

Asymptotische Entwicklungen der Gaußschen hypergeometrischen Funktion für unbeschränkte Parameter

E. WAGNER

Meinem verehrten Lehrer Prof. Dr. L. Berg in Dankbarkeit anläßlich seines 60. Geburtstages gewidmet

Für die hypergeometrische Funktion $F(a, b; c; z)$ werden asymptotische Entwicklungen im Fall $a^2 = o(c)$, $b^2 = o(c)$ ($|c| \rightarrow \infty$) hergeleitet.

Выводятся асимптотические разложения гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$ в случае $a^2 = o(c)$, $b^2 = o(c)$ ($|c| \rightarrow \infty$).

Asymptotic expansions of the hypergeometric function $F(a, b; c; z)$ are derived in the case $a^2 = o(c)$, $b^2 = o(c)$ ($|c| \rightarrow \infty$).

1. Einleitung

In [9] werden asymptotische Entwicklungen der Gaußschen hypergeometrischen Funktion $F(a, b; c; z)$ für beliebig gegen Unendlich strebende komplexe Werte von c ($c \neq 0, -1, \dots$) bei konstanten Werten von a, b, z ($|\arg(1-z)| \leq \pi$) hergeleitet und damit die in [1] aufgestellte Behauptung widerlegt, daß die hypergeometrische Reihe in allen Punkten ihres Konvergenzgebiets ($|z| < 1$) gleichzeitig asymptotische Entwicklung von F für $|c| \rightarrow \infty$ ist. In der vorliegenden Arbeit wird der Gültigkeitsbereich dieser Entwicklungen auf unbeschränkte Parameter a, b unter den generellen Voraussetzungen $a^2 = o(c)$, $b^2 = o(c)$ sowie gewissen Beschränktheitsbedingungen für die Realteile von a und b ausgedehnt. Obwohl dabei von der gleichen Beweiskonzeption wie in [9] ausgegangen wird, erfordert die Nichtanwendbarkeit des Lemmas von Watson eine andere Methodik, die sich wesentlich auf allgemeine Prinzipien und Sätze der Monographie [2] von Berg stützt.

Asymptotische Entwicklungen von $F(a, b; c; z)$ für mehrere gegen Unendlich strebende Parameter sind bisher nur in speziellen Fällen bekannt, in denen die unbeschränkten Parameter durch Nebenbedingungen miteinander verknüpft sind (siehe z. B. [4] mit $a = \alpha l$, $c = \gamma l$ für $l \rightarrow \infty$ und konstante α, γ oder [5, 11], wo die Differenzen oder Summen der unbeschränkten Parameter konstant sind). In [7] werden asymptotische Darstellungen für $|a| \rightarrow \infty$, $b^2 = o(a)$, $c^2 = o(a)$ und einseitig beschränkte Realteile von a und b angegeben.

Angeregt wurden die Untersuchungen in dieser und den vorangehenden Arbeiten [6–9] des Verfassers durch das Auftreten der Funktion F bei der mathematischen Behandlung gewisser Polymerisationsprozesse, wobei die Parameter als Kettenlängen von Makromolekülen in Erscheinung treten und F wesentlich die Molmassenverteilung im Polymerisat bestimmt.

2. Bezeichnungen und Resultate

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen $a_1 = \operatorname{Re} a$, $a_2 = \operatorname{Im} a$, $\alpha = \operatorname{Arg} a \in (-\pi, \pi]$ (entsprechend $b_1, b_2, \beta, c_1, c_2, \gamma$), $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $\zeta = \operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Log} z = \ln |z| + i\zeta$ und das Pochhammer-Symbol

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ a(a+1) \dots (a+n-1) & \text{für } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Für jedes z mit $x > 1/2$, $z \notin [1, \infty)$ setzen wir

$$\Phi_z^{(k)} = \operatorname{Arg}(-\operatorname{Log}(1 - 1/z) + 2k\pi i) \quad (k = -1, 0, 1).$$

Die für jedes $\zeta \in (0, \pi/2)$ echt monoton wachsende Funktion

$$g_\zeta(\Phi) = \ln[\sin \Phi / \sin \zeta] - (\pi + \Phi + \zeta) \cot \Phi \quad (\zeta < \Phi < \pi - \zeta) \quad (1)$$

besitzt genau eine Nullstelle in $(\zeta, \pi/2)$, die wir mit Φ_z^* bezeichnen. Dann sei für $y \geq 0$

$$\delta_z = \begin{cases} \Phi_z^{(1)} & \text{für } |z| \leq \sin \Phi_z^* / \sin(\zeta + \Phi_z^*), \\ \Phi_z^* & \text{für } |z| > \sin \Phi_z^* / \sin(\zeta + \Phi_z^*) \end{cases} \quad (2)$$

und für $y < 0$

$$\delta_z = \begin{cases} -\Phi_z^{(-1)} & \text{für } |z| \leq \sin \Phi_{|z|}^* / \sin(|\zeta| + \Phi_{|z|}^*), \\ \Phi_{|z|}^* & \text{für } |z| > \sin \Phi_{|z|}^* / \sin(|\zeta| + \Phi_{|z|}^*). \end{cases} \quad (3)$$

Offenbar sind $\Phi_z^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$ für $y \geq 0$, $\Phi_z^{(0)} \in (0, \pi/2)$ für $y < 0$ sowie $\delta_z \in (0, \pi/2)$ und $0 < \sin \Phi_z^* / \sin(\zeta + \Phi_z^*)$.

