

Zur Konvergenzbeschleunigung von Reihen mit logarithmischer Konvergenz

R. RIEDEL

Herrn Prof. Dr. Lothar Berg zum 60. Geburtstag gewidmet

Es werden asymptotische Entwicklungen für die Restsummen von Reihen mit logarithmischer Konvergenz hergeleitet. Endliche Teile davon werden zur Konvergenzbeschleunigung genutzt.

Выводятся асимптотические разложения для остаточных сумм рядов в случае логарифмической сходимости. Конечные части этих разложений используются для ускорения сходимости.

Asymptotic expansions for the residual sums of series are derived in the case of logarithmical convergence. Finite parts of this expansions are used for the acceleration of convergence.

1. Einleitung. Ein oft benutztes Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung von Reihen besteht darin, einen endlichen Teil der asymptotischen Entwicklung ihrer Restsummen zur Korrektur der Partialsummen zu nutzen. Es gibt verschiedene Methoden, um solche asymptotische Entwicklungen herzuleiten. Bei Auffassung der Reihenglieder als Funktionswerte einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f = f(x)$, $0 \leq x < \infty$, ermöglicht oft die Euler-MacLaurinsche Summenformel in der speziellen Form

$$\sum_{v=n}^{\infty} f(v) = \int_n^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(n) - \sum_{\lambda=1}^k \frac{B_{2\lambda}}{(2\lambda)!} f^{(2\lambda-1)}(n) + R_{k+1}(n) \quad (1)$$

eine Deutung als asymptotische Entwicklung. Die Euler-MacLaurinsche Summenformel hat auch in den asymptotischen Untersuchungen von L. BERG ([4], [5: § 8–9]) eine gewichtige Rolle gespielt.

Betrachtet man Potenzreihen

$$s(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v \quad (2)$$

mit der Koeffizienteneigenschaft $a_{n+1}/a_n \rightarrow 1$, so muß auf Grund unterschiedlichen Konvergenzverhaltens bei der Herleitung einer asymptotischen Entwicklung der Restsummen $r_n(z) = a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots$ für $n \rightarrow \infty$ zwischen Werten $z \neq 1$ aus dem Konvergenzbereich Ω der Reihe einerseits und dem Fall $z = 1$ (Konvergenz dort vorausgesetzt) andererseits unterschieden werden. Unter weiten Voraussetzungen (vgl. [1, 2, 13]) ist dann die Existenz von $\lim r_{n+1}(z)/r_n(z)$ gewährleistet. Im Fall $z = 1$ erhält man hierfür 1, und man spricht von logarithmischer Konvergenz. Häufig läßt sich dann über (1) eine asymptotische Entwicklung der Restsummen gewinnen, die zur Konvergenzbeschleunigung genutzt werden kann (siehe [8: Chap. 13.6], [7: Abschn. 467,3], [3: p. 253/254]). Trotzdem setzt der Aufwand der (analytischen oder numerischen) Auswertung des Integrals und der Ermittlung der Ableitungen der praktischen Anwendung Grenzen. Es soll daher ein einfacheres Ver-

fahren für gewisse Reihentypen vorgestellt werden, das auf asymptotischen Eigenschaften der Koeffizienten beruht. Es geht von der Idee von W. G. BICKLEY und J. C. P. MILLER [6] aus, die asymptotische Entwicklung der Restsummen aus dem asymptotischen Verhalten der Koeffizienten zu gewinnen. Einige Autoren [14, 16] gingen dabei von einer asymptotischen Entwicklung $a_n \sim (1/n^\alpha) (\gamma_0 + \gamma_1/n + \gamma_2/n^2 + \dots)$ ($n \rightarrow \infty$) aus, während in der vorliegenden Arbeit der Fall $a_n \sim [1/(n^\alpha \ln^\beta n)] (\gamma_0 + \gamma_1/n + \gamma_2/n^2 + \dots)$ mit im allgemeinen komplexen Parametern α, β ($\beta \neq 0$) und komplexen Koeffizienten γ_v untersucht werden soll. Im linearen Fall $|z| < 1$ oder $|z| = 1$ und $z \neq 1$ sind hierfür Ergebnisse in [9] zu finden. Jetzt soll für Potenzreihen (2) der Fall der logarithmischen Konvergenz $z = 1$ untersucht werden. Als Herleitungsmethode dient nicht, wie in [11], [12: § 11.2], [14] der Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten, sondern es wird von einer Zerlegung der Restsummen nach O. SZÁSZ [15: Abschn. 2.1] ausgegangen, deren asymptotische Auswertung durch das Verfahren der Iteration mittels Parametertranslation (im linearen Fall siehe [10]) verfeinert wird.

