Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (4) 1990, S. 289–301

Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf offenen Mengen I[1])

Herrn Prof. Dr. L. Berg zum 60. Geburtstag gewidmet

U. Hamann

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes, glattes Gebiet, Ω_1 mit $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ eine beliebige offene Menge und L ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$ auf Ω. Es wird gezeigt, daß jede Funktion v aus dem Sobolev-Raum $W_p^k(\Omega_1)$ $(-\infty < k \leqq 0, 1 < p < \infty)$ mit $Lv = 0$ in Ω_1 durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme bezüglich Ω in der $W_p^k(\Omega_1)$-Norm approximierbar ist, wenn $C_0^\infty(\Omega_1)$ dicht in $\{f \in W_{p'}^{2m-k}(\mathbf{R}^n): \operatorname{supp} f \subseteqq \bar{\Omega}_1\}$ $(p' = p/(p-1))$ liegt. Für $k \geqq 1$ gilt diese Aussage für alle jene $v \in W_p^k(\Omega_1)$, die zu Funktionen aus $W_p^k(\mathbf{R}^n)$ fortsetzbar sind.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ограниченная, гладкая область, Ω_1 с $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ любое открытое множество и L эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$ на Ω. Доказывается что каждое решение уравнения $Lv = 0$ в Ω_1 из пространства Соболева $W_p^k(\Omega_1)$ $(-\infty < k \leqq 0, 1 < p < \infty)$ можно аппроксимировать в $W_p^k(\Omega_1)$-норме решениями эллиптических краевых задач относительно Ω, если $C_0^\infty(\Omega_1)$ плотно вложено в $\{f \in W_{p'}^{2m-k}(\mathbf{R}^n): \operatorname{supp} f \subseteqq \bar{\Omega}_1\}$ $(p' = p/(p-1))$. В случае $k \geqq 1$ это утверждение верно для всех $v \in W_p^k(\Omega_1)$ которые имеют продолжения в $W_p^k(\mathbf{R}^n)$.

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded, smooth domain, $\Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, an arbitrary open set and L an elliptic differential operator of order $2m$ on Ω. It is proved that every function v from the Sobolev space $W_p^k(\Omega_1)$ $(-\infty < k \leqq 0, 1 < p < \infty)$ with $Lv = 0$ in Ω_1 can be approximated in the $W_p^k(\Omega_1)$-norm by solutions of elliptic boundary value problems with respect to Ω, if $C_0^\infty(\Omega_1)$ is dense in $\{f \in W_{p'}^{2m-k}(\mathbf{R}^n): \operatorname{supp} f \subseteqq \bar{\Omega}_1\}$ $(p' = p/(p-1))$. For $k \geqq 1$ this assertion is true for those $v \in W_p^k(\Omega_1)$, which have an extension to a function from $W_p^k(\mathbf{R}^n)$.

Wir wollen zunächst die Problematik für den Spezialfall des Laplace-Operators erläutern und dabei gleichzeitig einige historische Bemerkungen einfügen. Ausgangspunkt ist das verallgemeinerte Dirichlet-Problem.

Es sei $\omega \subset \mathbf{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge und f eine vorgegebene Funktion aus dem Sobolev-Raum $W_2^1(\mathbf{R}^n)$. Bekanntlich existiert dann genau eine Funktion $f_\omega \in W_2^1(\mathbf{R}^n)$ mit $\Delta f_\omega = 0$ in ω und $(f - f_\omega) \in \mathring{W}_2^1(\omega)$ $\big(\mathring{W}_2^1(\omega)$: Abschließung von $C_0^\infty(\omega)$ in $W_2^1(\mathbf{R}^n)\big)$, d. h., f_ω ist die verallgemeinerte Lösung des Dirichlet-Problems mit den Randwerten f in dem Sinne, daß $(f - f_\omega) \in \mathring{W}_2^1(\omega)$ gelten soll. Weiterhin ist

$$\int |\nabla f_\omega|^2 \, dx = \inf \{\int |\nabla g|^2 \, dx: (f - g) \in \mathring{W}_2^1(\omega)\}.$$

Jetzt seien $f \in W_2^1(\mathbf{R}^n)$ und eine kompakte Menge $K \subset \mathbf{R}^n$ gegeben. Mit K^0 bezeichnen wir das Innere von K. Für alle beschränkten, offenen Mengen $\omega \subset \mathbf{R}^n$ mit $\omega \supset K$ gilt wegen $(f_{K^0} - f_\omega) \in \mathring{W}_2^1(\omega)$ die Ungleichung

$$\int |\nabla f_{K^0}|^2 \, dx \geqq \int |\nabla f_\omega|^2 \, dx.$$

---

[1]) Der abschließende Teil II dieses Beitrages wird in Kürze ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen.

Wir setzen

$$M = \sup\left\{\int |\nabla f_\omega|^2\, dx : \omega \supset K,\ \omega \text{ offen}\right\}.$$

Es existiert dann eine Folge $(\omega_l)_1^\infty$ offener Mengen mit $K \subset \omega_{l+1} \subset \overline{\omega}_{l+1} \subset \omega_l$ und $\int |\nabla f_{\omega_l}|^2\, dx \to M$ für $l \to \infty$. Man kann zeigen, daß $(f_{\omega_l})_1^\infty$ eine Cauchy-Folge in $W_2^1(\mathbf{R}^n)$ ist. Es existiert also ein $f_K \in W_2^1(\mathbf{R}^n)$ mit $f_{\omega_l} \to f_K$ in $W_2^1(\mathbf{R}^n)$, und f_K ist unabhängig von der Wahl der Folge $(\omega_l)_1^\infty$. Weiterhin ist $\Delta f_K = 0$ in K^0. Man nennt f_K die *äußere* und f_{K^0} die *innere Lösung des Dirichlet-Problems für K mit den Randwerten f*.

Definition 1: Die kompakte Menge K heiße (1, 2)-*stabil*, wenn $f_K = f_{K^0}$ für alle $f \in W_2^1(\mathbf{R}^n)$ gilt.

Ist also K (1, 2)-stabil, so kann jede in K^0 harmonische Funktion v, die zu einer Funktion aus $W_2^1(\mathbf{R}^n)$ fortsetzbar ist, in $W_2^1(\mathbf{R}^n)$ approximiert werden durch in Umgebungen von K harmonische Funktionen, die zudem noch Lösungen von verallgemeinerten Dirichlet-Problemen mit den Randwerten v sind. Ob eine Menge K (1, 2)-stabil ist, hängt von der Struktur des Randes von K ab. In [11: Example 1.17] findet man ein Beispiel für eine kompakte Menge K, die nicht (1, 2)-stabil ist.

Wir wollen einige zur (1, 2)-Stabilität äquivalente Aussagen angeben. Dazu setzen wir

$$\mathfrak{H}(K) = \{h \in W_2^1(\mathbf{R}^n) : \Delta h = 0 \text{ in einer von } h \text{ abhängigen Umgebung von } K\}.$$

Theorem 1: *Zur (1, 2)-Stabilität von K sind folgende Aussagen äquivalent:*

(A) $\mathfrak{H}(K)$ *liegt bezüglich der* $W_2^1(\mathbf{R}^n)$-*Norm dicht in* $\{v \in W_2^1(\mathbf{R}^n) : \Delta v = 0$ *in* $K^0\}$.

(B) $C_0^\infty(K^0)$ *liegt bezüglich der* $W_2^1(\mathbf{R}^n)$-*Norm dicht in* $\left(W_2^1(\mathbf{R}^n)\right)_K = \{g \in W_2^1(\mathbf{R}^n) :$ supp $g \subseteqq K\}$.