Unter ε ist stets eine beliebig klein wählbare positive Konstante zu verstehen. Nach unten beschränkte reelle Variable werden durch $O_L(1)$ gekennzeichnet. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind im folgenden Satz zusammengefaßt:

Satz: Es sei

$$z \neq 0, \quad z \notin [1, \infty), \quad (4)$$

$$a^2 = o(c), \quad b^2 = o(c) \quad (|c| \rightarrow \infty), \quad (5)$$

$$a_1 = O_L(1), \quad b_1 = O_L(1). \quad (6)$$

Dann gilt in jedem der vier Fälle

(i) $a = 0, -1, -2, \dots$ oder $b = 0, -1, -2, \dots$,

(ii) $x \leq 1/2, |\gamma| \leq \pi - \varepsilon$,

(iii) $x > 1/2, y \geq 0, -\pi/2 - \delta_z + \varepsilon \leq \gamma \leq \pi/2 - \Phi_z^{(0)} - \varepsilon$,

(iv) $x > 1/2, y < 0, -\pi/2 - \Phi_z^{(0)} + \varepsilon \leq \gamma \leq \pi/2 + \delta_z - \varepsilon$.

die asymptotische Entwicklung

$$F(a, b; c; z) \approx \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r}{r!(c)_r} z^r \quad (c \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Sind $a, b \neq 0, -1, -2, \dots$ und statt (6) die schärferen Bedingungen

$$a_1 = O(1), \quad b_1 = O(1) \quad (8)$$

erfüllt, so gelten in jedem der zwei Fälle

(v) $x > 1/2, y \geq 0, -\pi + \varepsilon \leq \gamma \leq -\pi/2 - \Phi_z^{(1)} - \varepsilon$ und $\pi/2 - \Phi_z^{(0)} + \varepsilon \leq \gamma \leq \pi - \varepsilon,$

(vi) $x > 1/2, y < 0, -\pi + \varepsilon \leq \gamma \leq -\pi/2 - \Phi_z^{(0)} - \varepsilon$ und $\pi/2 - \Phi_z^{(-1)} + \varepsilon \leq \gamma \leq \pi - \varepsilon$

gleichzeitig die beiden asymptotischen Entwicklungen

$$F(a, b, c; z) \approx \frac{\pi \Gamma(a - c + 1) \Gamma(b - c + 1) z^{1-c} (1 - z)^{c-b-a}}{\sin(\pi c) \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(1 - c) \Gamma(2 - c)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_v (1 - b)_v}{v! (2 - c)_v} z^v \tag{9}$$

und

$$F(a, b, c; z) \approx \frac{\pi \Gamma(a + b - c) z^{1-c} (1 - z)^{c-b-a}}{\sin(\pi c) \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(1 - c)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_v (1 - b)_v}{v! (c - b - a + 1)_v} (1 - z)^v. \tag{10}$$

Für $|z| > \sin \Phi_{|\zeta|}^* / \sin(|\zeta| + \Phi_{|\zeta|}^*)$ besitzt F in jedem der zwei Fälle

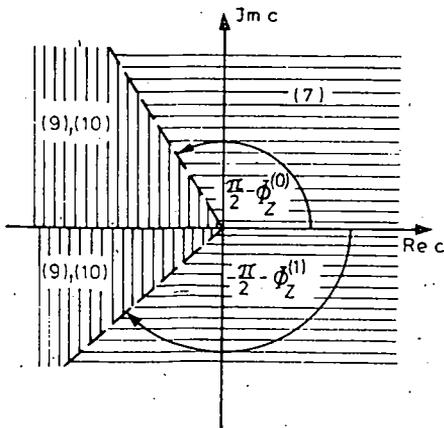
(vii) $x > 1/2, y \geq 0, -\pi/2 - \Phi_z^{(1)} + \varepsilon \leq \gamma \leq -\pi/2 - \Phi_z^* + \varepsilon,$

(viii) $x > 1/2, y < 0, \pi/2 + \Phi_{|\zeta|}^* - \varepsilon \leq \gamma \leq \pi/2 - \Phi_z^{(-1)} - \varepsilon$

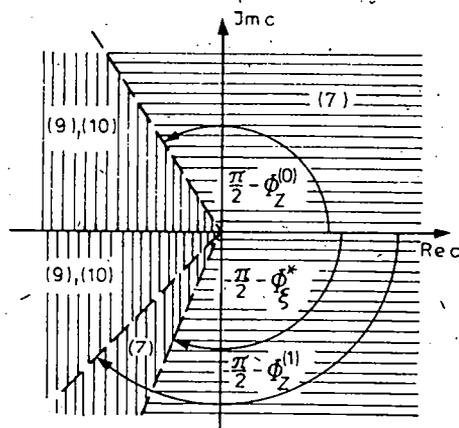
wiederum die asymptotische Entwicklung (7).

