Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (5) 1990, S. 433–453

Zur klassischen Kontaktaufgabe der Elastostatik

L. JENTSCH

Zum Gedenken an Johannes Maul
**5. Juli 1947 †6. März 1988*

Bei der Behandlung von Randkontaktaufgaben der Thermoelastostatik, thermoelastischer Schwingungen und anderer Modelle mit Randintegralmethoden hat man die Schwierigkeit, daß auf der Kontaktfläche zwischen den elastisch homogenen Teilen Verschiebungs- und Spannungskontaktbedingungen zu erfüllen sind. Eine zentrale Rolle spielt bei allen diesen Problemen die reine Kontaktaufgabe der Elastostatik. Es wird gezeigt, daß ein bereits früher gewählter Potentialansatz natürlich ist, d. h., es gelingt jetzt der Nachweis der Invertierbarkeit des entsprechenden Randintegraloperators $\mathcal{K}$ ohne Einschränkung bezüglich der Poissonschen Zahlen der beteiligten Medien. Außerdem kann gezeigt werden, daß $\mathcal{K}$ ein stark elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung Null ist. Damit sind Sätze über asymptotische Fehlerabschätzungen bei Randelementmethoden anwendbar.

При исследовании граничных контактных задач термоэластостатики, термоупругих колебаний и других моделей методами граничных интегральных уравнений возникает трудность выполнения контактных условий для перемещения и напряжения на контактной поверхности между упруго-однородными областями. Центральную роль при этих исследованиях играет контактная задача эластостатики. В работе показано, что уже раньше выбранный метод потенциалов является естественным: удаётся доказать обратимость соответствующего граничного интегрального оператора $\mathcal{K}$ без ограничений на чисел Пуассона участвующих сред. Кроме того показывается, что $\mathcal{K}$ — сильно эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка нуль. Таким образом применимы асимптотические оценки погрешности для методов граничных элементов.

For the study of boundary contact problems of thermoelastostatics, thermoelastic vibrations and other models with boundary integral methods the main difficulty which arises is, that displacement and stress contact conditions are to fulfil on the contact-surface between the elastic homogeneous parts. To solve these difficulties one is forced to study the contact problem of elastostatics. It is proved that an earlier potential representation is proper for getting some better results: 1. The boundary integral operator $\mathcal{K}$ of the contact problem is invertible without any assumption on the Poisson ratios of the elastic parts. 2. $\mathcal{K}$ is a strongly elliptic pseudodifferential operator of order zero. Therefore theorems on asymptotic error estimates for boundary element methods are applicable.

Viel zu früh hat sich das Leben von Johannes Maul vollendet. Von 1966–1971 studierte er an der Karl-Marx-Universität Leipzig Mathematik und promovierte bereits im Jahre 1974 zum Dr. rer. nat. Im Studienjahr 1976/77 weilte er am Tbilissier Mathematischen Institut der Akademie der Wissenschaften der Georgischen SSR und legte dort die Grundlagen für die Dissertation B, die er im Februar 1979 erfolgreich verteidigte. Im Jahre 1980 wurde Dr. sc. nat. Johannes Maul zum Hochschuldozenten an die Karl-Marx-Universität Leipzig berufen.

Die letzten drei Jahre seines kurzen Lebens waren von Krankheit gezeichnet. Eine schwere Zeit zwischen Bangen und Hoffen mußte Johannes mit seiner Frau und seinen drei Kindern durchleben, zwei Herzoperationen konnten ihm letztlich keine Hilfe bringen. Als bescheidener und gütiger Mensch, der uns durch seine vielfältigen Gaben auf mathematischem und musikalischem Gebiet reich beschenkt hat, wird er seinen Freunden in guter Erinnerung bleiben.

1. Einleitung

In [5] wurden Existenzsätze der Thermoelastostatik stückweise homogener Körper mit Integralgleichungsmethoden bewiesen. Eine zentrale Bedeutung hat dabei die reine Kontaktaufgabe, bei der auf dem Rand S der in dem elastischen Raum eingelagerten Einschlüsse aus anderem Material Kontaktbedingungen zu erfüllen sind. Bei festem Verbund der elastisch homogenen Teile wird man auf die Kontaktbedingung geführt, daß auf S die Differenz der Verschiebungsvektoren und der Normalspannungsvektoren auf beiden Ufern von S vorgegeben sind. Hat man die Kontaktaufgabe gelöst, so kann man Kontakttensoren konstruieren, die das Singularitätsverhalten der Grundlösungsmatrix aufweisen und die Kontaktbedingung des stetigen Durchgangs von Verschiebungs- und Normalspannungsvektor erfüllen. Die Randkontaktaufgaben für stückweise homogene Körper mit im Endlichen liegendem Rand S_a kann man dann mit Hilfe von Potentialen mit dem Kontakttensor im Kern, die a priori die Differentialgleichung und die Kontaktbedingungen erfüllen, auf Randintegralgleichugen über S_a zurückführen. Die Diskussion dieser Integralgleichungen verläuft dann analog wie im elastisch homogenen Fall.

