

Asymptotische Entwicklungen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen $U(a, b, z)$ und $M(a, b, z)$ für große Werte von b und z

H.-J. SCHELL

Herrn Prof. Dr. L. Berg in Dankbarkeit zum 60. Geburtstag gewidmet

Für die konfluenten hypergeometrischen Funktionen $U(a, b, z)$ und $M(a, b, z)$ werden asymptotische Entwicklungen hergeleitet, die für große reelle Werte von b und $z = yb$ ($a > 0$, $y > 0$, fest) gelten. Es werden die Fälle $y < 1$ und $y > 1$ untersucht. Die Resultate enthalten die asymptotischen Entwicklungen für $b \rightarrow \infty$, z fest, und die wohlbekanntenen Entwicklungen für $z \rightarrow \infty$, b fest.

Выводятся асимптотические разложения для вырожденных гипергеометрических функций $U(a, b, z)$ и $M(a, b, z)$ при большом действительном значении b и $z = yb$ ($a > 0$, $y > 0$, фиксированы). Исследуются случаи $y < 1$ и $y > 1$. Результаты включают асимптотические разложения при $b \rightarrow \infty$, z фиксировано и хорошо известные разложения при $z \rightarrow \infty$, b фиксировано.

Asymptotic expansions are derived for the confluent hypergeometric functions $U(a, b, z)$ and $M(a, b, z)$, holding for large real values of b and $z = yb$ ($a > 0$, $y > 0$, fixed). The cases $y < 1$ and $y > 1$ are investigated. The results include the asymptotic expansions für $b \rightarrow \infty$, z fixed, and the well-known expansions when $z \rightarrow \infty$, b fixed.

1. Einleitung

Im Hauptteil der Arbeit (Abschnitte 2–5) werden asymptotische Entwicklungen für die konfluenten hypergeometrischen Funktionen $U(a, b, z)$ und $M(a, b, z)$ für reelle Werte von a, b, z hergeleitet, die bei festem $a > 0$ für $b \rightarrow \infty$ und $z = yb$ ($y > 0$, fest) gelten. Getrennt werden die Fälle $y < 1$ und $y > 1$ betrachtet. Zur Herleitung der Ergebnisse werden die folgenden bekannten Integraldarstellungen verwendet:

$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \quad (a > 0, z > 0), \quad (1.1)$$

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{-zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad (b > a > 0). \quad (1.2)$$

In Abschnitt 6 wird gezeigt, daß die beiden Entwicklungen für $y > 1$ die bekannten asymptotischen Entwicklungen für $z \rightarrow \infty$, b fest als Grenzfälle enthalten, und aus denen für $y < 1$ werden die asymptotischen Entwicklungen für $b \rightarrow \infty$, z fest hergeleitet. In entsprechender Weise kann man aus den Resultaten auch Entwicklungen erhalten, die gelten, wenn b und z von unterschiedlicher Größenordnung gegen ∞ streben. Durch einige numerische Beispiele wird in Abschnitt 7 die Brauchbarkeit der erhaltenen asymptotischen Entwicklungen demonstriert.

Bereits in [20] finden sich asymptotische Entwicklungen von $U(a, b, z)$ und $M(a, b, z)$ für große Werte von b (a fest), die sogar gleichmäßig bezüglich z/b in jedem kompakten Teilintervall von $(0, \infty)$ gültig sind. Sie sind mit Hilfe neuer Darstellungen der Funktionen durch komplexe Kurvenintegrale erhalten worden und haben den großen Vorteil, daß sie den Übergang vom Fall $y < 1$ zum Fall $y > 1$ erfassen (allerdings nicht die Fälle $y = o(1)$ und $y \rightarrow \infty$). Diesen Vorzügen steht, vom praktischen Gesichtspunkt betrachtet, der Nachteil gegenüber, daß die asymptotische Skala parabolische Zylinderfunktionen enthält, so daß die Handhabung der Entwicklungen erschwert ist. Zuvor war der Fall $y \sim 1$ schon in [6, 7] untersucht worden. DINGLE gibt in seinem Buch [5] die Anfangsglieder asymptotischer Entwicklungen der Funktion $M(a, b, z)$ für $b \rightarrow \infty$, $z < b$, $z > b$ und $z \sim b$ sowie der Funktion $U(a, b, z)$ für $b \rightarrow \infty$, $z > b$ an. Seine Entwicklungen sind denen in dieser Arbeit ähnlich oder stimmen mit ihnen überein; jedoch werden bei uns die Reihen alle vollständig mit ihrem allgemeinen Glied angegeben und nicht nur die Anfangsglieder bestimmt. Weitere Teilresultate, auch immer nur mit den Anfangsgliedern der Entwicklungen, finden sich in [8, 18], doch können dort Variable teilweise komplex sein. Andere Autoren haben asymptotische Entwicklungen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen für andere als die hier betrachteten Fälle bzw. solche für die Whittaker-Funktionen angegeben [10, 11, 17, 22, 25]. Besonders erwähnt seien die Ergebnisse von WONG für $W_{k,m}(z)$ unter den Bedingungen $z \rightarrow \infty$, $k = o(z)$, $m = o(\sqrt{z})$, woraus sich für $U(a, b, z)$ die Bedingungen $b - 2a = o(z)$, $b = o(\sqrt{z})$ ergeben.

2. Eine asymptotische Entwicklung von $U(a, b, z)$ für $y > 1$

Zur Herleitung der asymptotischen Entwicklungen zerlegen wir in bekannter Weise die Integranden von (1.1), (1.2) in ein Produkt aus einem schnell und einem langsam variierenden Faktor (vgl. etwa [3: Kap. 19, 33]): Die Maximalstelle des schnell variierenden Faktors ist eine der kritischen Stellen, die für die Asymptotik des Integrals einen Beitrag liefern können. Die beiden Fälle $y < 1$ und $y > 1$ unterscheiden sich darin, daß die Maximalstelle in einem außerhalb, im anderen innerhalb des Integrationsintervalls liegt (für $y = 1$ fällt sie im wesentlichen mit der unteren Integrationsgrenze zusammen). Dabei verhalten sich $U(a, b, z)$ und $M(a, b, z)$ in den beiden Fällen entgegengesetzt: Bei $U(a, b, z)$ liegt das Maximum außerhalb des Integrationsintervalls, wenn $y > 1$ ist, bei $M(a, b, z)$ aber für $y < 1$.

Wir beginnen mit $U(a, b, z)$, $y > 1$, d. h., $z > b$. Von den Zerlegungsmöglichkeiten des Integranden sei zunächst die folgende gewählt (vgl. [5: Kap. 8], [6]):

$$U(a, b, z) = \Gamma(a)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-g(a,b,z,t)} [t(1+t)]^{a-1} dt, \quad (2.1)$$

$$g(a, b, z, t) = zt - d \ln(1+t) \quad \text{mit } d = b - 2a.$$

Dabei darf wegen $b \rightarrow \infty$, a fest, angenommen werden, daß $d > 0$ ist. Der schnell variierende Faktor $\exp(-g(a, b, z, t))$ hat die Maximalstelle $t_0 = -x/z$ mit

$$x = z - d = z - b + 2a = (y - 1)b - 2a. \quad (2.2)$$

Unter der Voraussetzung $x > 0$ oder $z > d$ (womit der Fall $y > 1$ erfaßt ist) wird $t_0 < 0$, liegt t_0 also außerhalb des Integrationsintervalls, und mit $b \rightarrow \infty$ ist auch $x \rightarrow \infty$. Aus (2.1) folgt

$$U(a, b, z) = \Gamma(a)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-xt} f(a, b, z, t) dt, \quad (2.3)$$