Die Aussage des Satzes läßt sich im Fall $x > 1/2, y \geq 0$ in den Abbildungen (a), (b) veranschaulichen, wobei zur Vereinfachung angenommen wird, daß c auf einem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl gegen unendlich strebt. Die eingetragenen asymptotischen Entwicklungen gelten in den horizontal schraffierten (offenen) Winkelräumen unter den Voraussetzungen (4), (5), (6), in den vertikal schraffierten unter den Voraussetzungen (4), (5), (8). Durch Spiegelung an der reellen Achse der c -Ebene erhält man die entsprechenden Konfigurationen im Fall $y < 0$.

Beispiele: Für $\zeta = \pi/4$ berechnet man für Φ_ζ^* einen Näherungswert von $1,5075$ oder $86,37^\circ$. Daraus erhält man für $\sin \Phi_\zeta^* / \sin(\zeta + \Phi_\zeta^*)$ den Näherungswert $1,330$. Ist $z = 3(1 + i)/4$, so ist wegen $|z| \approx 1,06$ nach (2) $\delta_z \approx \Phi_z^{(1)} \approx 1,5141 \triangle 86,75^\circ$. Weiterhin ist $\Phi_z^{(0)} \approx -1,3113 \triangle -75,13^\circ$. Ist $z = 10(1 + i)$, also $|z| \approx 14,14$, so gilt nach (2) $\delta_z = \Phi_z^*$, und es ist $\Phi_z^{(0)} \approx -0,8115 \triangle -46,49^\circ, \Phi_z^{(1)} \approx 1,5628 \triangle 89,54^\circ$. Die in den Abbildungen (a), (b) vertikal schraffierten Winkelräume in der unteren c -Halbebene besitzen bei diesen Beispielen relativ kleine Öffnungswinkel. Aus Gleichung (2) ist ersichtlich, daß diese Aussage für alle Werte von ζ , die nicht zu nahe bei Null liegen, aufrechterhalten werden kann (s. dazu auch die nachfolgende Bemerkung 4).



(a) $|z| \leq \sin \Phi_\zeta^* / \sin(\zeta + \Phi_\zeta^*)$



(b) $|z| > \sin \Phi_\zeta^* / \sin(\zeta + \Phi_\zeta^*)$

Bemerkungen: 1. Im Unterschied zu (9) tritt in der Entwicklung (10) nur noch ein Quotient zweier von c abhängiger Gammafunktionen auf. (Für diesen Quotienten gilt unter den Voraussetzungen (5) ebenfalls die in [9] zitierte asymptotische Entwicklung von Tricomi-Erdélyi nach Potenzen von $1/c$ mit polynomialen Koeffizienten in a, b, z [10].) 2. Aus Beweispunkt 3.3 (s. (18)) wird ersichtlich werden, daß für $|z| > \sin \Phi_\zeta^*/\sin(\zeta + \Phi_\zeta^*)$ die Beziehungen $\Phi_\zeta^* < \Phi_\zeta^{(1)}$ ($y \geq 0$) und $\Phi_{|\zeta|}^* < -\Phi_\zeta^{(-1)}$ ($y < 0$) gelten, so daß die unter (vii) und (viii) angegebenen Winkelräume bei hinreichend kleiner Wahl von $\varepsilon > 0$ nicht leer sind. 3. Der Winkel Φ_ζ^* tritt in [9] nicht auf. Seine Einführung ist in der vorliegenden Arbeit beweistechnisch bedingt. Es ist zu vermuten, daß er durch eine andere Beweisführung vermieden werden kann und sich dann die Fälle (iii), (iv), (vii) und (viii) zu der Aussage zusammenfassen lassen, daß unter den Voraussetzungen (4)–(6) die asymptotische Entwicklung (7) in den Winkelräumen $-\pi/2 - \Phi_\zeta^{(1)} + \varepsilon \leq \gamma \leq \pi/2 - \Phi_\zeta^{(0)} - \varepsilon$ (für $x > 1/2, y \geq 0$) und $-\pi/2 - \Phi_\zeta^{(0)} + \varepsilon \leq \gamma \leq \pi/2 - \Phi_\zeta^{(-1)} - \varepsilon$ (für $x > 1/2, y < 0$) gilt. 4. Für $\zeta \rightarrow +0$ ist auch $\Phi_\zeta^* \rightarrow +0$, so daß man für Φ_ζ^* die verkürzte Gleichung $\ln \Phi_\zeta^* - \ln \zeta + o(1) - (\pi + o(1))/\Phi_\zeta^* = 0$ erhält, aus der $\Phi_\zeta^* \sim -\pi/\ln \zeta$ ($\zeta \rightarrow +0$) folgt. Ferner, für $\zeta \rightarrow \pi/2 - 0$ ist auch $\Phi_\zeta^* \rightarrow \pi/2 - 0$. Setzt man $\zeta = \pi/2 - \tilde{\zeta}$ und $\Phi_\zeta^* = \pi/2 - \tilde{\Phi}_\zeta$, so gilt $\cos \tilde{\Phi}_\zeta = \cos \tilde{\zeta} \exp\{(2\pi - \tilde{\zeta} - \tilde{\Phi}_\zeta) \tan \tilde{\Phi}_\zeta\}$, und daraus erhält man für $\tilde{\zeta} \rightarrow +0, \tilde{\Phi}_\zeta \rightarrow +0$ die verkürzte Gleichung $1 + O(\tilde{\Phi}_\zeta^2) = 1 - \tilde{\zeta}^2/2 + (2\pi - \tilde{\zeta}) \tilde{\Phi}_\zeta + O(\tilde{\zeta}^4) + O(\tilde{\Phi}_\zeta^3) + O(\tilde{\Phi}_\zeta \tilde{\zeta}^2)$. Aus ihr ergibt sich $\tilde{\Phi}_\zeta \sim \tilde{\zeta}^2/(4\pi)$, und mithin ist $\Phi_\zeta^* - \pi/2 \sim -(\zeta - \pi/2)^2/(4\pi)$ ($\zeta \rightarrow \pi/2 - 0$).