2. Formulierung der Ergebnisse. Es wird mit \mathbf{N} und \mathbf{C} die Menge der natürlichen bzw. komplexen Zahlen bezeichnet und das Pochhammer-Symbol $(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$ verwendet. \mathbf{Z}_- sei die Menge der nichtpositiven ganzen Zahlen. Untersucht werden sollen unendliche Reihen

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v, \quad (3)$$

deren Glieder ein asymptotisches Verhalten

$$a_n = (1/n^\alpha \ln^\beta n) (\gamma_0 + O(1/n)), \quad \gamma_0 \neq 0, \quad (4)$$

mit $\operatorname{Re} \alpha > 1$ und $\beta \neq 0$ aufweisen. Es wird gezeigt, daß dann die Restsummen $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ im Fall $\beta \in \mathbf{Z}_-$ für $n \rightarrow \infty$ eine asymptotische Entwicklung

$$r_n \sim \frac{\gamma_0}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1} \ln^\beta(n+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (\beta)_i}{(\alpha-1)^i \ln^i(n+1)} \quad (5)$$

besitzen (der Fall $\beta \in \mathbf{Z}_-$ ist bereits von J. WIMP [16] behandelt worden und führt auf eine asymptotische Entwicklung mit stärker abklingender Skala). Restsummen von Reihen (3), deren Glieder durch

$$a_n = (1/n \ln^\beta n) (\gamma_0 + \gamma_1/n + O(1/n^2)) \quad (6)$$

($\gamma_0, \gamma_1 \neq 0$ und $\operatorname{Re} \beta > 1$) darstellbar sind, besitzen für $n \rightarrow \infty$ eine asymptotische Entwicklung

$$r_n \sim \gamma_0 / (\beta-1) \ln^{\beta-1}(n+1) + \gamma_0 / 2(n+1) \ln^\beta(n+1) + (\gamma_1 / (n+1) \ln^\beta(n+1)) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\beta)_i / \ln^i(n+1). \quad (7)$$

3. Beweis der Ergebnisse. Wir betrachten zunächst Restsummen der Art

$$r_{n-1}(\xi, \eta) = \sum_{v=n}^{\infty} 1/v^\xi \ln^\eta v$$

für $\operatorname{Re} \xi > 1$. Bekannt ist das Ordnungsverhalten (vgl. [10: Hilfssatz 1])

$$r_{n-1}(\xi, \eta) = O(1/n^{\xi-1} \ln^\eta n) \quad (8)$$

für $n \rightarrow \infty$. Ausgehend von der Entwicklung

$$\frac{1}{v^\xi \ln^\eta v} - \frac{1}{(v+1)^\xi \ln^\eta (v+1)} = \frac{1}{v^\xi \ln^\eta v} \left(\frac{\xi}{v} + \frac{\eta}{v \ln v} + O\left(\frac{1}{v^2}\right) \right)$$

erhält man durch Summation über $v = n, n+1, \dots$

$$r_{n-1}(\xi+1, \eta) = \frac{1}{\xi n^\xi \ln^\eta n} - \frac{\eta}{\xi} r_{n-1}(\xi+1, \eta+1) + O\left(\frac{1}{n^{\xi+1} \ln^\eta n}\right), \quad (9)$$

wenn man die Summe der Restglieder durch (8) auswertet. Das ergibt für $\xi = \alpha - 1$, $\eta = \beta$