$$f(a, b, z, t) = [t(1+t)]^{a-1} \exp\{d[\ln(1+t) - t]\}.$$

Die asymptotische Entwicklung ergibt sich nun mit Hilfe einer Modifizierung des Watsonschen Lemmas. Seine unmittelbare Anwendung ist nicht möglich, da nach (2.2), auch der Faktor $f(a, b, z, t)$ von dem großen Parameter x abhängt. Dessen Potenzreihenentwicklung (siehe (2.5)) hat aber die spezielle Form

$$f(a, b, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(a, b, x) t^{a+m-1},$$

wobei sich c_m additiv aus Summanden von höchstens der Ordnung $O(x^{lm/2l})$ zusammensetzt. Beim üblichen Beweis des Watsonschen Lemmas wird für den N -ten Reihenrest $r_N(t)$ der Potenzreihe einer Funktion $f(t)$, für den $r_N(t) = O(t^{a+N-1})$ für $t \rightarrow 0$ gilt, die Aussage $\int_0^{\infty} e^{-xt} r_N(t) dt = O(x^{-a-N})$ bewiesen. Hier aber ist $r_N = r_N(x, t)$, und für das Integral über $e^{-xt} r_N$,

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} f(a, b, z, t) dt = \sum_{m=0}^{N-1} c_m(a, b, x) \Gamma(a+m)/x^{a+m},$$

gilt diese Aussage nicht. Man kann aber aus der Summe $\sum_{m=N}^{2(N-1)} c_m \Gamma(a+m)/x^{a+m}$ alle diejenigen Summanden herausziehen, deren Ordnung größer ist als x^{-a-N} (für $m > 2(N-1)$ treten solche Summanden nicht mehr auf). Dieser Teil der Summe sei mit $\sum_{m=N}^{2(N-1)} c_m'(a, b, x) \Gamma(a+m)/x^{a+m}$ bezeichnet. Statt $r_N(x, t)$ wird nun

$$r_N'(x, t) = f(a, b, z, t) - \sum_{m=0}^{N-1} c_m(a, b, x) t^{a+m-1} - \sum_{m=N}^{2(N-1)} c_m'(a, b, x) t^{a+m-1}$$

betrachtet. Die letzte Summe ist auch von der Ordnung $O(t^{a+N-1})$ für $t \rightarrow 0$, so daß in einem Intervall $(0, T_N]$ eine Abschätzung der Form $|r_N'(x, t)| \leq K_N(x) t^{a+N-1}$ ($T_N, K_N > 0$) gilt, also ist

$$\left| \int_0^{T_N} e^{-xt} r_N'(x, t) dt \right| \leq K_N(x) \Gamma(a+N)/x^{a+N}.$$

Die Potenzreihenentwicklung von $r_N'(x, t)$ enthält nur noch solche Koeffizienten c_m , für die

$$\int_0^{T_N} e^{-xt} c_m(a, b, x) t^{a+m-1} dt = O(x^{-a-N})$$

ist, und daher ist $K_N(x) = O(1)$. Da $\int_0^{\infty} e^{-xt} r_N'(x, t) dt$ von exponentieller Ordnung klein wird, ist somit

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} r_N'(x, t) dt = O(x^{-a-N})$$

bewiesen. Das heißt, daß die aus der formalen Entwicklung $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(a, b, x) \Gamma(a+m)/x^{a+m}$ durch Ordnen der Glieder nach der Skala $\{x^{-m}\}$ entstehende Reihe eine asymptotische Entwicklung von $U(a, b, z)$ ist.

Aus $\ln(1+t) - t = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} t^i/i, |t| < 1$ folgt

$$e^{d(\ln(1+t)-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k t^k, \quad \alpha_k = \sum_{(\bullet)} \frac{(-1)^r d^r}{\lambda_2! \dots \lambda_k! 2^{\lambda_2} \dots 2^{\lambda_k}} \quad (2.4)$$

Die-Summationsbedingung (*) bedeutet, daß über alle nichtnegativen ganzen λ_i mit $2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k = k$ zu summieren ist, und es ist $r = \lambda_2 + \dots + \lambda_k$. Speziell sind $\alpha_0 = 1$ und $\alpha_1 = 0$ (da die Summationsbedingung für $k = 1$ nicht erfüllbar ist). Durch Multiplikation von (2.4) mit der Reihe $(1+t)^{a-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{a-1}{l} t^l, |t| < 1$, und mit t^{a-1} folgt weiter ($k+l=m$)

$$f(a, b, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m t^{m+a-1} \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{a-1}{l} \alpha_{m-l}. \quad (2.5)$$

Wegen $\int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a+m-1} dt = \Gamma(a+m)/x^{a+m} = \Gamma(a) (a)_m/x^{a+m}$ (hier bedeutet $(a)_m$ das Pochhammer-Symbol: $(a)_0 = 1, (a)_m = a(a+1) \dots (a+m-1)$ für $m \geq 1$) ergibt sich nach gliedweiser Integration von (2.5) für $U(a, b, z)$ die formale Entwicklung

$$x^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (a)_m/x^m \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{a-1}{l} \alpha_{m-l}.$$

Wegen $\binom{a-1}{l} = (a-l)/l!$ ist $(a)_m \binom{a-1}{l} = (a-l)_{m+l}/l!$. Nun ist zu berücksichtigen, daß in α_k der Faktor d^r auftritt, der asymptotisch äquivalent x^r ist. Daher können in der formalen Entwicklung Summanden mit dem gemeinsamen Faktor $q = d/x$, für den also $q \asymp 1$ gilt, und seinen Potenzen abgespaltet werden. Mit $n = m - r$ erhält man, da $2r \leq m - l = r + n - l$ ist,

$$U(a, b, z) \approx x^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \left\{ \frac{(a-n)_{2n}}{n!} + \sum_{r=1}^n q^r \sum_{l=0}^{n-r} \frac{(-1)^{n+l}}{l!} (a-l)_{n+r+l} \sum_{(\bullet\bullet)} \frac{1}{\lambda_2! \dots \lambda_{n-l+1}! 2^{\lambda_2} \dots (n-l+1)^{\lambda_{n-l+1}}} \right\}. \quad (2.6)$$

Die Summationsbedingung (***) bedeutet, daß über alle nichtnegativen ganzen λ_i mit $\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-l+1} = r$ zu summieren ist, für die $\lambda_2 + 2\lambda_3 + \dots + (n-l)\lambda_{n-l+1} = n-l$ ist. Schließlich sollen noch die in [16] eingeführten Zahlen D_r^s mit $s = n-l$ benutzt werden, die gerade durch

$$D_r^s = (r+s)! \sum_{(\bullet\bullet\bullet)} 1/(\lambda_2! \dots \lambda_{s+1}! 2^{\lambda_2} \dots (s+1)^{\lambda_{s+1}})$$

definiert waren (dazu siehe den Anhang, insbesondere (A1)). Dann ergibt sich aus (2.6) für $b \rightarrow \infty, z = yb, x > 0$ die asymptotische Entwicklung

$$U(a, b, z) \approx x^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n} \left\{ \frac{(a-n)_{2n}}{n!} + \sum_{r=1}^n q^r \sum_{s=r}^n \frac{(-1)^s}{(n-s)!} \frac{D_r^s}{(r+s)!} (a-n+s)_{2n+r-s} \right\}, \quad (2.7)$$

$x = z - b + 2a$, $q \doteq (b - 2a)/x$. Wenn man diese mit $n = 2$ abbricht und die Glieder $\{\dots\}$ ausrechnet, erhält man die in [5: Chap. VIII, (87)] mit der Ergänzung in (81) angegebenen ersten Glieder einer asymptotischen Entwicklung für $U(a, b, z)$.