3. Beweis des Satzes

3.1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann

$$a = O(b), \quad b \rightarrow \infty \quad (11)$$

vorausgesetzt werden, denn F ist symmetrisch in a und b , und für konstante a, b sind die Behauptungen des Satzes in [9] bewiesen.

3.2. Ausgangspunkt für den Beweis in den Fällen (ii)–(viii) ist die bekannte Integraldarstellung

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt \quad (c_1 > b_1 > 0).$$

Wegen (4) ist $(1-tz)^{-a}$ eine im Integrationsintervall beliebig oft differenzierbare Funktion von t , so daß man mit der Taylorschen Formel

$$F = \sum_{\nu=0}^n \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu! (c)_\nu} z^\nu = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{(a)_{n+1} z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-s)^a \Psi_n(a, b, c, sz) ds$$

erhält, wobei

$$\Psi_n = \int_0^1 t^{b+n} (1-t)^{c-b-1} (1-szt)^{-a-n-1} dt$$

ist und wegen (6) n so groß angenommen werden kann, daß

$$b_1 + n \geq 0 \quad (12)$$

gilt. Durch die Substitution $t = 1 - e^{-\tau}$ erhält man die Darstellung von Ψ_n als Laplace-Integral,

$$\Psi_n = \int_0^\infty e^{-c\tau} \psi_n(a, b, sz, \tau) d\tau, \quad (13)$$

mit der Originalfunktion $\psi_n = e^{b\tau} (1 - e^{-\tau})^{b+n} (1 - sz + sz e^{-\tau})^{-a-n-1}$.

Im nächsten Beweispunkt 3.3 werden wir zeigen, daß ψ_n für jedes feste z und alle $s \in [0, 1]$ holomorphe Funktionen von τ in den Winkelräumen

$$W_z = \begin{cases} \{\tau \in \mathbb{C}: |\text{Arg } \tau| < \pi/2\} & \text{für } x \leq 1/2, \\ \{\tau \in \mathbb{C}: \Phi_z^{(0)} < \text{Arg } \tau < \delta_z\} & \text{für } x > 1/2, y \geq 0, \\ \{\tau \in \mathbb{C}: -\delta_z < \text{Arg } \tau < \Phi_z^{(0)}\} & \text{für } x > 1/2, y < 0 \end{cases}$$

sind. Da in W_z außerdem $\psi_n = O(1)$ für $\tau \rightarrow 0$ und $\psi_n = O(e^{b\tau})$ für $\tau \rightarrow \infty$ gilt, können nach einem bekannten Satz [3: Kap. IX, § 2] die Funktionen ψ_n bezüglich c analytisch fortgesetzt werden, indem man in (13) den Integrationsweg innerhalb W_z um den Nullpunkt dreht. Bezeichnet man den Drehwinkel mit Φ , so erhält man für $|\text{Arg}(e^{i\Phi}(c-b))| < \pi/2$

$$F - \sum_{\nu=0}^n \frac{(a)_\nu (b)_\nu}{\nu!(c)_\nu} z^\nu = \frac{\Gamma(c) (a)_{n+1} z^{n+1}}{\Gamma(b) \Gamma(c-b) n!} \int_0^1 (1-s)^n \int_0^{\infty(\Phi)} e^{-c\tau} \psi_n d\tau ds, \quad (14)$$

also eine Darstellung von F , die wegen $b = o(c)$ für hinreichend große $|c|$ und

$$|\gamma + \Phi| \leq \pi/2 - \varepsilon \quad (15)$$

gilt. Damit werden die in den Fällen (ii) – (iv) angegebenen Winkelräume erfaßt.