(C) *Die Menge aller Potentiale* $\int |x - y|^{-(n-2)}\, d\mu(y)$ *aus* $W_2^1(\mathbf{R}^n)$ *(im Fall* $n \geqq 3$*) mit* supp $\mu \subset \mathbf{R}^n \setminus K$ *liegt bezüglich der* $W_2^1(\mathbf{R}^n)$-*Norm dicht in* $\{v \in W_2^1(\mathbf{R}^n) : \Delta v = 0$ *in* $K^0\}$.

Uns interessiert in der vorliegenden Arbeit, ob die Äquivalenz (A) $\Leftrightarrow$ (B) auch für allgemeinere elliptische Differentialoperatoren und allgemeinere Sobolev-Räume gilt.

Es folgen einige Bemerkungen zu (A).

Zu dieser Problematik der Approximation durch Lösungen von Differentialgleichungen ist zunächst die Arbeit [16] von C. RUNGE aus dem Jahre 1885 zu erwähnen. Sie war Ausgangspunkt für zahlreiche weitere Untersuchungen. Insbesondere wurde die Dichtheit von

$$\mathfrak{N}(K) = \{u : Pu = 0 \text{ in einer von } u \text{ abhängigen Umgebung von } K\}$$

in

$$S(K) = \{v \in C(K) : Pv = 0 \text{ in } K^0\}$$

und

$$A_p^0(K) = \{v \in L_p(K) : Pv = 0 \text{ in } K^0\} \quad (1 < p < \infty)$$

für $P = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$ (Cauchy-Riemann-Operator) und $P = \Delta$ untersucht. Zur Dichtheit von $\mathfrak{N}(K)$ in $A_p^0(K)$ für den Cauchy-Riemann-Operator erzielten V. P. HAVIN [8], L. I. HEDBERG [9, 10], T. BAGBY [1, 2] und P. LINDBERG [14] zahlreiche Ergebnisse. Beispielsweise zeigte V. P. HAVIN [8], daß $A_2^0(K^0) \subseteqq \overline{\mathfrak{N}(K)}$ (Abschließung in $L_2(K)$) genau dann gilt, wenn K (1, 2)-stabil ist. Häufig wurden die Bedingungen an K auch mit Hilfe spezieller Kapazitäten angegeben. Das folgende wichtige Resultat stammt von J. C. POLKING [15].

Theorem 2: *Besitzt der elliptische Differentialoperator* $P = \sum_{|\alpha| \leq r} b_\alpha(x)\, D^\alpha$ $(b_\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}^n))$ *eine bireguläre Fundamentallösung, so liegt* $\mathfrak{N}(K)$ *in* $A_p^0(K)$ $(1 < p < \infty)$ *bezüglich der* $L_p(K)$-*Norm* *genau dann dicht, wenn $C_0^\infty(K^0)$ in $(W^r_{p'}(\mathbf{R}^n))_K = \{g \in W^r_{p'}(\mathbf{R}^n): \operatorname{supp} g \subseteq K\}$ $(p' = p/(p-1))$ dicht liegt.*

Dies ist also bereits eine Ausdehnung der Äquivalenz (A) $\Leftrightarrow$ (B) auf allgemeinere Differentialoperatoren. Weiterhin sind für recht allgemeine elliptische Differentialoperatoren die Ergebnisse von F. E. BROWDER [4] zu erwähnen.

Jetzt einige Bemerkungen zu (B).

Es hat sich in der Literatur durchgesetzt, die Variante (B) der Definition der Stabilität als Ausgangspunkt für eine Verallgemeinerung zu nehmen (s. [11, 12], [18: S. 313]).

Definition 2: Die kompakte Menge $K \subset \mathbf{R}^n$ heiße *(s, p)-stabil* ($s > 0$ ganz, $1 < p < \infty$), wenn $C_0^\infty(K^0)$ in $(W_p^s(\mathbf{R}^n))_K$ dicht liegt.

T. BAGBY [3] fand 1984 eine notwendige und hinreichende Bedingung für die (s, p)-Stabilität.

In einem engen Zusammenhang zu diesem Stabilitätsbegriff steht der Begriff der *(s, p)-Spektralsynthese.* Ursprünglich wurde gesagt, daß eine abgeschlossene Menge $E \subset \mathbf{R}^n$ die $(1, 2)$-Spektralsynthese erfüllt, wenn die Menge aller Potentiale $\int |x - y|^{-(n-2)} \, d\mu(y)$ aus $W_2^1(\mathbf{R}^n)$ $(n \geq 3)$ mit $\operatorname{supp} \mu \subseteq E$ dicht in $\{v \in W_2^1(\mathbf{R}^n): \Delta v = 0 \text{ in } \mathbf{R}^n \setminus E\}$ liegt (vgl. mit (C)). Es zeigt sich, daß dies genau dann der Fall ist, wenn $C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus E)$ dicht in $\{f \in W_2^1(\mathbf{R}^n): f|_E = 0\}$ liegt. Um einen Vergleich zur $(1, 2)$-Stabilität (Variante (B)) von K zu haben, muß man $E = \mathbf{R}^n \setminus K^0$ setzen. Wie der Begriff der Spektralsynthese verallgemeinert wurde, findet man in Lemma 8 und in der dort nachfolgenden Bemerkung. Erst vor wenigen Jahren gelang es L. I. HEDBERG und TH. H. WOLFF [13] zu zeigen, daß jede abgeschlossene Menge diese verallgemeinerte Spektralsynthese erfüllt.

Nun zu den Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit. Die zu approximierenden Funktionen sind hier auf einer offenen Menge Ω_1 (statt auf K) vorgegeben, und approximiert werden sollen sie durch Lösungen von Randwertproblemen bezüglich eines Ω_1 umfassenden Gebiets $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ (statt durch Lösungen der homogenen Differentialgleichung in irgendwelchen Umgebungen von $\bar{\Omega}_1$). Gegeben sei also ein elliptisches Randwertproblem in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ mit dem Differentialoperator L sowie eine offene Menge $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ (d. h. $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$). Wir lassen die rechte Seite der Differentialgleichung lediglich auf einer vorgegebenen offenen Menge $U \subset \subset \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ variieren — auf $\Omega \setminus U$ soll sie stets Null sein; ebenso sollen die Randvorgaben auf $\partial\Omega$ Null sein. $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ sei die Menge der Lösungen der so entstehenden Randwertprobleme. Insbesondere genügen dann alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$ der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ in der (festen) Umgebung $\Omega \setminus \bar{U}$ von $\bar{\Omega}_1$. Mittels dieser Funktionen aus $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ sollen nun Funktionen v aus dem Sobolev-Raum $W_p^k(\Omega_1)$ $(1 < p < \infty; -\infty < k < \infty)$, die in Ω_1 Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lv = 0$ sind, in der $W_p^k(\Omega_1)$-Norm approximiert werden. Ob sämtliche solche Funktionen v in dieser Weise approximierbar sind, hängt von der Struktur des Randes von Ω_1 ab. Es zeigt sich, daß sich die Bedingungen an Ω_1 wieder mittels des Stabilitätsbegriffs angeben lassen (Satz 1). Weiterhin sind diese Bedingungen an Ω_1 unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen auch notwendig (Satz 2).

Während es also in diesem vorliegenden Teil I um die Approximation von Lösungen aus den Sobolev-Räumen $W_p^k(\Omega_1)$ geht, soll im nachfolgenden Teil II die gleiche Problematik für Lösungen aus $C^k(\bar{\Omega}_1)$ behandelt werden.

1. Voraussetzungen, Definitionen

1.1. Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem C^∞-glatten Rand $\partial\Omega$. Vom Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha \quad (a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega}))$$

und vom System

$$B = \{B_j\}_1^m \quad \text{mit } B_j = \sum_{|\alpha| \leqq m_j} B_{j,\alpha} D^\alpha, \quad B_{j,\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

von Randoperatoren auf $\partial\Omega$ fordern wir folgendes:

1. L ist auf $\bar{\Omega}$ eigentlich elliptisch (s. z. B. [20: S. 146]).
2. B ist normal (s. z. B. [20: S. 214]).
3. $m_j \leqq 2m - 1$ für $j = 1, \ldots, m$.
4. B überdeckt L auf $\partial\Omega$ (s. z. B. [18: S. 162]).