Es ist verständlich, daß mit dem eingeschlagenen Weg der Herleitung von (2.7) keine realistische Restabschätzung erzielt werden kann. Die durch Anwendung von (2.7) zu erreichende Genauigkeit bei Funktionswertberechnungen hängt wesentlich von x ab. Mit kleiner werdendem x , also mit der Annäherung von y an 1, verschlechtert sich die Approximation (siehe Abschnitt 7). In diesem Fall ist es zweckmäßig, die Zerlegung in (2.1) so abzuändern, daß

$$-g(a, b, z, t) = zt - (d - \eta) \ln(1 + t) \tag{2.8}$$

mit einer geeigneten Funktion $\eta = \eta(a, b, z)$ mit $\eta = o(b)$ wird. Dann ist $(1 + u/x)^p$ mit $p = a - 1 + \eta$ zu entwickeln, wodurch die Koeffizienten $\binom{p}{l}$ auftreten und daher die im Anschluß von (2.5) vorgenommene Zusammenfassung nicht möglich ist. Im übrigen verläuft alles wie zuvor, und es ergibt sich

$$U(a, b, z) \approx x_1^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{x_1^n} \left\{ \binom{p}{n} + \sum_{r=1}^n (a+n)_r q_1^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \frac{D_r^s}{(r+s)!} \binom{p}{n-s} \right\}, \tag{2.9}$$

$x_1 = x + \eta$, $p = a - 1 + \eta$, $q_1 = (d - \eta)/x_1$, gültig für $b \rightarrow \infty$, $z > d - \eta$. Die Entwicklung (2.7) ist hierin für $\eta = 0$ enthalten. Es ist bemerkenswert, daß sich durch geeignet gewähltes η mit (2.9) eine beträchtliche Genauigkeitssteigerung gegenüber (2.7) erreichen läßt. Dieser Effekt wird dadurch erzielt, daß für ein solches η die Beträge der Entwicklungsglieder rasch abnehmen, bevor sie wieder wachsen. Testrechnungen zeigen, daß für den Funktionswert mit (2.9) — trotz schlechterer Anfangsnäherung x_1^{-a} — im Vergleich zu (2.7) mehrere Dezimalstellen zusätzlich erhalten werden können (vgl. Abschnitt 7). Offen bleibt die Frage, wie η optimal zu wählen ist.

3. Eine asymptotische Entwicklung von $M(a, b, z)$ für $y < 1$

Wenn man in der Integraldarstellung (1.2) von $M(a, b, z)$ eine entsprechende Zerlegung wie für $U(a, b, z)$ in (2.1) vornimmt, erhält man

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{-g(a,b,z,t)} [t(1-t)]^{a-1} dt, \tag{3.1}$$

$$g(a, b, z, t) = -zt - d \ln(1 - t).$$

Die Maximalstelle von $-g(a, b, z, t)$ ist $t_0 = x/z$, wobei x dieselbe Bedeutung wie in (2.2) hat. Jetzt werde $x < 0$ oder $z < d$ vorausgesetzt, so daß t_0 wieder außerhalb des Integrationsintervalls liegt ($z < d$ ist für $y < 1$ erfüllt). Nach der Substitution $u = -xt$ folgt aus (3.1)

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \frac{1}{(-x)^a} \int_0^{-x} e^{-u} f^*(a, b, z, u) du \tag{3.2}$$

mit

$$f^*(a, b, z, u) = [u(1 + u/x)]^{a-1} \exp \{d[\ln(1 + u/x) - u/x]\}.$$

Damit stimmt das Integral in (3.2) bis auf die obere Grenze mit dem in (2.3) überein, wenn darin noch $u = xt$ substituiert wird. Für $b \rightarrow \infty$ strebt aber auch $x \rightarrow \infty$, und die Integrale $\int_x^\infty e^{-u} u^m du$ sind dann von exponentiell kleiner Ordnung. Somit kann $-x$ durch ∞ ersetzt werden, ohne daß sich die asymptotische Entwicklung ändert, d. h., es gilt (2.7) auch für $M(a, b, z)$, wenn man den Faktor x^{-a} durch $(\Gamma(b)/\Gamma(b-a)) \times (-x)^{-a}$ ersetzt. Ändert man die Zerlegung des Integranden so ab, daß $-g(a, b, z, t) = zt + (d - \eta) \ln(1 - t)$, $\eta = o(b)$, wird, erhält man in Analogie zu (2.9) für $b \rightarrow \infty$, $z = yb$, $x_1 < 0$

$$M(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \frac{1}{(-x_1)^a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{x_1^n} \left\{ \binom{p}{n} + \sum_{r=1}^n (a+n)_r q_1^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \frac{D_r^s}{(r+s)!} \binom{p}{n-s} \right\}. \quad (3.3)$$

Wegen $\Gamma(b)/\Gamma(b-a) \sim b^a$ ($b \rightarrow \infty$) ist also $M(a, b, z) \sim (b/(-x_1))^a = (1-y)^{-a}$ ($z = yb$).

4. Eine asymptotische Entwicklung von $M(a, b, z)$ für $y > 1$

Um eine asymptotische Entwicklung von $M(a, b, z)$ für $b \rightarrow \infty$, $z = yb$, $y > 1$ zu erhalten, wird die Formel

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{\varepsilon(a-b)\pi i} e^z U(b-a, b, -z) + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{\varepsilon a \pi i} U(a, b, z), \quad (4.1)$$

$\varepsilon = 1$ für $\text{Im } z > 0$, $\varepsilon = -1$ für $\text{Im } z < 0$ herangezogen [8: Kap. 4]. Sie kann für reelle z in der folgenden Form geschrieben werden [5: Kap. 4]:

$$M(a, b, z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{z^2 - b} \psi(1-a, 2-b, -z) + \cos \pi a \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} U(a, b, z). \quad (4.2)$$

mit

$$\psi(a, b, z) = \Gamma(a)^{-1} \int_0^\infty e^{-u} u^{a-1} (1+u/z)^{b-a-1} du.$$

Dabei ist im ersten Summanden das Integral, durch das ψ definiert ist, als Hauptwert aufzufassen. Sein Wert bestimmt sich, indem in der komplexen Ebene längs zweier von 0 ausgehenden, zur reellen Achse symmetrischen Halbgeraden, die einen kleinen Winkel zur reellen Achse einschließen, integriert und von den Werten das Mittel genommen wird. Für $a > 0$, $z > 0$ ist $\psi(a, b, z) = z^a U(a, b, z)$, so daß (2.7) (oder (2.9)) eine asymptotische Entwicklung für $\psi(a, b, z)$ im Fall $b \rightarrow \infty$, $z = yb$, $y > 1$ liefert. Wie in [5] begründet wird, darf man in dieser, um eine asymptotische Entwicklung für $\psi(1-a, 2-b, -z)$ zu erhalten, die Variablen a, b, z der Reihe nach durch $1-a, 2-b, -z$ ersetzen. Dabei sollen noch abkürzende die Bezeichnungen $c = b-2$, $w = c-z$ verwendet werden. Benutzt man (2.9) mit $\eta = -2a$, wodurch sich für ganzzahlige a wesentliche Vereinfachungen ergeben, so sind der Reihe nach p, x_1, q_1 durch $a-2, w, -c/w$ zu ersetzen, und der führende Term wird $(-z/w)^{1-a}$. Für den Faktor $U(a, b, z)$ im zweiten Summanden von (4.2) kann auch die