3.3. Die Holomorphie von ψ_n in W_z folgt aus der Nullstellenfreiheit von $1 - e^{-\tau}$ und $1 - sz + sz e^{-\tau}$ in W_z , so daß

$$-\text{Log}(1 - 1/sz) + 2k\pi i \notin W_z \quad (s \in (0, 1]; k = -1, 0, 1) \quad (16)$$

nachzuweisen ist. Für $\text{Re}(sz) = sx \leq 1/2$ ist $|1 - 1/sz| \geq 1$ und demnach (16) in den beiden Fällen $x \leq 1/2, 0 < s \leq 1$ und $x > 1/2, 0 < s \leq 1/2x$ gültig. Auch für $1/2 < x < 1, 1/2x \leq s \leq 1$ ist (16) leicht nachprüfbar. Wir betrachten nun den Fall $x > 1/2, y > 0, 1/2x \leq s \leq 1$. Dabei laufen für jedes feste z die Punkte $1 - 1/sz = \varrho_z(s) \exp[i\vartheta_z(s)]$ mit wachsenden s auf der Geraden $\varrho_z = \sin \zeta / \sin(\zeta + \vartheta_z)$ vom Punkt $\vartheta_z = \pi - 2\zeta, \varrho_z = 1$ in das Innere des Einheitskreises, und $\vartheta_z(s)$ fällt echt monoton. Also ist

$$\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/sz)) = \arctan f(\vartheta_z)$$

mit

$$f(\vartheta_z) = \vartheta_z / \ln(\sin \zeta / \sin(\zeta + \vartheta_z)) \quad (0 < \text{Arg}(1 - 1/z) \leq \vartheta_z < \pi - 2\zeta).$$

Die Funktion f fällt echt monoton mit wachsenden ϑ_z , so daß

$$\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/sz)) \leq \Phi_z^{(0)} \quad (17)$$

gilt. Andererseits ist, wenn man $\vartheta_z = \pi - \zeta - \Phi_z$ setzt,

$$\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/sz) + 2\pi i) = \arctan f(\Phi_z)$$

mit

$$f(\Phi_z) = (\pi + \zeta + \Phi_z) / \ln(\sin \Phi_z / \sin \zeta) \quad (\zeta < \Phi_z < \pi - \zeta).$$

Wegen $f'(\Phi) = g_z(\Phi) \ln^2[\sin \Phi / \sin \zeta]$ (s. (1)) besitzt f ein eindeutig bestimmtes Minimum in $\Phi = \Phi_z^*$. Ist $|z| \geq \sin \Phi_z^* / \sin(\zeta + \Phi_z^*)$ oder die dazu äquivalente Ungleichung $\cot \Phi_z^* \geq (1-x)/y = \cot(\pi - \text{Arg}(z-1))$ erfüllt, so folgt die Un-

1) Im zweiten Integral in (14) bedeutet $\infty(\Phi)$, daß über einen vom Nullpunkt ausgehenden Strahl, der den Winkel Φ mit der reellen Achse der τ -Ebene einschließt, integriert wird.

gleichung $\Phi_2^* \leq \pi - \text{Arg}(z - 1) = \pi - \zeta - \vartheta_2(1) = \Phi_2(1)$, und demnach ist

$$\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/sz) + 2\pi i) \geq \arctan f(\Phi_2^*) = \Phi_2^* = \delta_2. \tag{18}$$

Offenbar erhält man aus $|z| \leq \sin \Phi_2^* / \sin(\zeta + \Phi_2^*)$ auf dieselbe Weise $\Phi_2^* \geq \Phi_2(1)$, und damit

$$\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/sz) + 2\pi i) \geq \text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/z) + 2\pi i) = \Phi_2^{(1)} = \delta_2. \tag{19}$$

Aus (17)–(19) folgt (16).

Für z mit $x > 1/2, y < 0$ erhält man (16) nach Übergang zu \bar{z} bei Beachtung der Relationen $\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/sz) + 2k\pi i) = -\text{Arg}(-\text{Log}(1 - 1/s\bar{z}) - 2k\pi i)$ ebenfalls aus (17)–(19).