Die Hauptschwierigkeit bei der Behandlung der Kontaktaufgabe mit Randintegralgleichungen besteht darin, den Potentialansatz so zu wählen, daß das entstehende Randintegralgleichungssystem über S in einem geeigneten Raum einen Fredholm-Operator $\mathcal{K}$ beschreibt, der den Index Null hat und invertierbar ist. In [5] wurde diese Aufgabe gelöst, allerdings mußte beim Nachweis der Invertierbarkeit von $\mathcal{K}$ eine einschränkende Voraussetzung bezüglich der Poissonschen Zahlen gemacht werden.

In dieser Arbeit wird die klassische Kontaktaufgabe aus drei Gründen erneut betrachtet:

1. Es gelingt der Nachweis der Invertierbarkeit von $\mathcal{K}$ ohne Einschränkung bezüglich der Poissonschen Zahlen.
2. Die für Randelementmethoden wichtige Frage der starken Elliptizität von $\mathcal{K}$ wird geklärt. Es zeigt sich, daß $\mathcal{K}$ ein stark elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung Null ist.
3. Der Problemkreis wird erweitert, indem wir Lösungen zulassen, die im Unendlichen einen von Null verschiedenen Spannungstensor besitzen.

Zu bemerken ist, daß sich unser Vorgehen von dem in [9] unterscheidet. Dort wird nicht das eigentliche mechanische Kontaktproblem unmittelbar mit Randintegralgleichungen gelöst, sondern eine Ersatzaufgabe, bei der die Spannungskontaktbedingung durch eine andere (äquivalente) Kontaktbedingung ersetzt wird [9: Kap. XII, §2/(2.9); §3/(3.1); §4/(4.2)]. Damit unterscheidet sich unsere Lösungsdarstellung und unser Integralgleichungssystem von dem in [9]. Der in [5] eingeschlagene Weg hat sich auch bei Kontaktproblemen für andere Modelle (thermoelastische Schwingungen [6], Dilatationselastizitätstheorie von Markov [8, 10]) bewährt. Durch die vorliegende Arbeit wird die These erhärtet, daß der hier beschriebene Zugang natürlich ist. Die im zugrundegelegten Potentialansatz enthaltenen Parameter können so gewählt werden, daß man ein singuläres Integralgleichungssystem im Hilbert-Raum $L_2^{(6)}(S)$ für die Dichtevektoren der Potentiale erhält, das für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar ist. Dabei wird der zulässige Bereich für die Parameter voll ausgeschöpft, wenn man die natürliche Voraussetzung macht, daß die linearen Elastizitätsmodule positiv sind und die Poissonschen Zahlen im Intervall (0, 1/2) liegen. Legt man auf die Wahl der Parameter keine Sorgfalt, dann erhält man ein Integralgleichungssystem, das neben schwachsingulären und singulären Integralen (Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung -1 und 0) auch Pseudodifferentialoperatoren der Ordnung 1 enthält.

Einen Überblick über die Lösung der Kontaktaufgaben mit anderen Potentialansätzen besonders auch bei anisotropen Körpern, die auf Systeme mit Pseudodifferentialoperatoren führen, findet man in [2].