Zur Abkürzung setzen wir $Bu = \{B_j u|_{\partial\Omega}\}_1^m$.

1.2. Es sei $U \subset\subset \Omega$ eine beliebige, dann aber fest gewählte offene Teilmenge von Ω. Wir definieren

$$\mathfrak{M}_U(\Omega) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \operatorname{supp} Lu \subset U,\ Bu = 0\}.$$

$\mathfrak{M}_U(\Omega)$ besteht gerade aus den Lösungen von Randwertproblemen der Gestalt $Lu = f$ in Ω, $Bu = 0$, wobei f in $C_0^\infty(U)$ variiert.

1.3. Es sei

$$L^*u := \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha u)$$

der im Sinne der Distributionentheorie formal duale Operator zu L. Für diesen definieren wir die folgende Eigenschaft.

$(\mathrm{U})_s$ L^* besitzt in einem Gebiet $\tilde{\Omega} \subsetneqq \Omega$ die *Eindeutigkeitseigenschaft des Cauchy-Problems im Kleinen*, wenn aus $L^*u = 0$ in $\tilde{\Omega}$ und $u \equiv 0$ auf irgendeiner nichtleeren offenen Teilmenge $\omega \subset \tilde{\Omega}$ folgt, daß $u \equiv 0$ auf ganz $\tilde{\Omega}$ ist.

Diese Eigenschaft ist z. B. erfüllt, wenn die Koeffizienten von L^* auf $\tilde{\Omega}$ reell analytisch sind.

1.4. In der gesamten Arbeit ist p stets eine reelle Zahl mit $1 < p < \infty$ und $p' = p/(p-1)$. Mit $W_p^s(\Omega)$ ($s \geqq 0$, ganz) bezeichnen wir die klassischen Sobolev-Räume und mit $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $W_p^s(\Omega)$-Norm. $W_p^{-s}(\Omega)$ ($s \geqq 0$) sei der Dualraum von $\mathring{W}_{p'}^s(\Omega)$. Die Norm in $W_p^s(\Omega)$ ($-\infty < s < \infty$) bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$. Für kompakte Mengen $K \subset \Omega$ und $-\infty < s < \infty$ setzen wir

$$\left(W_p^s(\Omega)\right)_K = \{f \in W_p^s(\Omega) : \operatorname{supp} f \subsetneqq K\}.$$

Weiterhin definieren wir für kompakte Mengen $K \subset \mathbf{R}^n$ und $s \geqq 0$

$$W_p^s(K) = \left\{\dot{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha| \leqq s} \in \prod_{|\alpha| \leqq s} L_p(K) : \exists f \in W_p^s(\mathbf{R}^n) \text{ mit } D^\alpha f|_K = f_\alpha, |\alpha| \leqq s\right\}.$$

In $W_p^s(K)$ führen wir die Norm

$$\|\dot{f}\|_{s,p,K} = \sum_{|\alpha| \leqq s} \|f_\alpha\|_{L_p(K)}$$

ein. Hat der Rand einer offenen Menge Ω_1 das n-dimensionale Lebesgue-Maß Null und besitzt $W_p^s(\Omega_1)$ einen stetigen Fortsetzungsoperator, so ist $W_p^s(\bar{\Omega}_1)$ ein Banach-Raum. Darüber hinaus sind dem Verfasser zur Zeit keine Bedingungen bekannt, die die Vollständigkeit von $W_p^s(\bar{\Omega}_1)$ garantieren.

1.5. In Anlehnung an den Stabilitätsbegriff für kompakte Mengen (Definition 2) wollen wir jetzt für offene Mengen und beliebige Differentiationsindizes einen Stabilitätsbegriff definieren.

Definition 3: Eine beschränkte, offene Menge $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ heiße *(s, p)-stabil* $(-\infty < s < \infty,\ 1 < p < \infty)$, falls $C_0^\infty(\Omega_1)$ bezüglich der $W_p^s(\mathbf{R}^n)$-Norm in $\left(W_p^s(\mathbf{R}^n)\right)_{\bar{\Omega}_1}$ dicht liegt.

Falls Ω_1 keine inneren Randpunkte besitzt, also $\Omega_1 = (\bar{\Omega}_1)^0$ gilt, ist Ω_1 für $s > 0$ bezüglich der Definition 3 genau (s, p)-stabil, wenn dies für $\bar{\Omega}_1$ bezüglich der Definition 2 gilt. Im Fall $\Omega_1 \neq (\bar{\Omega}_1)^0$ dagegen fallen beide Stabilitätsdefinitionen nicht zusammen.

Mit Hilfe von Begriffen aus der L_p-Kapazitätstheorie kann man Kriterien für die (s, p)-Stabilität offener Mengen finden, die nur recht schwache Bedingungen enthalten. Diese Kriterien werden in [7] angegeben (vgl. auch [5]). Wir wollen uns hier nur auf einige Spezialfälle beschränken:

1. Für $s > 0$ und $sp > n$ ist eine offene Menge Ω_1 genau dann (s, p)-stabil, wenn $\Omega_1 = (\bar{\Omega}_1)^0$ gilt.
2. Für $s < 0$ und $(-s)\, p/(p - 1) > n$ sind sämtliche offenen Mengen (s, p)-stabil.
3. Jede offene Menge, deren Rand das n-dimensionale Lebesgue-Maß Null hat, ist $(0, p)$-stabil für alle p mit $1 < p < \infty$.

Weiterhin ist jede offene Menge, die die Segmenteigenschaft (vgl. [20: S. 44]) besitzt, (s, p)-stabil für alle ganzen Zahlen s und alle p.

2. Sätze

Es sei $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ (d. h. $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$) eine beliebige offene Menge. Für $-\infty < k < \infty$ definieren wir

$$A_p^k(\Omega_1) = \{v \in W_p^k(\Omega_1) : Lv = 0 \text{ in } \Omega_1\}$$

und für $0 \leqq k < \infty$

$$A_p^k(\bar{\Omega}_1) = \{\vec{v} = \{v_\alpha\}_{|\alpha| \leq k} \in W_p^k(\bar{\Omega}_1) : Lv_0 = 0 \text{ in } \Omega_1\}$$

(v_0 ist v_α mit $\alpha = (0, \ldots, 0)$). Weiterhin sei R_k definiert durch

$$R_k \bar{u} = \{D^\alpha u|_{\bar{\Omega}_1}\}_{|\alpha| \leq k} \quad (k \geqq 0).$$

Alle Lösungen v der homogenen Differentialgleichung $Lv = 0$ in Ω_1 gehören natürlich zu $C^\infty(\Omega_1)$. Die Bedeutung der Forderung $v \in W_p^k(\Omega_1)$ in der Definition von $A_p^k(\Omega_1)$ liegt gerade darin, daß sie eine Einschränkung an das Verhalten von v in der Nähe von $\partial\Omega_1$ beinhaltet. Bei der Definition von $A_p^k(\bar{\Omega}_1)$ wird zudem noch die Fortsetzbarkeit in $\mathbf{R}^n$ gefordert. Es ist noch zu beachten, daß das n-dimensionale Lebesgue-Maß von $\partial\Omega_1$ auch positiv sein kann. In solch einem Fall ist beispielsweise für $u \in W_p^k(\mathbf{R}^n)$ die Ungleichung $\|u|_{\Omega_1}\|_{k,p,\Omega_1} < \|R_k u\|_{k,p,\bar{\Omega}_1}$ möglich.