3.4. Die Entwicklung (7) folgt aus (14), wenn für jede hinreichend große natürliche Zahl n und gleichmäßig für alle $s \in [0, 1]$

$$\int_0^{\infty(\Phi)} e^{-ct} \psi_n d\tau \sim \Gamma(b + n + 1)/c^{b+n+1} \quad (|c| \rightarrow \infty; |\gamma + \Phi| < \pi/2 - \varepsilon) \tag{20}$$

gilt, so daß das Restglied die Ordnung des ersten vernachlässigten Gliedes hat, denn nach der Stirlingschen Formel ist

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c - b) c^{b+n+1}} \sim c^{-n-1} \sim 1/(c)_{n+1} \quad (|c| \rightarrow \infty; |\gamma| \leq \pi - \varepsilon).$$

Zum Beweis von (20) deformieren wir den Integrationsweg in einer kleinen Umgebung des Nullpunktes. Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen (in Anlehnung an [2]):

$$\bar{b} = b + n, \quad X = \bar{b}/c, \quad \omega = \sqrt[4]{|\bar{b}|} X / \sqrt{\bar{b}}, \quad \delta = |\bar{b}^{3/4}/c| \ln |c/b|; \tag{21}$$

τ sei diejenige positive Zahl, für die $|X + \tau\omega| = \delta$ ist. Der deformierte Integrationsweg soll aus dem die Punkte $0, X - \omega, X + \omega$ und $X + \tau\omega$ in der angegebenen Reihenfolge verbindenden Polygonzug bestehen und auf einem Kreisbogen $|\tau| = \delta$ von $X + \tau\omega$ zum ursprünglichen Integrationsweg zurückführen. Die Integrale über die einzelnen Wegstücke bezeichnen wir in der Reihenfolge ihrer Durchlaufung mit I_1 bis I_5 . Im folgenden Beweispunkt zeigen wir

$$I_2 = \int_{X-\omega}^{X+\omega} e^{-ct} \psi_n d\tau \sim \Gamma(b + n + 1)/c^{b+n+1} \quad (|c| \rightarrow \infty) \tag{22}$$

und daran anschließend in den Beweispunkten 3.6–3.9 $I_\nu = o(I_2)$ ($\nu = 1, 3, 4, 5$) für $|c| \rightarrow \infty, |\gamma + \Phi| \leq \pi/2 - \varepsilon$. Zu diesem Zweck vermerken wir noch die folgenden wichtigen Beziehungen, die aus (5) und (11) folgen:

$$\omega = o(X), \quad X = o(\delta), \quad \delta = o(1), \quad |\tau\omega| \sim \delta. \tag{23}$$

3.5. Setzt man $k(\tau) = c\tau - \bar{b} \log \tau$ ($\log \tau > 0$ für $\tau > 1$) und $H(\tau) = e^{b\tau} [(1 - e^{-\tau})/\tau]^{\bar{b}}$ $\times (1 - sz + sz e^{-\tau})^{-a-n-1}$, so kann I_2 in der Form $I_2 = \int_{X-\omega}^{X+\omega} e^{-k} H d\tau$ geschrieben werden. Dann ist mit (21) $k(X) = \bar{b} - \bar{b} \log(\bar{b}/c), k'(X) = 0, \omega^2 k''(X) = \sqrt{|\bar{b}|} \rightarrow \infty$. Man sieht leicht, daß gleichmäßig für alle $s \in [0, 1]$

$$H \sim 1 \quad \text{für } \tau = o(1/b). \tag{24}$$

gilt. Wegen $X + \vartheta\omega \sim X$ für alle $\vartheta \in [-1, 1]$ und $X \doteq o(1/b)$ gilt insbesondere $H(X + \vartheta\omega) \sim 1$ gleichmäßig für alle $s \in [0, 1]$. Damit ist gezeigt, daß die Voraussetzungen des Satzes 20.3 aus [2] erfüllt sind, und man erhält mit ihm

$$I_2 \sim \sqrt{2\pi b} e^{-\bar{b}} X^{\bar{b}}/c \quad (c \rightarrow \infty). \tag{25}$$

Diese asymptotische Darstellung ist wegen $\Gamma(b + n + 1) \sim \sqrt{2\pi b} b^{n+b} e^{-b}$ und $X^{\bar{b}} \sim e^n (b/c)^{b+n}$ äquivalent zu (22).

3.6. Für das Integral I_1 von 0 nach $X - \omega$ erhält man wegen (24)

$$|I_1| \leq 2 |(X - \omega)^{\bar{b}+1}| \int_0^1 e^{k(u)} du \tag{26}$$

mit den Bezeichnungen $k(u) = -\text{Re} [c(X - \omega)] u + \bar{b}_1 \ln u = -[\bar{b}_1 - |\bar{b}|^{3/4} \times \cos(\bar{\beta}/2)] u + \bar{b}_1 \ln u$, $\bar{b}_1 = b_1 + n$, $\bar{\beta} = \text{Arg } \bar{b} \in [-\pi/2, \pi/2]$. Da k' in $(0, 1)$ monoton fällt und $k'(1) = |\bar{b}|^{3/4} \cos(\bar{\beta}/2)$ positiv ist, gilt

$$\int_0^1 e^{k(u)} du \leq e^{k(1)}/k'(1). \tag{27}$$

Berücksichtigt man noch $(X - \omega)^{\bar{b}+1} = X^{\bar{b}+1} \exp \left\{ -\sqrt{|\bar{b}|} \sqrt{\bar{b}} - \sqrt{|\bar{b}|}/2 + O(\sqrt{\bar{b}}) \right\}$, so erhält man mit (11), (23), (25) aus (26), (27) die Beziehung

$$|I_1/I_2| \leq \exp \left\{ -\sqrt{|\bar{b}|}/4 \right\} = o(1).$$

3.7. Es ist

$$I_3 = \int_{X+\omega}^{X+\tau\omega} e^{-(c-b)\tau} (1 - e^{-\tau})^{\bar{b}} (1 - sz + sz e^{-\tau})^{-a-n-1} d\tau.$$