asymptotische Entwicklung (2.9) eingesetzt werden, wobei aus Gründen der Einheitlichkeit der beiden Teilentwicklungen $\eta = 2(1 - a)$ gewählt sei. Dieses η ist allerdings aus numerischen Erwägungen heraus nicht besonders günstig (siehe Abschnitt 7). Dann wird $p = -a + 1$, $x_1 = w$, $q_1 = -c/w$, und es ergibt sich aus (4.2) für $b \rightarrow \infty$, $z = yb$, $y > 1$

$$\begin{aligned}
 M(a, b, z) \approx & \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{iz^{1-b}} (-w)^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n}{w^n} \left\{ \binom{a-2}{n} \right. \\
 & + \sum_{r=1}^n (1-a+r)_r \left(\frac{c}{-w} \right)^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \frac{D_r^s}{(r+s)!} \binom{a-2}{n-s} \Big\} \\
 & + \cos \pi a \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-w)^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n}{w^n} \left\{ \binom{1-a}{n} \right. \\
 & + \sum_{r=1}^n (a+n)_r \left(\frac{c}{-w} \right)^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \frac{D_r^s}{(r+s)!} \binom{1-a}{n-s} \Big\}, \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

$$c = b - 2, \quad w = c - z.$$

5. Eine asymptotische Entwicklung von $U(a, b, z)$ für $y < 1$

Zur Herleitung einer asymptotischen Entwicklung für $U(a, b, z)$ im Fall $b \rightarrow \infty$, $z < c$ kann von der aus (4.1) folgenden Beziehung

$$\begin{aligned}
 U(a, b, z) = & \frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)} e^{iz^{a-b}} e^{-\pi i(a-1)\psi} (1-u, 2-b, -z) \\
 & + \frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)} e^{-\pi i a} M(a, b, z) \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

ausgegangen werden. Ihr erster Summand unterscheidet sich vom ersten Summanden in (4.2) um den Faktor $\Gamma(b-a) e^{-\pi i(a-1)\psi} / \Gamma(b)$, so daß für die gesuchte asymptotische Entwicklung die erste Teilreihe von (4.3) bis auf den neuen Vorfaktor $\Gamma(b-a) \times e^{iz^{1-b}} w^{a-1} / \Gamma(a)$ übernommen werden kann. Im zweiten Summanden von (5.1) ist für $M(a, b, z)$ die asymptotische Entwicklung (3.3) einzusetzen, und es soll $\eta = 2(1-a)$ gewählt werden, wie im Abschnitt 4. Wie dort ergibt sich dann für $b \rightarrow \infty$, $0 < z < c$ die asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}
 U(a, b, z) \approx & \frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)} e^{iz^{1-b}} w^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n}{w^n} \left\{ \binom{a-2}{n} \right. \\
 & + \sum_{r=1}^n (-1)^r (1+a-n)_r \left(\frac{c}{w} \right)^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \binom{a-2}{n-s} \frac{D_r^s}{(r+s)!} \Big\} \\
 & + w^{a-1} \cos \pi a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n}{w^n} \left\{ \binom{1-a}{n} \right. \\
 & + \sum_{r=1}^n (-1)^r (a+n)_r \left(\frac{c}{w} \right)^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \binom{1-a}{n-s} \frac{D_r^s}{(r+s)!} \Big\} \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Beachtet man $\psi(1-a, 2-b, -z) = \psi(b-a, b, -z)$, so ergibt sich nach Substitution $1-u/z = -t$ für den ersten Summanden in (5.1) formal

$$\begin{aligned} & (\Gamma(b-a)/\Gamma(a)) e^{z^{a-b}} e^{-\pi i(a-1)\psi(1-a, 2-b, -z)} \\ &= e^{z^{a-b}} e^{-\pi i(a-1)} \Gamma(a)^{-1} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{b-a-1} (1-u/z)^{a-1} du \\ &= \Gamma(a)^{-1} \int_{-1}^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt, \end{aligned}$$

wofür im folgenden abkürzend $U^*(a, b, z)$ geschrieben werde, und durch Substitution $t = -\tau$ für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned} (\Gamma(b-a)/\Gamma(b)) e^{-\pi ia} M(a, b, z) &= \Gamma(a)^{-1} e^{-\pi ia} \int_{-1}^0 e^{-z\tau} (-\tau)^{a-1} (1+\tau/z)^{b-a-1} d\tau \\ &= -\Gamma(a)^{-1} \int_{-1}^0 e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt. \end{aligned}$$

Das heißt, daß (5.1) formal (für ganzzahlige $a > 0$ exakt) als Aufspaltung des $U(a, b, z)$ definierenden Integrals über $[0, \infty)$ in die Differenz zweier Integrale über $[-1, \infty)$ und $[-1, 0]$ interpretiert werden kann. Daher ist die erste Teilentwicklung in (5.2) die asymptotische Entwicklung von $U^*(a, b, z)$, und diese läßt sich auch unmittelbar aus dem Integral herleiten. Wie sich herausstellen wird, hat sie dann eine andere Form als in (5.2).

Der Integrand $H(a, b, z, t)$ von $U^*(a, b, z)$ soll gemäß

$$\begin{aligned} H(a, b, z, t) &= e^{-g(a, b, z, t)} [t/(1+t)]^{a-1}, \\ g(a, b, z, t) &= zt - c \ln(1+t), \quad c = b-2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

zerlegt werden. Die Maximalstelle von $\exp(-g(a, b, z, t))$ ist $t_0 = w/z$ mit $w = c - z$, und wegen $c > z$ wird $w > 0$. Durch die Substitution $u = z(t - t_0)/\sqrt{2c}$ ergibt sich aus (5.3)

$$\begin{aligned} H\left(a, b, z, u \frac{w+2u/\gamma}{z}\right) &= \frac{\sqrt{2c}}{z} e^{-u} \left(\frac{c}{z}\right)^c \left(\frac{w}{c}\right)^{a-1} e^{-u^2} f(a, b, z, u), \\ f(a, b, z, u) &= \left[\frac{1+\gamma cu/w}{1+\gamma u}\right]^{a-1} \exp\left(c \ln(1+\gamma u) - \frac{2u}{\gamma} + u^2\right), \quad \gamma = \sqrt{\frac{2}{c}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Der unteren Integrationsgrenze $t = -1$ entspricht $u = -1/\gamma$. Aus

$$c \ln(1+\gamma u) - 2u/\gamma + u^2 = \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^{i-1} c(\gamma u)^i/i, \quad |\gamma u| < 1,$$

folgt

$$\begin{aligned} \exp\left(c \ln(1+\gamma u) - 2u/\gamma + u^2\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu_k (\gamma u)^k, \\ \mu_k &= \sum_{(*)} (-1)^r c^r / (\lambda_3! \dots \lambda_k! 3^{2k} \dots k^{2k}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Summationsbedingung (*) bedeutet hier, daß über alle nichtnegativen ganzen λ_i mit $3\lambda_3 + \dots + k\lambda_k = k$ zu summieren ist, und es ist $r = \lambda_3 + \dots + \lambda_k$. Speziell sind $\mu_0 = 1$ und $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Für die gleichen u ergibt sich mit $\beta = 1 - c/w$

$$\frac{1 + \gamma cu/w}{1 + \gamma u} = 1 + \beta \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (\gamma u)^i$$

und weiter

$$\left(\frac{1 + \gamma cu/w}{1 + \gamma u}\right)^{a-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a-1}{k} \beta^k \sum_{l=k}^{\infty} (-1)^l \binom{l-1}{k-1} (\gamma u)^l$$

oder

$$\left(\frac{1 + \gamma cu/w}{1 + \gamma u}\right)^{a-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \delta_l (\gamma u)^l, \quad \delta_0 = 1, \delta_l = \sum_{s=1}^l \binom{a-1}{s} \binom{l-1}{s-1} \beta^s. \tag{5.6}$$