$$r_{n-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1} \ln^\beta n} - \frac{\beta}{\alpha-1} r_{n-1}(\alpha, \beta+1) + O\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$$

und für $\xi = \alpha - 1$, $\eta = \beta + 1$

$$r_{n-1}(\alpha, \beta+1) = \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1} \ln^{\beta+1} n} - \frac{\beta+1}{\alpha-1} r_{n-1}(\alpha, \beta+2) + O\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^{\beta+1} n}\right),$$

somit durch Einsetzen der letzten in die vorletzte Beziehung

$$r_{n-1}(\alpha, \beta) = 1/(\alpha-1) n^{\alpha-1} \ln^\beta n - \beta/(\alpha-1)^2 n^{\alpha-1} \ln^{\beta+1} n + [\beta(\beta+1)/(\alpha-1)^2] r_{n-1}(\alpha, \beta+2) + O(1/n^\alpha \ln^\beta n).$$

Dieses Verfahren, die jeweilige Reihe auf der rechten Seite mittels (9) asymptotisch darzustellen, ist fortsetzbar. Durch Induktionsschluß ist so für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$r_{n-1}(\alpha, \beta) = ((\alpha-1) n^{\alpha-1} \ln^\beta n)^{-1} \sum_{i=0}^k (-1)^i (\beta)_i / (\alpha-1)^i \ln^i n + [(-1)^{k+1} (\beta)_{k+1} / (\alpha-1)^{k+1}] r_{n-1}(\alpha, \beta+k+1) + O(1/n^\alpha \ln^\beta n)$$

beweisbar. Die rechts stehende Restsumme läßt sich aber nach (8) als ein $O(1/n^{\alpha-1} \times \ln^{\beta+k+1} n)$ deuten, so daß eine asymptotische Entwicklung

$$r_{n-1}(\alpha, \beta) \sim ((\alpha-1) n^{\alpha-1} \ln^\beta n)^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\beta)_i / (\alpha-1)^i \ln^i n \quad (10)$$

für $n \rightarrow \infty$ erkennbar wird. Aus (4) kann man nun auf die Zerlegung

$$r_n = \gamma_0 r_n(\alpha, \beta) + \sum_{v=n+1}^{\infty} R_v \quad (11)$$

mit $R_v = O(1/v^{\alpha+1} \ln^\beta v)$ für $v \rightarrow \infty$ schließen, und für die Summe der Restglieder erhält man aus (8) die Abschätzung

$$\left| \sum_{v=n+1}^{\infty} R_v \right| \leq K r_n(\operatorname{Re} \alpha + 1, \operatorname{Re} \beta) = O(1/n^\alpha \ln^\beta n).$$

Die Relationen (10) und (11) ergeben die Entwicklung (5).

Zur Untersuchung des Falles $\alpha = 1$, $\operatorname{Re} \beta > 1$ gehen wir von der Darstellung

$$\begin{aligned} 1/\ln^{\beta-1} v - 1/\ln^{\beta-1} (v+1) &= (\beta-1)/v \ln^{\beta} v - (\beta-1)/2v^2 \ln^{\beta} v \\ &\quad - \beta(\beta-1)/2v^2 \ln^{\beta+1} v + O(1/v^3 \ln^{\beta} v) \end{aligned}$$

aus. Durch Summation über $v = n, n+1, \dots$ und Abschätzung mittels (8) erhält man

$$r_{n-1}(1, \beta) = \frac{1}{(\beta-1) \ln^{\beta-1} n} + \frac{1}{2} r_{n-1}(2, \beta) + \frac{\beta}{2} r_{n-1}(2, \beta+1) + O\left(\frac{1}{n^2 \ln^{\beta} n}\right).$$