Nach (23) gilt auf dem (geradlinigen) Integrationsweg $\tau = O(\delta) = o(1)$ und folglich $(1 - e^{-\tau})^{\bar{b}} = \tau^{\bar{b}} e^{O(b\delta)}$, $(1 - sz + sz e^{-\tau})^{-a-n-1} = e^{O(b\delta)}$. Damit erhält man die Abschätzung

$$|I_3| \leq 2 |X^{\bar{b}} b^{3/4}/c| e^{-\bar{b} + O(b\delta)} \int e^{\text{Re}k(u)} du \tag{28}$$

mit $k(u) = -(c - b)\omega u + \bar{b} \text{Log}(1 + u\omega/X)$. Wegen

$$\text{Re } k''(u) = -\left| \sqrt{\bar{b}} X^4 / (X + u\omega)^4 \right| \text{Re} \left\{ \left(1 + u \sqrt{\bar{b}} / |\bar{b}|^{3/4} \right)^2 \right\} < 0$$

ist $\text{Re } k'(u) \leq \text{Re } k'(1) \sim -\sqrt{|\bar{b}|}$ und demnach

$$\int e^{\text{Re}k(u)} du \leq e^{\text{Re}k(1) - \text{Re } k'(1)} = e^{-\sqrt{\bar{b}}/2 + O(b^{1/4})} \tag{29}$$

Aus (28) und (29) errechnet man mit (25) die Beziehung

$$|I_3/I_2| \leq \exp \left\{ -\sqrt{\bar{b}}/2 + O(b^{1/4}) + O(b\delta) \right\} = o(1).$$

3.8. Auf dem Kreisbogen mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius δ vom Punkt $X + r\omega$ nach $\delta e^{i\phi}$ ist wegen $|\tau| = \delta = o(1)$

$$|(1 - e^{-\tau})^b| \leq |\delta^b| e^{O(b)}, \quad |(1 - sz + sz e^{-\tau})^{-a-n-1}| \leq e^{O(b\delta)}.$$

Folglich gilt

$$|I_1| \leq |\delta^{b+1}| e^{O(b)} \int_{u_0+\gamma}^{\phi+\gamma} e^{-\delta|c|\cos u(1+o(1))} |du|$$

mit $u_0 = \text{Arg}(X + r\omega) \sim \text{Arg}(r\omega) = \text{Arg } \omega = \beta/2 - \gamma$. Es ist unmittelbar klar, daß wegen (15) und $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ das Integrationsintervall in $[-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$ liegt, also $\cos u \geq \sin \varepsilon$ und damit

$$|I_1| \leq |\delta^{b+1}| e^{-\delta|c|\sin \varepsilon(1+o(1))} \quad (30)$$

gilt. Aus (25) und (30) erhält man die Beziehung

$$|I_1/I_2| \leq \exp\{-2^{-1}|b|^{5/4} \ln |c/b| \sin \varepsilon\} = o(1),$$

3.9. Auf dem Strahl mit der Parameterdarstellung $\tau = (\delta + u) e^{i\phi}$ ($0 \leq u < \infty$) gelten wegen $|\phi| < \pi/2$ und (11) die Ungleichungen $|(1 - e^{-\tau})^b| \leq e^{O(b)}$, $|(1 - sz + sz e^{-\tau})^{-a-n-1}| \leq e^{O(b)}$. Daraus folgt wegen (15) $|I_3| \leq O(|c|^{-1} \exp\{-2^{-1}\delta|c|\sin \varepsilon + O(b)\})$ und mit (25)

$$|I_3/I_2| \leq \exp\{-2^{-1}\delta|c|\sin \varepsilon(1+o(1))\} = o(1).$$

Damit ist der Beweis in den Fällen (ii)–(iv) erbracht.

3.10. Die Beweismethode in den restlichen Fällen (v)–(viii) ist prinzipiell dieselbe wie in [9], so daß sie hier nur kurz skizziert wird. Ausgangspunkt ist die bekannte Beziehung

$$F(a, b; c; z) = k_1 F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + k_2 F(1-a, 1-b; 2-c; z) \quad (31)$$

mit den Koeffizienten

$$k_1 = \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(1-c)},$$

$$k_2 = \frac{\pi z^{1-c}(1-z)^{c-b-a}\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\sin(\pi c)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-c)\Gamma(2-c)}.$$

Nach der Stirlingschen Formel gelten in den unter (v)–(viii) angegebenen Winkelräumen unter den Voraussetzungen (8) und (11)

$$k_1 \sim 1, \quad k_2 \sim \frac{z^{-c}(1-z)^c}{\sin(\pi c)} \exp\{O(b \log(-c))\} \quad (c \rightarrow \infty).$$