Somit folgt aus (5.5) und (5.6)

$$f(a, b, z, u) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\gamma u)^m \sum_{l=0}^m \mu_{m-l} \delta_l. \tag{5.7}$$

Nach Einsetzen dieser Potenzreihe in (5.4) und gliedweiser Integration (wobei über die Grenzen Entsprechendes wie in Abschnitt 2 zu bemerken ist) ergibt sich wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u^{2m} du = (2m)! \sqrt{\pi} / 2^m m! \text{ für } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(a, b, z, u) du \text{ die formale Entwicklung}$$

$$\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} (2m)! / c^m 2^m m! \sum_{l=0}^{2m} \mu_{2m-l} \delta_l.$$

Da μ_{2m-l} Potenzen von c enthält, muß noch umgeordnet werden. Mit $n = m - l$ geht die letzte Entwicklung in die Form

$$\begin{aligned} &\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} c^{-n} \sum_{m=n}^{3n} (-1)^{m+n} (2m)! / 2^m m! \\ &\times \sum_{l=0}^{3n-m} \delta_l \sum_{(\bullet\bullet\bullet)} 1 / (\lambda_3! \dots \lambda_{2n+2-l}! 3^{l_3} \dots (2n+2-l)^{l_{2n+2-l}}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

über. Die Summationsbedingung (**) bedeutet hier, daß über alle nichtnegativen ganzen λ_i mit $\lambda_3 + \dots + \lambda_{2n+2-l} = m - n$ zu summieren ist, für die $\lambda_3 + 2\lambda_4 + \dots + (2n-l)\lambda_{2n+2-l} = 2n-l$ ist. Um zu einer vereinfachten Darstellung zu kommen, werden noch die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Phi_l^n &= (-1)^l \sum_{(\bullet\bullet\bullet\bullet)} (-1)^r (2n+2r)! / 2^{n+r} (n+r)! \\ &\times 1 / (\lambda_3! \dots \lambda_{2n+2-l}! 3^{l_3} \dots [(2n+2-l)^{l_{2n+2-l}}]) \end{aligned}$$

($n \in \mathbb{N}; l = 0, \dots, n$) eingeführt. Die Summationsbedingung (***) bedeutet hier, daß über alle nichtnegativen ganzen λ_i wie oben in (**) zu summieren ist, wobei $r = m - n$ ist. In [13, 14] wurde gezeigt, daß Φ_0^n die Koeffizienten γ_n der Stirlingschen Reihe sind (weiteres über Φ_l^n ist im Anhang enthalten). Endlich sollen die δ_l wieder ausführlich wie in (5.6) aufgeschrieben und die Summation bezüglich s und l vertauscht

werden. Somit ergibt sich, wenn man noch den Faktor aus (5.4) berücksichtigt,

$$U^*(a, b, z) \approx \frac{1}{\Gamma(a)} \sqrt{\frac{2\pi}{c}} e^{-w} \left(\frac{c}{z}\right)^{c+1} \left(\frac{w}{c}\right)^{a-1} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} \left\{ \gamma_n + \sum_{m=1}^{2n} \binom{a-1}{m} \beta^m \sum_{l=m}^{2n} (-1)^l \binom{l-1}{m-1} \Phi_l^n \right\}.$$

Zur weiteren Vereinfachung werde

$$T_m^n \equiv \sum_{l=m}^{2n} (-1)^l \binom{l-1}{m-1} \Phi_l^n \quad (n \in \mathbb{N}; m = 1, \dots, 2n) \quad \text{und} \quad T_0^n = \gamma_n \tag{5.9}$$

definiert, wobei $T_1^n = 0$ ist (siehe Anhang). Dann erhält man jetzt anstelle von (5.2) für $b \rightarrow \infty, z < c$ die asymptotische Entwicklung

$$U(a, b, z) \approx \frac{1}{\Gamma(a)} \sqrt{\frac{2\pi}{c}} e^{-w} \left(\frac{c}{z}\right)^{c+1} \left(\frac{w}{c}\right)^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} \sum_{m=0}^{2n} T_m^n \binom{a-1}{m} \beta^m + \cos \pi a \frac{1}{w^a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n}{w^n} \left\{ \left(\frac{1-a}{n} \right) + \sum_{r=1}^n (-1)^r (a+n)_r \left(\frac{c}{w}\right)^r \sum_{s=r}^n (-1)^s \frac{D_r^s}{(r+s)!} \binom{1-a}{n-s} \right\}, \tag{5.10}$$

$c = b - 2, w = c - z, \beta = 1 - c/w, T_m^n$ siehe (5.9) und Anhang. Numerische Gründe waren dafür ausschlaggebend, daß zur Herleitung von (5.10) von der Zerlegung in (5.3) und nicht von der in (2.1) ausgegangen wurde. Zur Erzielung der gleichen Genauigkeit benötigt man nämlich mit (5.3) weniger Reihenglieder.

Die Anwendung der verallgemeinerten Zerlegung (2.8) statt (5.3) führt hier nicht zu einer nennenswerten Genauigkeitssteigerung.

Der Vergleich von (5.10) mit (5.2) zeigt, daß sich der Vorfaktor von (5.10) ergibt, indem man in (5.2) $\Gamma(b - a)$ durch die Stirlingsche Formel ersetzt, und es ist zu vermuten, daß die erste Teilentwicklung in (5.10) durch Multiplikation der Stirlingschen Reihe für $\Gamma(b - a)$ mit der ersten Teilentwicklung aus (5.2) entsteht. Davon ausgehend, läßt sich die erste Teilentwicklung in (4.3) ersetzen durch

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a) \Gamma(b - a)} \sqrt{\frac{2\pi}{c}} e^{-w} \left(\frac{c}{z}\right)^{c+1} \left(-\frac{w}{c}\right)^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} \sum_{m=0}^{2n} T_m^n \binom{a-1}{m} \beta^m.$$

6. Grenzfälle

Aus den in den Abschnitten 2 bis 5 erhaltenen asymptotischen Entwicklungen lassen sich solche für die Grenzfälle $z \rightarrow \infty, b$ fest und $b \rightarrow \infty, z$ fest herleiten. Zunächst sei $U(a, b, z)$ für $z \rightarrow \infty, b$ fest betrachtet. Dann wird $x \sim z$, und wenn man (2.9) benutzt, erreicht man, daß $x_1 = z$ wird durch $\eta = b - 2a = d$ (dieses η war in Abschnitt 2 ausgeschlossen). Damit wird $q_1 = 0, p = b - a - 1$, also $\binom{p}{n} = (-1)^n \times (a - b + 1)_n / n!$. So ergibt sich aus (2.9) die bekannte asymptotische Entwicklung

$$U(a, b, z) \approx z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a)_n (a - b + 1)_n / n! z^n \quad (z \rightarrow \infty).$$

Wenn man von (4.2) ausgeht, für den Faktor $z^{-a} \psi(a, b, z)$ die soeben hergeleitete Entwicklung verwendet und für $\psi(1 - a, 2 - b, -z)$ dieselben Ersetzungen wie in

Abschnitt 4 vornimmt und dann $\eta = -(b - 2a)$ setzt, gelangt man zu

$$M(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{-z} z^{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n (b-a)_n}{n! z^n} + \cos \pi a \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (a-b+1)_n}{n! z^n} \quad (z \rightarrow \infty).$$