Nun zu den beiden Sätzen.

Satz 1: *L^* besitze in jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ die Eigenschaft* $(\mathrm{U})_s$. *Weiterhin liege in jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ eine nichtleere offene Teilmenge von $U \subset\subset \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. Aus der $(2m - k, p')$-Stabilität von Ω_1 folgt dann*

(i) *für $k < 0$*

$$A_p^k(\Omega_1) \subseteqq \overline{\mathfrak{M}_U(\Omega)|_{\Omega_1}}$$

(Abschließung in der $W_p^k(\Omega_1)$-Norm),

(ii) *für* $k \geqq 0$

$$A_p^k(\bar{\Omega}_1) \subseteq \overline{R_k \mathfrak{N}_U(\Omega)}$$

(*Abschließung in der* $W_p^k(\bar{\Omega}_1)$-*Norm*),

(iii) *für* $k \geqq 0$

$$A_p^k(\Omega_1) \cap \{v \in W_p^k(\Omega_1) : \exists\, \tilde{v} \in \mathring{W}_p^k(\Omega) \text{ mit } \tilde{v}|_{\Omega_1} = v\} \subseteq \overline{\mathfrak{N}_U(\Omega)|_{\Omega_1}}$$

(*Abschließung in der* $W_p^k(\Omega_1)$-*Norm*).

Die $(2m - k, p')$-Stabilität von Ω_1 ist im wesentlichen auch notwendig für die Approximation. Dies zeigt der

Satz 2: *L^* besitze in einer offenen Umgebung $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ von $\bar{\Omega}_1$ die Eigenschaft* $(\mathrm{U})_s$.

(i) *Für* $k < 0$ *folgt aus*

$$A_p^k(\Omega_1) \subseteq \overline{\mathfrak{N}_U(\Omega)|_{\Omega_1}} \tag{1}$$

Abschließung in der $W_p^k(\Omega_1)$-*Norm) und der* $(-k, p')$-*Stabilität von* Ω_1 *die* $(2m - k, p')$-*Stabilität von* Ω_1.

(ii) *Für* $k \geqq 0$, *wenn* $W_p^k(\bar{\Omega}_1)$ *ein Banach-Raum ist, folgt aus*

$$A_p^k(\bar{\Omega}_1) \subseteq \overline{R_k \mathfrak{N}_U(\Omega)} \tag{2}$$

(*Abschließung in der* $W_p^k(\bar{\Omega}_1)$-*Norm*) *die* $(2m - k, p')$-*Stabilität von* Ω_1.

Satz 2/(i) läßt sich vermutlich durch Verzicht auf die Voraussetzung der $(-k, p')$-Stabilität verbessern. Bei der hier verwendeten Beweismethode wird diese Voraussetzung jedoch benötigt. Beide Sätze gelten auch dann, wenn man $\mathfrak{N}_U(\Omega)$ durch eine andere Klasse von Lösungen, und zwar durch

$$\mathfrak{N}_V(\Omega) := \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) : Lu = 0 \text{ in } \Omega,\ B_j u|_{\partial\Omega \setminus V} = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, m\}$$

(V: offene Teilmenge des Randes $\partial\Omega$) ersetzt. Die Voraussetzungen brauchen dabei nur etwas modifiziert zu werden. Wesentlich ist nur, daß im Satz 1 $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ dann zusammenhängend sein muß (vgl. [6]).

Es sollen jetzt die beiden Sätze anhand eines Beispiels illustriert werden. Als Randwertproblem bezüglich Ω nehmen wir dazu das Dirichlet-Problem für den Laplace-Operator. Es ist also $2m = 2$. Weiterhin sei $n = 3$, $p = p' = 2$ und $k = -1$. Als Voraussetzung im Satz 1/(i) benötigt man die (3, 2)-Stabilität von Ω_1. Diese ist wegen $3 \cdot 2 = sp > n = 3$ gleichbedeutend mit $\Omega_1 = (\bar{\Omega}_1)^0$. Satz 1/(i) besagt dann:

Ist $\Omega_1 = (\bar{\Omega}_1)^0$, so existiert zu jeder Funktion $v \in W_2^{-1}(\Omega_1)$ mit $\Delta v = 0$ in Ω_1 und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(U)$, so daß für die Lösung u des Randwertproblems $\Delta u = \varphi$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$ die Ungleichung $\|u|_{\Omega_1} - v\|_{-1,2,\Omega_1} < \varepsilon$ gilt.

Die Funktion u ist dabei aus $\mathfrak{N}_U(\Omega)$, und es gilt $\Delta u = 0$ in der Umgebung $\Omega \setminus \bar{U}$ von $\bar{\Omega}_1$. Weiterhin ist zu beachten, daß die Funktion φ auf einer Menge konzentriert ist, die „beliebig klein" sein kann.

Will man diese Approximation praktisch durchführen, so liegt die Schwierigkeit natürlich darin, die geeignete rechte Seite φ zu finden. Unter anderem benötigt man dazu die explizite Gestalt der Greenschen Funktion. Es sei erwähnt, daß man als approximierende Funktionen auch Linearkombinationen von Fundamentallösungen mit außerhalb von $\bar{\Omega}_1$ liegenden Aufpunkten nehmen kann. (Diese Funktionen sind dann allerdings keine Lösungen von Randwertproblemen!) Hierbei bieten sich praktikable Möglichkeiten, die entsprechenden Koeffizienten zu bestimmen.

Nun zu Satz 2/(i). Er beinhaltet für den betrachteten Spezialfall folgendes:
Ist jede Funktion $v \in W_2^{-1}(\Omega_1)$ mit $\Delta v = 0$ in Ω_1 in der obigen Weise approximierbar und ist zudem Ω_1 noch (1, 2)-stabil, so muß notwendig $\Omega_1 = (\bar{\Omega}_1)^0$ gelten.

3. Vorbereitungen für die Beweise

3.1. Ist X ein normierter Raum, so wird mit X' sein Dualraum und mit $\langle F, f\rangle$ die Anwendung eines Funktionals $F \in X'$ auf $f \in X$ bezeichnet. Die Beweise der Sätze 1 und 2 beruhen auf einer Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach.

Lemma 1: *Es sei X ein normierter Raum, und X_0, X_1 seien lineare Teilmengen von X mit $X_0 \subset X_1$. Ist für jedes $F \in X'$ mit $\langle F, f_0\rangle = 0$ für alle $f_0 \in X_0$ auch $\langle F, f_1\rangle = 0$ für alle $f_1 \in X_1$, so gilt $\bar{X}_0 \supseteqq X_1$.*

Sind X und Y normierte Räume, so sei $L(X, Y)$ die Menge aller stetigen und linearen Operatoren von X in Y. Für $A \in L(X, Y)$ sei $A' \in L(Y', X')$ der duale Operator.

3.2. Es sei $B^* = \{B_j^*\}_1^m$ ein entsprechend der Greenschen Formel zu $B = \{B_j\}_1^m$ adjungiertes System von Randoperatoren, d. h., es gilt

$$\int_\Omega (Lu\, v - uL^*v)\, dx = \sum_{j=1}^m \int_{\partial\Omega} (C_j u B_j^* v - B_j u\, C_j^* v)\, d\sigma \tag{3}$$

für alle $u, v \in C^{2m}(\bar{\Omega})$, wobei $\{C_j\}_1^m$ und $\{C_j^*\}_1^m$ gewisse Systeme von Randoperatoren auf $\partial\Omega$ sind (vgl. [20: S. 218]). Wir definieren

$$N = \operatorname{Ker}(\{L, B\}) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \colon Lu = 0 \text{ in } \Omega,\ Bu = 0\}$$

und

$$N^* = \operatorname{Ker}(\{L^*, B^*\}) = \{w \in C^\infty(\bar{\Omega}) \colon L^*w = 0 \text{ in } \Omega,\ B^*w = 0\}.$$

$f \perp N$ und $f \perp N^*$ soll $\int_\Omega fh\, dx = 0$ für alle $h \in N$ bzw. für alle $h \in N^*$ bedeuten.