Ersetzt man die rechts stehenden Reihen durch ihre asymptotischen Entwicklungen (10), so ergibt sich

$$r_{n-1}(1, \beta) = \frac{1}{(\beta-1) \ln^{\beta-1} n} + \frac{1}{2n \ln^{\beta} n} + O\left(\frac{1}{n \ln^{\beta+k+1} n}\right) \quad (12)$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Die Formel (7) erhält man nun ähnlich wie bei (11) aus der Zerlegung

$$r_n = \gamma_0 r_n(1, \beta) + \gamma_1 r_n(2, \beta) + \sum_{v=n+1}^{\infty} R_v^*$$

mit $R_v^* = O(1/v^3 \ln^{\beta} v)$, indem zur Auswertung von $r_n(1, \beta)$ auf die Beziehung (12) und von $r_n(2, \beta)$ auf (10) zurückgegriffen wird.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß man die Entwicklungen (12) und (10) auch über die Euler-MacLaurinsche Summenformel (1) gewinnen kann, im ersten Fall durch geschlossene Auswertung des Integrals, im zweiten Fall durch seine asymptotische Entwicklung mittels wiederholter partieller Integration.

4. Konvergenzbeschleunigung. Für eine die Reihe (3) beschreibende Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ läßt sich durch Hinzufügen endlicher Bestandteile der asymptotischen Entwicklung ihrer Restsummen Konvergenzbeschleunigung erzielen. Unter der Voraussetzung (4) erhält man im Fall $\beta \in \mathbb{Z}_-$ durch die Transformation

$$\sigma_{n,k} = s_n + \frac{\gamma_0}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1} \ln^{\beta}(n+1)} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i (\beta)_i}{(\alpha-1)^i \ln^i(n+1)} \quad (13)$$

($k \in \mathbb{N}$ oder $k = \bar{0}$, fest) eine Beschleunigung der Ordnung $(s - \sigma_{n,k})/(s - s_n) = O(1/\ln^{k+1} n)$. Man erkennt das mittels (5) aus

$$s - s_n = r_n \sim \gamma_0/(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1} \ln^{\beta}(n+1), \quad \gamma_0 \neq 0,$$

einerseits und

$$\begin{aligned} s - \sigma_{n,k} &= r_n - \frac{\gamma_0}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1} \ln^{\beta}(n+1)} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i (\beta)_i}{(\alpha-1)^i \ln^i(n+1)} \\ &= O(1/(n+1)^{\alpha-1} \ln^{\beta+k+1}(n+1)) \end{aligned}$$

andererseits. Im Fall (6) wird mit der Transformation

$$\begin{aligned} \tau_{n,k} &= s_n + \gamma_0/(\beta-1) \ln^{\beta-1}(n+1) + \gamma_0/2(n+1) \ln^{\beta}(n+1) \\ &\quad + \gamma_1((n+1) \ln^{\beta}(n+1))^{-1} \sum_{i=0}^k (-1)^i (\beta)_i / \ln^i(n+1) \end{aligned} \quad (14)$$

eine Beschleunigung der Ordnung $(s - \tau_{n,k})/(s - s_n) = O(1/\ln^{k+2} n)$ erreicht.

Bei Nutzung dieser Transformationen zur numerischen Ermittlung von Reihenwerten ist zu beachten, daß die asymptotischen Entwicklungen (5) und (7) nicht konvergent sind. Bei gewählter Reihengliederzahl n sollte also, um optimale Annäherung zu erzielen, ein Abbruch k in der asymptotischen Entwicklung dann erfolgen, wenn das betragsmäßig kleinste Glied u_k erreicht ist (vgl. [12: Abschn. 2.2]). Bei (5) ist dies für die kleinste natürliche Zahl k mit $|u_{k+1}/u_k| = |\beta + k|/|\alpha - 1| \times \ln(n+1) \geq 1$ der Fall. Liegt ein reeller Wert β vor, so ist daher für (13) entweder

$$k = [|\alpha - 1| \ln(n+1) - \beta] \quad \text{oder} \quad k = [|\alpha - 1| \ln(n+1) - \beta] + 1$$

bei numerischen Auswertungen zu empfehlen; analog für (14)

$$k = [\ln(n+1) - \beta] \quad \text{oder} \quad k = [\ln(n+1) - \beta] + 1.$$

Eine Ausführung der Transformation (13) an der Reihe

$$\sum_{v=2}^{\infty} \sqrt{\ln v} / (v + v^2) \quad (15)$$

mit dem Reihenwert $s = 0.59978\dots$ erbrachte folgende Ergebnisse. Im Vergleich zum Partialsummenwert $s_{30} = 0.55646$ erhält man durch die Transformation (13) die deutlich besseren Näherungswerte $\sigma_{10,2} = 0.59834$, $\sigma_{20,4} = 0.59948$, $\sigma_{30,4} = 0.59974$.