Aus (3.3) läßt sich eine asymptotische Entwicklung von $M(a, b, z)$ für den Fall $b \rightarrow \infty$, z fest erhalten, indem man $\eta = -(z + 2a)$ setzt. Dann wird $-x_1 = b$, $p = -(z + a + 1)$, $q_1 = -(1 + z/b)$. Damit folgt aus (3.3), wenn man q_1 durch die Reihe nach Potenzen von z/b ersetzt, die Potenzen von $1/b$ zusammenfaßt und das Produkt der Pochhammer-Symbole anders zerlegt ($r' = \min(r, k - r)$),

$$M(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} \frac{1}{b^a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{b^k} \left\{ \frac{(z+a+1)_k}{k!} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \sum_{m=0}^{r'} \binom{r}{m} (a+k)_{r-m} z^m \sum_{s=r}^{k-m} \frac{D_r^s}{(r+s)!} \frac{(z+a+1)_{k-m-s}}{(k-m-s)!} \right\}. \quad (6.1)$$

Insbesondere ist $\Gamma(b)/\Gamma(b-a) b^a = 1 + O(b^{-1})$. Man könnte diese Gleichung noch durch die asymptotische Entwicklung der linken Seite für $b \rightarrow \infty$ ersetzen (siehe etwa [24]) und mit der Reihe in (6.1) multiplizieren. Das Ergebnis müßte mit derjenigen asymptotischen Entwicklung übereinstimmen, die aus der Potenzreihe

$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} ((a)_n / (b)_n n!) z^n$ folgt, wenn man nach Potenzen von $1/b$ ordnen würde.

Die asymptotische Entwicklung von $U(a, b, z)$ für $b \rightarrow \infty$ bei festem z ergibt sich wie folgt. Statt $\beta \asymp 1$ wie in Abschnitt 5 gilt $\beta = (w-c)/w = -(z/c)(1-z/c)^{-1} = o(1)$, und außerdem ist $w/c = 1 - z/c \sim 1$. Daher wird in (5.10) $(w/c)^{a-1} \beta^m$ in eine Potenzreihe entwickelt: $(w/c)^{a-1} \beta^m = (-z/c)^m \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{a-1-m}{l} (z/c)^l$. Mit $k = l + m$ wird so

$$(w/c)^{a-1} \sum_{m=0}^{2n} T_m^n \binom{a-1}{m} \beta^m = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z/c)^k \sum_{m=0}^{2n} T_m^n \binom{a-1}{m} \binom{a-1-m}{k-m}.$$

Nach Zusammenfassung der c -Potenzen ($n+k=s$) ergibt sich eine der ersten Reihe in (5.10) entsprechende Entwicklung. Um eine der zweiten entsprechende zu erhalten, wird (6.1) benutzt, jedoch sollen der Einheitlichkeit wegen die Potenzen von $1/b$ durch die von $1/c$ ersetzt werden (das folgt aus (3.3) für $\eta = -(z - 2a + 2)$). Damit ergibt sich als vollständige asymptotische Entwicklung für $b \rightarrow \infty$, z fest ($r' = \min(r, k - r)$)

$$U(a, b, z) \approx \frac{1}{\Gamma(a)} \sqrt{\frac{2\pi}{c}} e^{-c+z} \left(\frac{c}{z}\right)^{c+1} \times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{c^s} \sum_{m=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \binom{a-1}{m} \sum_{k=m}^{s-m} (-1)^k T_m^{s-k} \binom{a-1-m}{k-m} z^k + \cos \pi a \frac{1}{c^a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{c^k} \left\{ \frac{(z+a-1)_k}{k!} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \sum_{m=0}^{r'} \binom{r}{m} (a+k)_{r-m} z^m \sum_{s=r}^{k-m} \frac{D_r^s}{(r+s)!} \frac{(z+a-1)_{k-m-s}}{(k-m-s)!} \right\}. \quad (6.2)$$

7. Einige numerische Ergebnisse

Zunächst seien einige Resultate zusammengestellt, die sich aus den Formeln (2.7) und (2.9) für $U(a, b, z)$ ergeben. In der folgenden Tabelle 1 sind zu gewissen Tripeln a, b, z jeweils untereinander drei Werte angegeben: der (durch numerische Auswertung von (1.1) erhaltene) auf die angegebene Stellenzahl genaue Funktionswert, der Wert nach (2.7) und der nach (2.9) mit $\eta = 2d/x$. Dabei sind bei den asymptotischen Formeln die Teilsummen für $n = 4$ berechnet worden. Die Zehnerpotenzen werden abgetrennt geschrieben. Testrechnungen ergaben, daß durch die Wahl $\eta = 2d/x$ die Approximation der Funktionswerte in dem Bereich der benutzten Werte von a, b, z gegenüber $\eta = 0$ in (2.7) deutlich verbessert wird, wenngleich mit diesem η nicht immer die optimale Annäherung erreicht wird.

Tabelle 1: Werte für $U(a, b, z)$ mit (2.7) und (2.9)

$a = 1$								
$z \ b \rightarrow$	10		20		30		40	
2b	7.97474	-1	4.40269	-2	3.04967	-2	2.33457	-2
	8.00409		4.40450		3.04994		2.33463	
	7.97591		4.40282		3.04969		2.33458	
1.5b	1.28389	-1	7.61309	-2	5.45931	-2	4.26750	-2
	1.55603		7.98180		5.53623		4.28965	
	1.28442		7.61534		5.46027		4.26796	
1.25b	1.81397	-1	1.16634	-1	8.75849	-2	7.06194	-2
	1.34539	0	5.35889		2.26621	-1	1.23634	-1
	1.81404	-1	1.16645		8.76000	-2	7.06357	-2
$a = 2$								
2b	5.37889	-3	1.74491	-3	8.60916	-4	5.12670	-4
	5.38447		1.74574		8.61054		5.12702	
	5.37919		1.74497		8.60928		5.12674	
1.5b	1.26597	-2	4.80163	-3	2.56849	-3	1.60919	-3
	1.31485		5.01670		2.62878		1.62822	
	1.26650		4.80444		2.56963		1.60968	
1.25b	2.29642	-2	1.01960	-2	5.99797	-3	4.01493	-3
	3.56415		2.95579		1.65914	-2	9.12650	
	2.29792		1.02094		6.00610	-3	4.02091	
$a = 3$								
2b	3.17349	-4	6.32058	-5	2.26955	-5	1.06512	-5
	3.17356		6.32184		2.26984		1.06519	
	3.17350		6.32067		2.26957		1.06512	
1.5b	1.03227	-3	2.62002	-4	1.07256	-4	5.47902	-5
	1.03337		2.66750		1.09320		5.55500	
	1.03228		2.62100		1.07308		5.48138	
1.25b	2.29500	-3	7.30914	-4	3.44597	-4	1.94734	-4
	2.32340		1.12739	-3	7.19990		4.27984	
	2.29516		7.32080	-4	3.45561		1.95414	

Es zeigt sich, daß Formel (2.7) für $y = 2$ (und damit auch für $y > 2$) recht gute Näherungen liefert, die mit größer werdendem a sogar noch besser werden. Für $y = 1.5$ beträgt der relative Fehler bei (2.7) schon einige Prozent, und für $y = 1.25$ ist die Formel unbrauchbar, jedoch läßt sich mit (2.9) und dem gewählten η der Funktionswert noch recht gut approximieren. Durch noch etwas größere η kommt man an den Funktionswert noch näher heran. So ergibt sich z. B. für $a = 2$, $z = 1.25b$ und $b = 10, 20, 30, 40$ mit $\eta = 2, 3, 5, 6$ der Reihe nach 2.29714, 1.02010, 6.00104, 4.01629. Ähnliche Ergebnisse weist Formel (3.3) für $M(a, b, z)$; $z < b$ bei vergleichbaren Werten von $|x|$ aus.