Die Monographie [5], auf die wir hier zurückkommen, bildete den Ausgangspunkt weiterer Arbeiten zu den verschiedensten Randkontaktproblemen der Festkörpermechanik mit Randintegralmethoden. Sehr weitreichende Resultate besonders zu den ebenen Problemen hat hierzu Johannes Maul erzielt. Aus den über zwanzig Originalarbeiten seien hier nur genannt die Monographie „Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik" (Schriftenr. Zentralinst. Math. Mech. Akad. Wiss.: Heft 24. Berlin: Akademie-Verlag 1976), das mit L. Jentsch gemeinsam gestaltete Heft „Zur Elastizitäts- und Thermoelastizitätstheorie" (Math. Res.: Bd. 4. Berlin: Akademie-Verlag 1980) und die zweiteilige Arbeit „Mixed contact problems in plane elasticity" (Z. Anal. Anw. 2 (1983), 207—234 und 481—509). Ein Verdienst von Johannes Maul ist, daß er für eine sehr allgemeine Klasse von Randkontaktaufgaben der Festkörpermechanik in der Ebene das Konzept der äquivalenten Potentiale vom Typ der einfachen Schicht zum Aufbau einer durchsichtigen Existenztheorie entwickelt hat. Die Allgemeinheit betrifft die Modelle (mikropolare Elastizitätstheorie, Thermoelastizitätstheorie) und die Rand- und Kontaktbedingungen. Es werden fünf verschiedene Randbedingungen und neun zum Teil neue Kontaktbedingungen in Betracht gezogen, die auf einer geschlossenen Randkurve und auf einem geschlossenen Rand eines Einschlusses aus anderem Material auch abwechseln können (gemischte Rand- und Kontaktaufgaben).

2. Formulierung des Problems, Eindeutigkeit

Sei $D_1 \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit dem Rand S und $D_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_1$. Das Gebiet D_i $(i = 0, 1)$ sei ausgefüllt mit isotropem elastischen Material, das bestimmt ist durch die Laméschen Module λ_i, μ_i oder den Youngschen Modul E_i und die Poissonsche Zahl ν_i. Wir setzen $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ voraus oder, was gleichbedeutend ist, $E_i > 0$, $0 < \nu_i < 1/2$.

Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{A}, \mathbf{b})$: Gesucht ist ein Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \big(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x})\big)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}|_{D_i} \in C^\infty(D_i) \cap C^1(\overline{D}_i)$, das die Laméschen Gleichungen

$$\underset{(i)}{\mathcal{A}}(\partial_{\mathbf{x}})\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ für } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in D_i \tag{1}$$

und die Kontaktbedingungen

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}^+ - \{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}^- = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in S, \tag{2}$$

$$\left\{\underset{(1)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\, \mathbf{u}(\mathbf{x})\right\}^+ - \left\{\underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\, \mathbf{u}(\mathbf{x})\right\}^- = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in S \tag{3}$$

erfüllt. Dabei ist

$$\underset{(i)}{\mathcal{A}_{kj}}(\partial_{\mathbf{x}}) = \delta_{kj}\mu_i\Delta + (\lambda_i + \mu_i)\, \partial^2/\partial x_k\, \partial x_j;$$

$$\underset{(i)}{\mathcal{T}_{kj}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big) = \mu_i\delta_{kj} \sum_{l=1}^{3} n_l(\mathbf{x})\, \partial/\partial x_l + \lambda_i n_k(\mathbf{x})\partial/\partial x_j + \mu_i n_j(\mathbf{x})\, \partial/\partial x_k$$

sind die Matrixkomponenten des Spannungsoperators, $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \big(n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x}), n_3(\mathbf{x})\big)^{\mathrm{T}}$ der äußere Normaleneinheitsvektor von S in $\mathbf{x}$ und $\{\cdot\}^+$, $\{\cdot\}^-$ der Grenzwert von D_1 bzw. D_0 her. Das Verhalten im Unendlichen sei so, daß sich $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in D_0 darstellen läßt in der Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\mathsf{C} + \mathsf{A})\, \mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \tag{4}$$

mit

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \partial\mathbf{u}_0(\mathbf{x})/\partial x_j = O(|\mathbf{x}|^{-2}) \text{ für } |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{5}$$

Dabei ist $\mathsf{C} = \mathsf{C}^{\mathrm{T}} = (c_{kj})$ eine symmetrische, $\mathsf{A} = -\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$ eine schiefsymmetrische dreireihige Matrix und $\mathbf{b}$ ein konstanter Vektor (Vektoren fassen wir als Spaltenmatrizen auf).

Das Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{O}, \mathsf{O}, \mathbf{0})$ ist die in [5] betrachtete reine Kontaktaufgabe, die, wie eingangs ausgeführt, für die Randkontaktaufgaben eine zentrale Rolle spielt.

Sei

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}},$$

dann ist $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$. Beim Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{O}, \mathsf{A}, \mathbf{b})$ sind also im Unendlichen eine Translation $\mathbf{b}$ und eine infinitesimale Drehung $\mathsf{A}\mathbf{x}$ vorgegeben.