Das Randwertproblem

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad Bu = 0 \tag{4}$$

mit $f \in W_p^s(\Omega)$ ($s \geqq 0$, $1 < p < \infty$) besitzt bekanntlich genau dann eine Lösung, wenn $f \perp N^*$ gilt. Genügt f dieser Bedingung und ist u eine Lösung von (4), so erhält man durch $u = \tilde{u} + u_0$ mit einem beliebigen $u_0 \in N$ die Gesamtheit aller Lösungen von (4). Sämtliche Lösungen sind aus $W_p^{s+2m}(\Omega)$.

Den Operator G, welcher jedem $f \in W_p^s(\Omega)$ mit $f \perp N^*$ diejenige Lösung u des Problems (4) zuordnet, für die $\bar{u} \perp N$ ($\bar{u}$: konjugiert komplexe Funktion zu u) gilt, bezeichnen wir als *Greenschen Operator*. Wir setzen G auf ganz $W_p^s(\Omega)$ fort, indem wir $G\bar{w} = 0$ für alle $w \in N^*$ definieren. Es gilt dann (s. [6: Lemma 2]) das

Lemma 2: *Für alle ganzen Zahlen $s \geqq 0$ und alle reellen Zahlen p mit $1 < p < \infty$ gilt folgendes:*

(i) $G \in L\big(W_p^s(\Omega), W_p^{s+2m}(\Omega)\big)$,
(ii) *$LGf = f$ für alle $f \in W_p^s(\Omega)$ mit $f \perp N^*$,*
(iii) *$GLu = u + u_0$ für alle $u \in W_p^{s+2m}(\Omega)$ mit $Bu = 0$, wobei $u_0 \in N$ ist.*

Durch analoge Überlegungen kann der Greensche Operator G^* für das Randwertproblem $L^*v = g$ in Ω, $B^*v = 0$ definiert werden. Das Lemma 2 gilt dann natürlich singgemäß auch für G^*. Aus der Greenschen Formel (3) folgt

$$\int_\Omega Lu\, v\, dx = \int_\Omega u\, L^*v\, dx$$

für alle $u, v \in C^{2m}(\bar\Omega)$ mit $Bu = 0$ und $B^*v = 0$. Daraus läßt sich

$$\int_\Omega f\, G^*g\, dx = \int_\Omega Gf\, g\, dx \tag{5}$$

für alle $f, g \in W_p^s(\Omega)$ $(s \geqq 0)$ folgern.

3.3. Wir werden nun einige Folgerungen aus der Schauderschen Ungleichung formulieren.

Lemma 3 (vgl. [18: S. 166, 17]): *Es sei s eine beliebige ganze Zahl, $1 < p < \infty$ und $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Dann gilt die Schaudersche Ungleichung*

$$\|v\|_{s,p,\Omega} \leqq C(\|L^*v\|_{s-2m,p,\Omega} + \|v\|_{s-2m,p,\Omega})$$

für alle $v \in (W_p^s(\Omega))_K$ mit einer Konstanten $C = C(s, p) < \infty$.

Lemma 4 (s. [20: Satz 12.12]): *Der Banach-Raum X sei kompakt in den Banach-Raum Y eingebettet. Weiterhin sei $A \in L(X, Y)$. Gibt es dann eine Konstante $C < \infty$ mit $\|u\|_X \leqq C(\|Au\|_Y + \|u\|_Y)$ für alle $u \in X$, so ist der Bildraum von A in Y abgeschlossen.*

Aus diesen beiden Lemmata folgt unmittelbar das

Lemma 5: *Es sei s eine beliebige ganze Zahl, $1 < p < \infty$ und $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Dann ist $L^*((W_p^s(\Omega))_K)$ in $W_p^{s-2m}(\Omega)$ abgeschlossen.*

Damit können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 6: *Es sei s eine beliebige ganze Zahl, $1 < p < \infty$ und $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ eine offene Menge. L^* besitze in jeder Zusammenhangskomponente einer Umgebung $\tilde\Omega \subseteqq \Omega$ von $\bar\Omega_1$ die Eigenschaft* $(\mathrm{U})_s$. *Dann folgt aus $L^*((W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1}) \subseteqq \overline{L^*(C_0^\infty(\Omega_1))}^{\|\cdot\|_{s-2m,p,\Omega}}$ die (s, p)-Stabilität von Ω_1.*

Beweis: 1. Es sei $u \in (W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1}$ ein beliebiges Element mit $L^*u = 0$ in Ω. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und $u \equiv 0$ auf $\Omega\setminus\bar\Omega_1$, also insbesondere auch auf $\tilde\Omega\setminus\bar\Omega_1$. In jeder Zusammenhangskomponente von $\tilde\Omega$ ist offenbar eine nichtleere offene Teilmenge von $\tilde\Omega\setminus\bar\Omega_1$ enthalten. Aus der Eigenschaft $(\mathrm{U})_s$ folgt $u \equiv 0$ auf $\tilde\Omega$ und damit auch auf ganz Ω. L^* ist also ein Operator, der $(W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1}$ eineindeutig und stetig auf den nach Lemma 5 abgeschlossenen Teilraum $L^*((W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1}) \subset W_p^{s-2m}(\Omega)$ abbildet. Aus dem Homomorphiesatz (s. z. B. [19: S. 139]) folgt die Stetigkeit des inversen Operators und damit die Existenz einer Konstanten $C < \infty$ mit

$$\|v\|_{s,p,\Omega} \leqq C\, \|L^*v\|_{s-2m,p,\Omega} \text{ für alle } v \in (W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1}. \tag{6}$$

2. Zu jedem Element $v \in (W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1}$ existiert nach Voraussetzung eine Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ mit $\|L^*v - L^*\varphi_l\|_{s-2m,p,\Omega} \to 0$. Mittels (6) folgt daraus $\|v - \varphi_l\|_{s,p,\Omega} \to 0$. Damit ist $(W_p^s(\Omega))_{\bar\Omega_1} \subseteqq \overline{C_0^\infty(\Omega_1)}^{\|\cdot\|_{s,p,\Omega}}$. Da die umgekehrte Relation stets gültig ist, ergibt sich daraus die (s, p)-Stabilität von Ω_1 ∎

3.4. Wir benötigen noch zwei weitere Lemmata. Die folgende Regularitätsaussage findet man z. B. in [4: S. 211].

Lemma 7: *Es sei s eine beliebige ganze Zahl, $1 < p < \infty$ sowie $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Aus $u \in \left(W_p{}^s(\Omega)\right)_K$ und $L^*u \in \left(W_p{}^s(\Omega)\right)_K$ folgt dann $u \in \left(W_p{}^{s+2m}(\Omega)\right)_K$.*

Lemma 8: *Für jede abgeschlossene Menge $E \subset \mathbf{R}^n$, jede ganze Zahl $s > 0$ und jede reelle Zahl p mit $1 < p < \infty$ existiert zu jeder Funktion $f \in W_p{}^s(\mathbf{R}^n)$ mit $D^\alpha f|_E = 0$ für $|\alpha| \leqq s - 1$ eine Folge $(\varphi_l)_1{}^\infty \subset C_0{}^\infty(\mathbf{R}^n \setminus E)$ mit $\|\varphi_l - f\|_{s,p,\mathbf{R}^n} \to 0$.*

In der Literatur wird diese Aussage auch so formuliert, daß jede abgeschlossene Menge für alle ganzen Zahlen $s > 0$ und alle reellen Zahlen p mit $1 < p < \infty$ die sogenannte *(s, p)-Spektralsynthese* erfüllt. Dieses wichtige Lemma wurde 1983 von L. I. Hedberg und Th. H. Wolff [13] bewiesen.