Der Versuch, die obige Reihe (15) mittels Euler-MacLaurinscher Summenformel (1) zu beschleunigen, erfordert eine numerische Auswertung des Integrals $\int \sqrt{\ln x} / (x + x^2) dx$. Der Aufwand eines Quadraturverfahrens oder der Auswertung über eine asymptotische Entwicklung für $n \rightarrow \infty$ ist aber erheblich größer als mit (13). Empirisch lassen sich unter vergleichweisem Aufwand auch gute Näherungswerte mit anderen Transformationen erzielen, die sich für Reihen mit logarithmischer Konvergenz empfehlen (z. B. die Salzer-Transformation [17: Abschn. 2.3.4]). Für Reihen von der Art (15) mit logarithmischem Anteil in den Gliedern liegen aber zur Beschleunigung solcher Transformationen bisher keine gesicherten Erkenntnisse vor.

LITERATUR

- [1] ADAMOVIĆ, D. D.: Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste ou term général d'une série réelle ou complexe. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 15, (29) (1973), 5–20.
- [2] ADAMOVIĆ, D. D.: Quelques compléments aux résultats du travail „Sur la convergence...“. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 20 (34) (1975), 9–27.
- [3] ATKINSON, K. E.: An Introduction to Numerical Analysis. New York: J. Wiley 1978.
- [4] BERG, L.: Ein neuer Beweis der Eulerschen Summenformel. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat. R. 9 (1960), 281–284.
- [5] BERG, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin: Dt. Verl. Wiss. 1968.
- [6] BICKLEY, W. G., MILLER, J. C. P.: The numerical summation of slowly convergent series of positive terms. Phil. Mag. (Ser. 7) 22 (1936), 754–767.
- [7] FICHTENHOLZ, G. M.: Differential- und Integralrechnung II. Berlin: Dt. Verl. Wiss. 1964.
- [8] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford: Clarendon Press 1949.
- [9] RIEDEL, R.: Asymptotische Entwicklung der Restsummen von Potenzreihen. In: Asymptotische Methoden in der Analysis. Wiss. Beiträge, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 1988/46 (M53), 62–74.
- [10] RIEDEL, R.: Asymptotische Entwicklung der Restsummen gewisser Potenzreihen. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat. R. 33 (1984), 109–120.

- [11] РИЕКСТЫНЬШ, Э. Я.: Асимптотические оценки конечных сумм методом неопределенных коэффициентов. Латв. мат. ежег. 6 (1969), 141—149.
- [12] РИЕКСТЫНЬШ, Э. Я.: Оценки остатков в асимптотических разложениях. Рига: Зинатне 1986.
- [13] SIMIĆ, S.: On a hypothesis of D. Adamović concerning asymptotic behaviour of some complex sequences. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 25 (39) (1979), 167—178.
- [14] SMITH, A. C.: Asymptotic estimates of sums of series using difference equations. Utilitas Math. 13 (1978), 249—269.
- [15] SZASZ, O.: Summation of slowly convergent series. J. Math. Phys. 28 (1949), 272—279.
- [16] WIMP, J.: The summation of series whose terms have asymptotic representations. J. Appr. Th. 10 (1974), 185—198.
- [17] WIMP, J.: Sequence Transformations and Their Applications. New York: Academic Press 1981.

Manuskripteingang: 05. 05. 1989; in revidierter Fassung 10. 08. 1989

VERFASSER:

Dr. ROLAND RIEDEL
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Halle—Wittenberg
DDR-4010 Halle