Die Tabellen 2 und 3 enthalten Ergebnisse für die Funktion $M(a, b, z)$ nach Formel (4.3) und für die Funktion $U(a, b, z)$ nach Formel (5.10). Untereinander sind jeweils vier Zahlen angegeben: der auf die angegebene Stellenzahl genaue Funktionswert, der sich aus der jeweils ersten Reihe in der Formel ergebende Näherungswert, der mit der vollständigen Formel erhaltene Wert und schließlich der Wert, der sich ergibt, wenn man als zweite Reihe in (4.3) bzw. (5.10) nach dem Faktor $\cos \pi a$ nicht die aus (2.9) und (3.3) folgenden Reihen für $\eta = 2(1 - a)$, sondern die für $\eta = 2d/x$ benutzt. Bei der Berechnung der Reihen sind wieder die Teilsummen 4. Ordnung verwendet worden; die erste Reihe in (4.3) ist für ganzzahlige a endlich. Völlig unbrauchbare Werte sind nicht abgedruckt und durch das Minuszeichen ersetzt.

Tabelle 2: Werte für $\Gamma(b - a) \Gamma(a) M(a, b, z) / \Gamma(b)$ mit (4.3) $a = 2$

$z \rightarrow$	10	20	30	40
$2b$	57.3155 57.3101 57.3160 57.3155	670.088 670.086 670.088 670.088	10799.8 10799.8 10799.8 10799.8	192768 192768 192768 192768
$1.5b$	3.01268 3.00002 3.07096 3.01269	3.92927 3.92446 3.93356 3.92927	7.37347 7.37090 7.37409 7.37347	15.5230 15.5214 15.5231 15.5230
$1.25b$	0.839798 0.816834 — 0.839814	0.502995 0.492797 — 0.503007	0.456651 0.450653 0.626258 0.456660	0.474788 0.470774 0.525683 0.474794

 $a = 3$

$2b$	120.078 120.078 120.077 120.078	978.254 978.254 978.254 978.254	13949.7 13949.7 13949.7 13949.7	233952 233952 233952 233952
$1.5b$	4.34491 4.34697 4.22317 4.34491	3.57766 3.57819 3.57266 3.57766	5.63636 5.63657 5.63585 5.63636	10.7924 10.7925 10.7923 10.7924
$1.25b$	0.961349 0.965938 — 0.961348	0.333972 0.335434 — 0.333969	0.240450 0.241139 — 0.240448	0.218032 0.218422 0.166617 0.218031

Man sieht, daß (4.3) für $y \geq 2$ sehr gute Näherungswerte liefert. Für $y = 1.5$ trifft das nur noch bei hinreichend großem b zu, und für $y = 1.25$ ist die Formel in der angegebenen Form nicht mehr brauchbar. Dagegen ist der an letzter Stelle stehende Näherungswert, der mit $\eta = 2d/x$ erhalten wird, auch dann noch recht gut.

Tabelle 3: Werte für $U(a, b, z)$ mit (5.10) $a = 2$

$b \rightarrow$ $z \downarrow$	20	30	40
2z	218.642 218.641 218.643 218.643	8581.87 8581.91 8581.91 8581.91	355418 355423 355423 355423
1.5z	0.795900 0.787207 0.971572 0.795874	1.98604 1.98207 1.99221 1.98605	5.16948 5.16725 5.17019 5.16952
1.25z	0.120268 0.0975113 — 0.103548	0.135483 0.124427 — 0.134016	0.160296 0.153673 — 0.160133

 $a = 3$

2z	53.5108 53.5112 53.5110 53.5111	2113.21 2113.22 2113.22 2113.22	87822.1 87823.4 87823.4 87823.4
1.5z	0.137704 0.138490 — 0.137722	0.337315 0.337606 0.335286 0.337357	0.871169 0.871281 0.871011 0.871172
1.25z	0.0161134 0.0192068 — 0.0198601	0.0169103 0.0179510 — 0.0177059	0.0191336 0.0196178 — 0.0192127

Das Bild ist ähnlich wie in Tabelle 2, doch sind die Näherungswerte für $y > 0.5$ insgesamt schlechter als in Tabelle 2 für $y < 2$ (die Werte für $z = 10$ wurden daher weggelassen). Die Ungenauigkeiten sind daher im wesentlichen der zweiten Reihe in (5.10) anzulasten, in die (2.9) und speziell die Wahl von η in dieser Formel eingeht. Es zeigte sich bei den Rechnungen, daß der jeweilige optimale η -Wert (der die beste Näherung liefernde η -Wert) erhalten wird, wenn das letzte benutzte Reihenglied minimal wird, also die letzte und vorletzte Teilsumme möglichst nahe beieinander liegen. Als brauchbare Näherung hierfür erwies sich $\eta = 2d/x$ im Bereich der verwendeten Werte von a, b, z , ausgenommen im Fall $b = 1.25z$. Die Teilsummen reagieren auf kleine Änderungen von η sehr empfindlich, wenn y in der Nähe von 1 liegt.

Anhang

Die ab Abschnitt 2 benutzten Zahlen D_r^s genügen der Rekursionsformel [16]

$$D_r^s = (s + r - 1) [D_{r-1}^{s-1} + D_r^{s-1}] \quad (s \geq 2 \text{ ganz}; r = 1, \dots, s) \tag{A1}$$

mit $D_1^1 = 1$; dabei ist $D_0^{s-1} = D_s^{s-1} = 0$ zu setzen. In [16] sind alle Werte von D_r^s für $s \leq 8$ angegeben.

Die im Abschnitt 5 eingeführten Zahlen Φ_l^n traten – allerdings nicht in dieser Bezeichnung – bereits in [13–15] in den Koeffizienten der gleichmäßigen asymptotischen Entwicklung der unvollständigen Gamma-Funktion $\Gamma(s + 1, a)$ auf. Diese sind dort in der Form

$$c_{n_i} = (-1)^n [P_n(\mu)/\mu^{2n+1} - (2n)!/2^n \eta^{2n+1} n!] \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

angegeben, und es ist

$$P_n(\mu) = \sum_{l=0}^{2n} \Phi_{2n-l}^n \mu^l + \gamma_n \mu^{2n+1}$$

Dabei sind γ_n die Koeffizienten der Stirlingschen Reihe:

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi/x} e^{-x} x^x \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n / x^n \quad (x \rightarrow \infty),$$

und es ist $\gamma_0 = 1, \gamma_1 = 1/12, \gamma_2 = 1/288, \gamma_3 = -139/51840, \gamma_4 = -571/2488320$ (weitere Werte siehe [19, 26]). Es ist $\Phi_0^n = \gamma_n$, und aus der in [14] hergeleiteten Rekursionsformel für die Polynome P_n ,

$$P_n(\mu) = (1 + \mu) [(2n - 1) P_{n-1}(\mu) - \mu P'_{n-1}(\mu) + \gamma_n \mu^{2n}] \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit $P_0(\mu) = 1 + \mu$, folgt für Φ_l^n die Rekursionsformel

$$\Phi_l^{n+1} = (l - 1) \Phi_{l-2}^n + l \Phi_{l-1}^n \quad (n \in \mathbb{N}_0; l = 1, \dots, 2n + 2); \tag{A2}$$

dabei ist $\Phi_{n+1}^n = \Phi_{-1}^n = 0$ zu setzen. Insbesondere ergeben sich die Beziehungen $\Phi_1^n = \gamma_{n-1}, \Phi_{2n}^n = (2n)!/2^n n!, \Phi_{2n-1}^n = (2n + 1) \Phi_{2n}^n/3$. Es gilt

$$\sum_{l=1}^{2n} (-1)^l \Phi_l^n = 0 \quad \text{für jedes } n \geq 1. \tag{A3}$$

Für $n = 1, 2, 3, 4$ sind die Werte von Φ_l^n am Ende des Anhangs angegeben.