4. Beweis von Satz 1

4.1. *Beweis von Satz* 1/(i). **1.** Es ist $k < 0$. $T \in \left(W_p{}^k(\Omega_1)\right)' = \mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega_1)$ sei ein stetiges, lineares Funktional mit

$$\langle T, u|_{\Omega_1}\rangle = 0 \tag{7}$$

für alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Für (7) kann auch

$$\int_{\Omega_1} T(x)\, u|_{\Omega_1}(x)\, dx = 0$$

geschrieben werden. Wir werden $\langle T, v\rangle = 0$ für alle $v \in A_p{}^k(\Omega_1)$ zeigen. Mittels Lemma 1 folgt daraus dann die Behauptung.

2. Wir setzen $T \in \mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega_1)$ durch Null fort zu $\tilde{T} \in \left(W_{p'}^{-k}(\Omega)\right)_{\bar{\Omega}_1}$. Wegen $\tilde{T}|_{\Omega\setminus\Omega_1} = 0$ gilt dann

$$\langle \tilde{T}, u\rangle = \int_\Omega \tilde{T}(x)\, u(x)\, dx = \int_{\Omega_1} T(x)\, u|_{\Omega_1}(x)\, dx = 0$$

für alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Wegen $N \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ gilt also $\tilde{T} \perp N$. Wendet man Lemma 2/(ii) auf das durch L^* und B^* definierte Randwertproblem an, so ergibt sich daraus $L^*G^*\tilde{T} = \tilde{T}$. Dabei ist $G^* \in L\left(\mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega), W_{p'}^{2m-k}(\Omega)\right)$ der zugehörige Greensche Operator.

3. Ist $\varphi \in C_0{}^\infty(U)$ eine beliebige Funktion mit $\varphi \perp N^*$, so gilt nach Lemma 2/(ii) $LG\varphi = \varphi$, also $G\varphi \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Aus (5) und (7) folgt $\langle G^*\tilde{T}, \varphi\rangle = \langle \tilde{T}, G\varphi\rangle = 0$ für alle diese φ. Daraus kann $G^*\tilde{T} = w_0$ auf U mit einer Funktion $w_0 \in N^*$ gefolgert werden (vgl. [6: S. 295]).

4. Damit gilt $L^*(G^*\tilde{T} - w_0) = 0$ auf $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$ und $(G^*T - w_0) \equiv 0$ auf $U \subset \Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Aus der vorausgesetzten Eigenschaft $(\mathrm{U})_s$ von L^* folgt $(G^*\tilde{T} - w_0) \equiv 0$ auf ganz $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Es gilt also $(G^*\tilde{T} - w_0) \in \left(W_{p'}^{2m-k}(\Omega)\right)_{\bar{\Omega}_1}$ und $L^*(G^*\tilde{T} - w_0) = \tilde{T}$.

5. Aufgrund der $(2m - k, p')$-Stabilität von Ω_1 gibt es eine Folge $(\varphi_l)_1{}^\infty \subset C_0{}^\infty(\Omega_1)$ mit $\|(G^*\tilde{T} - w_0) - \varphi_l\|_{2m-k,p',\Omega} \to 0$. Daraus erhalten wir

$$\lim_{l\to\infty} \|L^*(G^*\tilde{T} - w_0) - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega} = \lim_{l\to\infty} \|\tilde{T} - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega} = 0.$$

Aus $\tilde{T}|_{\Omega_1} = T$ und $\|T - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega_1} \leqq \|\tilde{T} - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega}$ folgt dann

$$\|T - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega_1} \to 0.$$

Für jedes $v \in A_p{}^k(\Omega_1)$ (d. h. $v \in W_p{}^k(\Omega_1)$, $Lv = 0$ in Ω_1) erhalten wir $\langle T, v\rangle = \lim \langle L^*\varphi_l, v\rangle = \lim \langle \varphi_l, Lv\rangle = 0$, woraus sich die Behauptung ergibt ∎

4.2. *Beweis von Satz* 1/(ii). **1.** Es ist $k \geqq 0$. $T \in (W_p^k(\bar{\Omega}_1))'$ sei ein stetiges, lineares Funktional mit

$$\langle T, R_k u\rangle = 0 \tag{8}$$

für alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Daraus werden wir $\langle T, \dot{v}\rangle = 0$ für alle $\dot{v} \in A_p^k(\bar{\Omega}_1)$ schließen.

2. Es ist $R_k \in L(W_p^k(\Omega), W_p^k(\bar{\Omega}_1))$ und $R_k' \in L((W_p^k(\bar{\Omega}_1))', (W_p^k(\Omega))')$. Aus Lemma 2/(i) erhalten wir

$$G \in L(\mathring{W}_p^{\max\{0,k-2m\}}(\Omega), W_p^k(\Omega)) \text{ und } G' \in L((W_p^k(\Omega))', W_{p'}^{\min\{0,2m-k\}}(\Omega)).$$

Es gilt also

$$G'R_k'T \in W_{p'}^{\min\{0,2m-k\}}(\Omega) \text{ und } R_k'T \in (W_p^k(\Omega))'.$$

Wegen $\langle R_k'T, f\rangle = \langle T, R_k f\rangle = 0$ für alle $f \in W_p^k(\Omega)$ mit $f \equiv 0$ in einer Umgebung von $\bar{\Omega}_1$ ist supp $R_k'T \subseteqq \bar{\Omega}_1$, woraus $R_k'T \in (W_{p'}^{-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}$ gefolgert werden kann.

3. Für beliebige Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt nach Lemma 2/(iii) $GL\varphi = \varphi + \varphi_0$ mit einer Funktion $\varphi_0 \in N$. Aus $N \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ und (8) folgt $\langle R_k'T, \varphi_0\rangle = \langle T, R_k\varphi_0\rangle = 0$. Damit erhalten wir $\langle G'R_k'T, L\varphi\rangle = \langle R_k'T, GL\varphi\rangle = \langle R_k'T, \varphi + \varphi_0\rangle = \langle R_k'T, \varphi\rangle$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, also $L^*(G'R_k'T) = R_k'T$ auf Ω im distributionentheoretischen Sinne. Da $R_k'T$ auf $\bar{\Omega}_1$ konzentriert ist, gilt insbesondere $L^*(G'R_k'T) = 0$ auf $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$.

4. Es sei jetzt $\varphi \in C_0^\infty(U)$ eine beliebige Funktion mit $\varphi \perp N^*$. Nach Lemma 2/(ii) ist dann $LG\varphi = \varphi$, also $G\varphi \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Aus (8) ergibt sich $\langle G'R_k'T, \varphi\rangle = \langle T, R_k(G\varphi)\rangle = 0$ für alle diese φ. Daraus kann $G'R_k'T = w_0$ auf U mit einer Funktion $w_0 \in N^*$ gefolgert werden (vgl. [6: S. 295]).

5. Damit gilt $L^*(G'R_k'T - w_0) = 0$ auf $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$ und $(G'R_k'T - w_0) \equiv 0$ auf $U \subset \Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Aus der vorausgesetzten Eigenschaft $(U)_s$ von L^* folgt $(G'R_k'T - w_0) \equiv 0$ auf ganz $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Es ist also

$$(G'R_k'T - w_0) \in (W_{p'}^{\min\{0,2m-k\}}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1} \subset (W_{p'}^{-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}$$

und

$$L^*(G'R_k'T - w_0) = R_k'T \in (W_{p'}^{-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}.$$

Aus Lemma 7 folgt $(G'R_k'T - w_0) \in (W_{p'}^{2m-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}$.

