^0 - b)\, dt$. Отсюда легко следует, что w^0 доставляет сильный максимум в задаче

$$J(w) \to \max,\ \dot{x} = u,\ x(0) = x(1),\ u \in U'.$$

Поскольку $U' \supset \mathrm{ex}\, U$, то отсюда в силу леммы 7.1 вытекает, что w^0 доставляет сильный максимум и в задаче (1.1), (1.2), что и требовалось доказать.

По-видимому, этот прием представления выпуклого, но не строго выпуклого ограничения $u \in U$ в виде овыпукления невыпуклого ограничения, восстанавливающего усиленное условие Лежандра, является достаточно общим и может быть использован в других классах задач. Впервые на существование такого приема и на возможность его использования для доказательства наличия локального минимума обратил внимание А. А. Милютин.

Автор приносит глубокую благодарность А. А. Милютину за постановку задачи, помощь и внимание к работе. Автор признателен также А. В. Дмитруку за полезные обсуждения.

Литература

[1] Дмитрук, А. В.: Условия типа Якоби неотрицательности квадратичной формы на конечногранном конусе. Изв. Акад. Наук СССР, Сер. мат. **45** (1981), 608 до 619.

[2] Левитин, Е. С., Милютин, А. А., и Н. П. Осмоловский: Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями. Успехи мат. наук **33** (1978) 6, 85—148.

[3] Осмоловский, Н. П.: Необходимые и достаточные условия высшего порядка для понтрягинского и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления. Докл. Акад. Наук СССР, Сер. киб. **303** (1988), 1052—1056.

[4] Осмоловский, Н. П.: Необходимые и достаточные условия высшего порядка для понтрягинского и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления. В сб.: Сборник трудов Всес. научно-иссл. ин-та сист. иссл-ий (ВНИИСИ) Акад. наук СССР (ред.: Б. С. Разумикин). Москва: Изд-во ВНИИСИ 1984, стр. 37 до 47.

[5] Осмоловский, Н. П.: Об исследовании задач оптимального управления с помощью условий высших порядков (примеры). В сб.: Динамика неоднородных систем. Материалы семинара ВНИИСИ (ред.: Ю. С. Попков). Москва: Изд-во ВНИИСИ 1984, стр. 107—117.

[6] Осмоловский, Н. П.: Об условиях типа Лежандра и необходимых условиях высшего порядка для θ-слабого минимума в задаче оптимального управления. В сб.: Сборник трудов ВНИИСИ (в печати).

[7] Осмоловский, Н. П.: Об условиях типа Лежандра и достаточных условиях высшего порядка для θ-слабого и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления. В сб.: Сборник трудов ВНИИСИ (в печати).

[8] Осмоловский, Н. П.: Необходимые и достаточные условия высших порядков в оптимальном управлении. Часть I: Основные результаты, общая теория, основная константа. Деп. в Всес. ин-те научн. и тех. инф-ии (ВИНИТИ) 01. 04. 1986, № 2190 — В, стр. 1—169.

[9] Осмоловский, Н. П.: Необходимые и достаточные условия высших порядков в оптимальном управлении. Часть II: Расшифровка основной константы; условия сильного минимума, условия типа Якоби. Деп. в ВИНИТИ 01. 04. 1986, № 2191 — В, стр. 170—425.

[10] Осмоловский, Н. П.: Условия типа Якоби для разрывного оптимального управления в задаче без локальных ограничений. В сб.: Динамика неоднородных систем. Материалы семинара ВНИИСИ (ред.: Ю. С. Попков). Москва: Изд-во ВНИИСИ 1984, стр. 118—125.

[11] Осмоловский, Н. П.: Необходимые и достаточные условия высшего порядка для понтрягинского и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления. Wiss. Ber. Techn. Hochschule Leipzig 1987, S. 94—96.

[12] Понтрягин, Л. С., Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В., и Е. Ф. Мищенко: Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Изд-во Наука 1961.
[13] Чаплыгин, С. А.: О траектории аэроплана, охватывающей наибольмую площадь. Собрание трудов, т. 1. Москва: Изд-во Акад. Наук 1948, стр. 469–473.

Manuskripteingang: 31. 03. 1988; in revidierter Fassung 16. 06. 1989

VERFASSER:

Д-р Н. П. Осмоловский
Кафедра прикладной математики
Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева
Ярославское шоссе 26
СССР-129337 Москва