Die hypergeometrischen Funktionen auf der rechten Seite von (31) können unter der Voraussetzung (8) für alle c mit $c_1 \leq 0$ gemäß (7) in asymptotische Reihen entwickelt werden. Deshalb besitzt $F(a, b; c; z)$ dieselbe asymptotische Entwicklung wie

der erste Summand in (31), falls k_2 für $c \rightarrow \infty$ stärker als jede Potenz von $1/c$ gegen null strebt. Andererseits besitzt $F(a, b; c; z)$ dieselbe Entwicklung wie der zweite Summand in (31), falls k_2 für $c \rightarrow \infty$ stärker als jede Potenz von c wächst. Man überlegt sich leicht, daß in den unter (v) und (vi) angegebenen Winkelräumen die zweite Variante zutrifft, womit (9) bewiesen ist. Dagegen gilt für $x > 1/2$ in den Winkelräumen

$$\begin{aligned} -\pi/2 - \Phi_2^{(1)} + \varepsilon \leq \gamma \leq -\pi/2, \quad \pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2 - \Phi_2^{(0)} - \varepsilon \quad (y \geq 0); \\ -\pi/2 - \Phi_2^{(0)} + \varepsilon \leq \gamma \leq -\pi/2, \quad \pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2 - \Phi_2^{(-1)} - \varepsilon \quad (y < 0) \end{aligned}$$

die asymptotische Entwicklung

$$F(a, b; c; z) \approx k_1 \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(a)_v (b)_v}{v!(a+b-c+1)_v} (1-z)^v. \tag{32}$$

Da sich k_1 , wie aus [10] hervorgeht, unter den Voraussetzungen (5) ebenfalls in eine asymptotische Reihe nach fallenden Potenzen von c entwickeln läßt, deren Koeffizienten Polynome in a, b sind, ist auch die rechte Seite von (32) in eine solche Reihe entwickelbar. Aus dieser kann man eine asymptotische Entwicklung der Form $\sum P_v(a, b, z)/(c)_v$ erhalten, bei der die P_v Polynome in a, b, z sind. Wegen der Eindeutigkeit asymptotischer Entwicklungen folgt durch Koeffizientenvergleich in den Winkelräumen $\pi/2 \leq |\gamma| \leq \pi/2 + \varepsilon$, daß $P_v = (a)_v (b)_v z^v/v!$ ist. Daraus folgt die Behauptung in den Fällen (vii) und (viii). Ersetzt man noch in der eben bewiesenen Entwicklung

$$\frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)\Gamma(1-c)} F(a, b; a+b-c+1; z) \approx \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(a)_v (b)_v}{v!(c)_v} z^v$$

die Größen a, b, c, z in dieser Reihenfolge durch $1-a, 1-b, c-b-a+1$ und $1-z$, so erhält man aus (9) die Entwicklung (10) ■

LITERATUR

- [1] BATEMAN, H., and A. ERDÉLYI: Higher Transcendental Functions, Vol. 1. New-York-Toronto-London: Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1953.
- [2] BERG, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1968.
- [3] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I (Nachdruck der 1. Auflage). Basel-Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1972.
- [4] ХАПАЕВ, М. М.: Асимптотические разложения гипергеометрических и вырожденных гипергеометрических функций. Изв. высш. уч. зав. Мат. 24 (1961) 5, 98-101.
- [5] PERRON, O.: Über das Verhalten der hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines oder mehrerer Parameter I, II, Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. 7 (1916) 9, 1-24, und 8 (1917) 1, 1-69.
- [6] WAGNER, E.: Asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b, c; z)$ für $|a| \rightarrow \infty$ und konstante b, c, z . Z. Anal. Anw. 3 (1984), 213-226.
- [7] WAGNER, E.: Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktion für große Parameter unterschiedlicher Größenordnung. Z. Anal. Anw. 5 (1986), 265-276.
- [8] WAGNER, E.: Zur Asymptotik der hypergeometrischen Funktionen für große Parameterwerte. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Naturwiss. R. 34 (1985) 4, 38-42.

- [9] WAGNER, E.: Asymptotische Entwicklungen der hypergeometrischen Funktion $F(a, b, c, z)$ für $|c| \rightarrow \infty$ und konstante Werte a, b und z . *Demonstratio Math.* **21** (1988), 441–458.
- [10] WAGNER, E.: Asymptotische Entwicklung des Quotienten zweier Gammafunktionen. *Wiss. Z. Univ. Halle* (erscheint).
- [11] WATSON, G. N.: *Asymptotic expansions of hypergeometric functions*. *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **22** (1918), 277–308.

Manuskripteingang: 05. 05. 1989; in revidierter Fassung 09. 08. 1989

VERFASSER:

Dr. sc. EBERHARD WAGNER
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Universitätsplatz 6
DDR-4010 Halle