6. Aus der vorausgesetzten $(2m - k, p')$-Stabilität von Ω_1 ergibt sich die Existenz einer Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ mit $\|(G'R_k'T - w_0) - \varphi_l\|_{2m-k,p',\Omega} \to 0$. Daraus erhalten wir

$$\lim_{l\to\infty} \|L^*(G'R_k'T - w_0) - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega} = \lim_{l\to\infty} \|R_k'T - L^*\varphi_l\|_{-k,p',\Omega} = 0. \tag{9}$$

Es sei nun $\dot{v} \in A_p^k(\bar{\Omega}_1)$ ein beliebiges Element und $v \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$ eine Funktion mit $\dot{v} = R_k v$. Es gilt also $Lv = 0$ in Ω_1. Wir erhalten, wenn wir (9), supp $\varphi_l \subset \Omega_1$ und $v|_{\Omega_1} \in C^\infty(\Omega_1)$ berücksichtigen,

$$\langle T, \dot{v}\rangle = \langle T, R_k v\rangle = \langle R_k'T, v\rangle = \lim_{l\to\infty} \langle L^*\varphi_l, v\rangle$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_{\Omega_1} L^*\varphi_l\, v\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_{\Omega_1} \varphi_l\, Lv\, dx = 0,$$

d. h. $\langle T, \dot{v}\rangle = 0$ für alle $\dot{v} \in A_p^k(\bar{\Omega}_1)$. Mittels Lemma 1 ergibt sich daraus die Behauptung ∎

4.3. *Beweis von Satz* 1/(iii). Wir erhalten die Aussage als Folgerung aus Satz 1/(ii): Es sei $v \in A_p{}^k(\Omega_1)$ eine beliebige Funktion, die sich zu $\tilde{v} \in \mathring{W}_p{}^k(\Omega)$ fortsetzen läßt. Dann ist $R_k\tilde{v} \in W_p{}^k(\bar{\Omega}_1)$ und, wegen $Lv = 0$ auf Ω_1, $R_k\tilde{v} \in A_p{}^k(\bar{\Omega}_1)$. Zu $R_k\tilde{v} = \{D^\alpha\tilde{v}|_{\bar{\Omega}_1}\}_{|\alpha|\leq k}$ existiert nach Satz 1/(ii) eine Folge $(u_l)_1{}^\infty \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ mit $\|R_k u_l - R_k\tilde{v}\|_{k,p,\bar{\Omega}_1} \to 0$. Aus

$$\|u_l|_{\Omega_1} - v\|_{k,p,\Omega_1} = \|u_l|_{\Omega_1} - \tilde{v}|_{\Omega_1}\|_{k,p,\Omega_1} \leqq \|R_k u_l - R_k v\|_{k,p,\bar{\Omega}_1}$$

folgt dann die Behauptung ∎

5. Beweis von Satz 2

5.1. *Beweis von Satz* 2/(i). **1.** Zunächst müssen einige Vorbereitungen getroffen werden. Für $g \in \mathring{W}^s_{p'}(\Omega_1)$ $(s \geqq 0)$ definieren wir den Fortsetzungsoperator F_s durch

$$F_s g = g \text{ auf } \Omega_1, \; F_s g = 0 \text{ auf } \Omega \setminus \Omega_1.$$

Es gilt offenbar $F_s \in L(\mathring{W}^s_{p'}(\Omega_1), \mathring{W}^s_{p'}(\Omega))$, $D^\alpha(F_s g) = F_{s-|\alpha|}(D^\alpha g)$ für $|\alpha| \leqq s$ und $L^*(F_s g) = F_{s-2m}(L^* g)$ für $s \geqq 2m$. Weiterhin ist

$$F_s(h|_{\Omega_1}) = h \tag{10}$$

und

$$h|_{\Omega_1} \in \mathring{W}^s_{p'}(\Omega_1) \tag{11}$$

für alle $h \in \overline{C_0{}^\infty(\Omega_1)}^{\|\cdot\|_{s,p',\Omega}}$. Wenden wir den dualen Operator $F_s' \in L(W_p{}^{-s}(\Omega), W_p{}^{-s}(\Omega_1))$ auf $u \in C(\bar{\Omega}) \subset W_p{}^{-s}(\Omega)$ an, so gilt

$$F_s'T = u|_{\Omega_1}. \tag{12}$$

Dies folgt daraus, daß

$$\langle F_s'u, \varphi\rangle = \langle u, F_s\varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\, F_s\varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\Omega_1} u|_{\Omega_1}(x)\, \varphi(x)\, dx = \langle u|_{\Omega_1}, \varphi\rangle$$

für alle $\varphi \in C_0{}^\infty(\Omega_1)$ ist.

2. Es ist $k < 0$. $T \in (\mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega))' = W_p{}^k(\Omega)$ sei ein stetiges, lineares Funktional mit $\langle T, L^*\varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in C_0{}^\infty(\Omega_1)$, wobei wir hier (wie bisher stets) φ als in ganz Ω definiert ansehen. Daraus werden wir zunächst $\langle T, L^*f\rangle = 0$ für alle $f \in (W_{p'}^{2m-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}$ schließen, woraus mittels Lemma 1 das Zwischenergebnis $L^*((W_{p'}^{2m-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}) \subseteq \overline{L^*(C_0{}^\infty(\Omega_1))}^{\|\cdot\|_{-k,p',\Omega}}$ folgt.

3. Für alle jetzt nur auf Ω_1 definierten Funktionen $\psi \in C_0{}^\infty(\Omega_1)$ gilt also $0 = \langle T, L^*F_{2m-k}\psi\rangle = \langle T, F_{-k}L^*\psi\rangle = \langle F'_{-k}T, L^*\psi\rangle$, d. h. $L(F'_{-k}T) = 0$ in Ω_1 im distributionentheoretischen Sinne. Wegen $F'_{-k}T \in W_p{}^k(\Omega_1)$ ist damit $F'_{-k}T \in A_p{}^k(\Omega_1)$. Aus der Voraussetzung (1) ergibt sich die Existenz einer Folge $(u_l)_1{}^\infty \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ mit

$$\|F'_{-k}T - u_l|_{\Omega_1}\|_{k,p,\Omega_1} \to 0. \tag{13}$$

4. Es sei $f \in (W_{p'}^{2m-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}$ eine beliebige Funktion. Dann ist $L^*f \in (\mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}$. Aus der vorausgesetzten $(-k, p')$-Stabilität von Ω_1 folgt die Approximierbarkeit von L^*f durch in ganz Ω definierte $C_0{}^\infty(\Omega_1)$-Funktionen, also $L^*f \in \overline{C_0{}^\infty(\Omega_1)}^{\|\cdot\|_{-k,p',\Omega}}$.

Daraus erhalten wir gemäß (11) $(L^*f)|_{\Omega_1} \in \mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega_1)$. Aus der Beziehung (10) ergibt sich $F_{-k}\big((L^*f)|_{\Omega_1}\big) = L^*f$ und aus (12) $F'_{-k}u_l = u_l|_{\Omega_1}$. Damit erhält man unter Berücksichtigung von (13)

$$\begin{aligned}\langle T, L^*f\rangle &= \big\langle T, F_{-k}\big((L^*f)|_{\Omega_1}\big)\big\rangle = \langle F'_{-k}T, (L^*f)|_{\Omega_1}\rangle \\ &= \lim \langle F'_{-k}u_l, (L^*f)|_{\Omega_1}\rangle = \lim \big\langle u_l, F_{-k}\big((L^*f)|_{\Omega_1}\big)\big\rangle \\ &= \lim \langle u_l, L^*f\rangle = \lim \langle Lu_l, f\rangle = 0,\end{aligned}$$

da $\operatorname{supp} Lu_l \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$ ist. Aus Lemma 1 folgt

$$L^*\big((W_{p'}^{2m-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}\big) \subseteq \overline{L^*\big(C_0^\infty(\Omega_1)\big)}^{\|\cdot\|_{-k,p',\Omega}}.$$

Mittels Lemma 6 folgt aus dieser Beziehung die behauptete $(2m-k, p')$-Stabilität von Ω_1 ∎

5.2. *Beweis von Satz 2/(ii).* 1. Es ist $k \geqq 0$. $T \in \big(W_{p'}^{-k}(\Omega)\big)' = \mathring{W}_p^{k}(\Omega)$ sei ein stetiges, lineares Funktional mit

$$\langle T, L^*\varphi\rangle = 0 \tag{14}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Wir zeigen zunächst wieder $\langle T, L^*f\rangle = 0$ für alle $f \in \big(W_{p'}^{2m-k}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_1}$.