Die Zahlen T_m^n wurden durch (5.9) eingeführt. Da für $m = 1$ alle Binomialkoeffizienten in (5.9) gleich 1 sind, gilt nach (A3) $T_1^n = 0$ für alle n ; ferner ist $T_{2n}^n = \Phi_{2n}^n = (2n)!/2^n n!$. Aus

$$\sum_{m=1}^{2n} (-1)^m T_m^n = \sum_{l=1}^{2n} (-1)^l \Phi_l^n \sum_{m=1}^l (-1)^m \binom{l-1}{m-1}$$

folgt, da für $l \geq 2$ die letzte Summe verschwindet und für $l = 1$ nur Φ_1^n übrigbleibt, $\sum_{m=2}^{2n} (-1)^m T_m^n = \gamma_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Durch Anwendung

der Rekursionsformel (A2) ergibt sich aus (5.9) wegen $(l - 1) \binom{l-1}{m-1} = m \binom{l-1}{m} + (m - 1) \binom{l-1}{m-1}, l \binom{l-1}{m-1} = m \binom{l}{m}$ die Darstellung

$$T_m^{n+1} = (m - 1) \sum_{l=m-2}^{2n} (-1)^l \binom{l+1}{m-1} \Phi_l^n, \tag{A4}$$

und daraus wegen $\binom{l+1}{m-1} = \binom{l-1}{m-3} + 2 \binom{l-1}{m-2} + \binom{l-1}{m-1}$ die Rekursionsformel

$$T_m^{n+1} = (m - 1) [T_{m-2}^n + 2T_{m-1}^n + T_m^n] \quad (n \in \mathbb{N}; m = 3, \dots, 2n + 2) \tag{A5}$$

mit $T_2^1 = 1$; dabei ist $T_{2n+1}^n = T_{2n-2}^n = 0$ zu setzen. Für $m = 2$ folgt aus (A4) $T_2^{n+1} = \Phi_0^n$

$- 2 \sum_{l=1}^{2n} (-1)^l \Phi_l^n + \sum_{l=2}^{2n} (-1)^l (l - 1) \Phi_l^n$, also wegen (A3) und (5.9) $T_2^{n+1} = \Phi_0^n + T_2^n = \gamma_n + T_2^n$. Die Definition $T_0^n = \gamma_n$ stellt sich nun als sinnvoll heraus, denn wegen $T_1^n = 0$ gilt damit (A5) auch für $m = 2$.

Tabelle der ersten Werte von Φ_l^n

$n \setminus l \rightarrow$	2	3	4	5	6	7	8
1	1						
2	25/12	5	3				
3	49/288	77/12	105/4	35	15		
4	221/51840	149/288	2513/96	1883/12	1365/4	315	105

Tabelle der ersten Werte von T_m^n

$n \setminus m \rightarrow$	2	3	4	5	6	7	8
1	1						
2	13/12	4	3				
3	313/288	37/3	145/4	40	15		
4	56201/51840	2089/72	17857/96	1498/3	2625/4	420	105

LITERATUR

- [1] ABRAMOWITZ, M., and I. STEGUN: Handbook of mathematical functions (Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. 55). Washington: U.S. Govt. Print. Off. 1964.
- [2] BATEMAN, H.; Manuscript Project (Ed.: A. ERDELYI): Higher Transcendental Functions, Vol. 1. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Co. 1953.
- [3] BERG, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1968.
- [4] BUCHHOLZ, H.: Die konfluente hypergeometrische Funktion. Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag 1953.
- [5] DINGLE, R. B.: Asymptotic expansions: their derivation and interpretation. New York: Academic Press 1973.
- [6] JORNA, S.: Derivation of Green-type, transitional and uniform asymptotic expansions from differential equations III. Proc. Roy. Soc. London A **284** (1965), 531—539.
- [7] KAZARINOFF, N. D.: Asymptotic forms for the Whittaker functions with both parameters large. J. Math. Mech. **6** (1957), 341—360.
- [8] LUKE, Y. L.: The special functions and their approximations, Vol. 1. New York—London: Academic Press 1969.
- [9] OLVER, F. W. J.: Asymptotics and special functions. New York—London: Academic Press 1974.
- [10] OLVER, F. W. J.: Unsolved problems in the asymptotic estimation of special functions. In: Theory and application of special functions (Ed.: R. A. Askey). London: Academic Press 1975, p. 99—142.
- [11] OLVER, F. W. J.: Whittaker functions with both parameters large: uniform approximations in terms of parabolic cylinder functions. Proc. Roy. Soc. Edinb. **84 A** (1980), 213—234.
- [12] РИЕКСТЫНЬШ, Э. Я.: Асимптотические разложения интегралов, т. I и II. Рига: Зинатне 1974 и 1981.
- [13] SCHELL, H.-J.: Asymptotische Entwicklungen für die unvollständige Gammafunktion. Wiss. Z. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt **22** (1980), 477—485.
- [14] SCHELL, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Darstellungen und Entwicklungen von Parameterintegralen mit zwei reellen Parametern. Dissertation B. Karl-Marx-Stadt: Techn. Hochschule 1980.
- [15] SCHELL, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für unvollständige Integrale. Z. Anal. Anw. **2** (1983), 427—442.

- [16] SCHELL, H.-J.: Über das asymptotische Verhalten des Fermi-Dirac-Integrals. *Z. Anal. Anw.* **6** (1987), 421–438.
- [17] SKOVGAARD, H.: Uniform asymptotic expansions of confluent hypergeometric functions and Whittaker functions. Copenhagen: Gjellerups Publ. 1966.
- [18] SLATER, L. J.: Confluent hypergeometric functions. Cambridge: University Press 1960.
- [19] SPIRA, R.: Calculation of the gamma function by Stirling's formula. *Math. Comp.* **25** (1971), 317–322.
- [20] TEMME, N. M.: Uniform asymptotic expansions of confluent hypergeometric functions. *J. Inst. Math. Appl.* **22** (1978), 215–223.
- [21] TEMME, N. M.: The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions. *SIAM J. Math. Anal.* **10** (1979), 757–766.
- [22] TEMME, N. M.: On the expansion of confluent hypergeometric functions in terms of Bessel functions. *J. Comp. Appl. Math.* **7** (1981), 27–32.
- [23] TRICOMI, F. G.: *Funzioni ipergeometriche confluenti*. Roma: Cremonese 1954.
- [24] TRICOMI, F. G., and A. ERDELYI: The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions. *Pacif. J. Math.* **1** (1951), 133–142.
- [25] WONG, R.: An asymptotic expansion of $W_{k,m}(z)$ with large variables and parameters. *Math. Comp.* **27** (1973), 429–436.
- [26] WRENCH, J. W., Jr.: Concerning two series for the gamma function. *Math. Comp.* **12** (1968), 617–626.

Manuskripteingang: 24. 04. 1989; in revidierter Fassung 21. 07. 1989

VERFASSER:

Dr. HANS-JOACHIM SCHELL
 Sektion Mathematik der Technischen Universität
 Str. der Nationen 62
 DDR-9010 Chemnitz