2. Die Beziehung (14) bedeutet $LT = 0$ auf Ω_1. Es ist also $R_kT \in A_p^k(\bar{\Omega}_1)$. Aus der Voraussetzung (2) folgt die Existenz einer Folge $(u_l)_1^\infty \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ mit

$$\|R_kT - R_ku_l\|_{k,p,\bar{\Omega}_1} \to 0 \text{ für } l \to \infty. \tag{15}$$

3. Es sei nun $f \in \big(W_{p'}^{2m-k}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_1}$ eine beliebige Funktion. Dann ist $L^*f \in \big(W_{p'}^{-k}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_1}$. Weiterhin sei $v \in W_p^k(\Omega)$ eine beliebige Funktion mit $D^\alpha v|_{\bar{\Omega}_1} = 0$ für $|\alpha| \leqq k$, d. h. $v \in \operatorname{Ker}(R_k)$, und $\eta_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ eine Funktion mit $\eta_0 \equiv 1$ in einer Umgebung von $\bar{\Omega}_1$. Aus Lemma 8 folgt die Existenz einer Folge $(\psi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega\setminus\bar{\Omega}_1)$ mit $\|(v\eta_0) - \psi_l\|_{k,p,\Omega} \to 0$. Für $L^*f \in \big(W_{p'}^{-k}(\Omega)\big)_{\bar{\Omega}_1}$ gilt dann $\langle v, L^*f\rangle = \langle v\eta_0, L^*f\rangle = \lim \langle \psi_l, L^*f\rangle = 0$ wegen $\operatorname{supp} \psi_l \cap \operatorname{supp} L^*f = \emptyset$ für alle l. Damit ist

$$L^*f \in \big(\operatorname{Ker}(R_k)\big)^\perp = \{F \in \big(W_p^k(\Omega)\big)' : \langle v, F\rangle = 0 \ \forall\, v \in W_p^k(\Omega) \text{ mit } R_kv = 0\}.$$

4. Es ist $R_k \in L\big(W_p^k(\Omega), W_p^k(\bar{\Omega}_1)\big)$ und $\operatorname{Im}(R_k) = W_p^k(\bar{\Omega}_1)$ ($\operatorname{Im}(R_k)$: Bildbereich von R_k). Laut Voraussetzung soll $W_p^k(\bar{\Omega}_1)$ ein Banach-Raum sein. Aus dem Closed Range Theorem (s. z. B. [19: S. 144]) folgt dann $\operatorname{Im}(R_k') = \big(\operatorname{Ker}(R_k)\big)^\perp$, und aus einer Folgerung aus dem Homomorphiesatz und dem Closed Range Theorem (s. [19: S. 147]) folgt $(R_k')^{-1} \in L\big((\operatorname{Ker}(R_k))^\perp, (W_p^k(\bar{\Omega}_1))'\big)$. L^*f gehört also zum Definitionsbereich von $(R_k')^{-1}$. Damit gilt für alle $w \in W_p^k(\Omega)$

$$|\langle w, L^*f\rangle| = |\langle w, R_k'(R_k')^{-1} L^*f\rangle| = |\langle R_kw, (R_k')^{-1} L^*f\rangle| \leqq C\, \|R_kw\|_{k,p,\bar{\Omega}_1}.$$

5. Aus dieser Ungleichung und aus (15) folgt

$$|\langle T - u_l, L^*f\rangle| \leqq C\, \|R_kT - R_ku_l\|_{k,p,\bar{\Omega}_1} \to 0 \text{ für } l \to \infty.$$

Wir erhalten somit $\langle T, L^*f\rangle = \lim \langle u_l, L^*f\rangle = \lim \langle Lu_l, f\rangle = 0$, da $Lu_l = 0$ in einer Umgebung von $\bar{\Omega}_1$ und $\operatorname{supp} f \subseteq \bar{\Omega}_1$ ist. Aus Lemma 1 folgt

$$L^*\big((W_{p'}^{2m-k}(\Omega))_{\bar{\Omega}_1}\big) \subseteq \overline{L^*\big(C_0^\infty(\Omega_1)\big)}^{\|\cdot\|_{-k,p',\Omega}}.$$

und aus Lemma 6 die $(2m-k, p')$-Stabilität von Ω_1 ∎

LITERATUR

[1] BAGBY, T.: L_p-approximation by analytic functions. J. Approximation Theory **5** (1972), 401–404.

[2] BAGBY, T.: Quasi topologies and rational approximation. J. Funct. Anal. **10** (1972), 259 to 268.

[3] BAGBY, T.: Approximation in the mean by solutions of elliptic equations. Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 761–784.

[4] BROWDER, F. E.: Functional analysis and partial differential equations II. Math. Ann. **145** (1962), 81–226.

[5] HAMANN, U.: Approximation durch Lösungen allgemeiner elliptischer Randwertprobleme bei Gleichungen beliebiger Ordnung. Dissertation B. Rostock: Wilhelm-Pieck-Universität 1986.

[6] HAMANN, U.: Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf geschlossenen Hyperflächen. Math. Nachr. **136** (1988), 285–301.

[7] HAMANN, U.: Bedingungen für die Stabilität offener Mengen. Rostock. Math. Kolloq. (in Vorbereitung).

[8] ХАВИН, В.П.: Аппроксимация в среднем аналитическими функциями. Докл. Акад. Наук СССР **178** (1968), 1025–1028.

[9] HEDBERG, L. I.: Approximation in the mean by analytic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 157–171.

[10] HEDBERG, L. I.: Non-linear potentials and approximation in the mean by analytic functions. Math. Z. **129** (1972), 299–319.

[11] HEDBERG, L. I.: Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces. Lect. Notes Math. **779** (1980), 73–103.

[12] HEDBERG, L. I.: Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem. Acta Math. **147** (1981), 161–187.

[13] HEDBERG, L. I., and TH. H. WOLFF: Thin sets in nonlinear potential theory. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **33** (1983) 4, 161–187.

[14] LINDBERG, P.: A constructive method for L_p-approximation by analytic functions. Ark. Mat. **20** (1982), 61–68.

[15] POLKING, J. C.: Approximation in L_p by solutions of elliptic partial differential equations. Amer. J. Math. **94** (1972), 1231–1244.

[16] RUNGE, C.: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Acta Math. **6** (1885), 229–244.

[17] SCHECHTER, M.: On L_p-estimates and regularity I. Amer. J. Math. **85** (1963), 1–13.

[18] SCHULZE, B.-W., und G. WILDENHAIN: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin: Akademie-Verlag 1977, und Basel–Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977.

[19] WLOKA, J.: Funktionalanalysis und Anwendungen. Berlin–New York: Walter de Gruyter 1971.

[20] WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1982.

Manuskripteingang: 26. 08. 1988; in revidierter Fassung 20. 02. 1989

VERFASSER

Dr. UWE HAMANN
Sektion Mathematik der Universität Rostock
Universitätsplatz 1
DDR-2500 Rostock