Der dem Verschiebungsfeld $\mathbf{u}_{\mathsf{C}}(\mathbf{x}) = \mathsf{C}\mathbf{x}$ zugeordnete Deformationstensor hat die Komponenten

$$\varepsilon_{kj} = 1/2(\partial u_{\mathsf{C}k}/\partial x_j + \partial u_{\mathsf{C}j}/\partial x_k) = c_{kj} \tag{6}$$

und der Spannungstensor gemäß dem Hookeschen Gesetz die Komponenten

$$t_{kj} = 2\mu_0\varepsilon_{kj} + \lambda_0\delta_{kj} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ll}. \tag{7}$$

Zu vorgegebenem Spannungstensor (t_{kj}) im Unendlichen ergibt sich demnach die Matrix C zu

$$c_{kj} = (1/2\mu_0)t_{kj} - \big(\lambda_0/2\mu_0(2\mu_0 + 3\lambda_0)\big)\, \delta_{kj} \sum_{l=1}^{3} t_{ll}. \tag{8}$$

Integration von (6) ergibt $\mathbf{u}_{\mathsf{C}} = \mathsf{C}\mathbf{x} + [\mathbf{a} \times \mathbf{x}] + \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ beliebige Vektoren sind. Beim Problem $K(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \mathsf{C}, \mathsf{O}, \mathbf{0})$ wird also die Störung berechnet, die in einem unter homogener Spannung stehenden elastischen Raum durch einen eingelagerten Einschluß aus anderem Material hervorgerufen wird, wenn der Einschluß mit dem umgebenden Medium fest verbunden ist.

a) Beim einachsigen Spannungszustand ($t_{11} \neq 0$, alle anderen $t_{kj} = 0$) ergibt sich aus (8)

$$c_{11} = E_0^{-1}t_{11}, \quad c_{22} = c_{33} = -\nu_0 c_{11}, \quad c_{kj} = 0 \text{ für } k \neq j.$$

b) Beim reinen Scherspannungszustand ($t_{23} \neq 0$, alle anderen $t_{kj} = 0$) ist

$$c_{23} = (2\mu_0)^{-1}\, t_{23}, \quad \text{alle anderen } c_{kj} = 0.$$

c) Beim allseitigen Zug- oder Druckzustand ($t_{kj} = p\delta_{kj}$) ist

$$c_{kj} = (1 - 2\nu_0)\, E_0^{-1} p\delta_{kj} = \big(1/(2\mu_0 + 3\lambda_0)\big)\, p\delta_{kj}.$$

Von Bedeutung ist auch das Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \cdot, \cdot)$, bei dem A und $\mathbf{b}$ frei sind.

Eindeutigkeitssatz: *Sei $S \in C^2$. Das Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{A}, \mathbf{b})$ hat höchstens eine Lösung. Hat das Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \cdot, \cdot)$ eine Lösung, so ist diese nur bis auf den Summanden $[\mathbf{a} \times \mathbf{x}] + \mathbf{b}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ beliebige Vektoren) eindeutig.*

Beweis: Seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ zwei Lösungen des Problems $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \cdot, \cdot)$, dann gilt in D_0 die Darstellung $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}) = (\mathsf{C} + \mathsf{A}_j)\, \mathbf{x} + \mathbf{b}_j + \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x})$. Es ist dann $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$

Lösung des Problems $K(0, 0; \mathsf{O}, \mathsf{A}_0, \mathfrak{b}_0)$ mit $\mathsf{A}_0 = \mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_2$, $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2$, und in D_0 gilt $\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{u}_0(\mathfrak{x})$, wobei $\mathfrak{u}_0(\mathfrak{x})$ die Bedingung (5) erfüllt.

Sei

$$K_R = \{\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \colon |\mathfrak{x}| < R\},\ S_R = \{\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \colon |\mathfrak{x}| = R\},\ D_1 \subset K_R,\ D_0^R = D_0 \cap K_R.$$

Wir wenden jetzt den Integralsatz

$$\int_D \left(\underset{(i)}{\mathcal{A}}(\partial_{\mathfrak{x}})\, \mathfrak{u}(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{v}(\mathfrak{x}) + \underset{(i)}{E}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\right) \mathrm{d}\mathfrak{x} = \int_{\partial D} \underset{(i)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n}(\mathfrak{x})\big)\, \mathfrak{u}(\mathfrak{x}) \cdot \mathfrak{v}(\mathfrak{x})\, \mathrm{d}S_{\mathfrak{x}} \tag{9}$$

an. Dabei ist

$$\underset{(i)}{E}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = 2\mu_i \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{kl}(\mathfrak{u})\, \varepsilon_{kl}(\mathfrak{v}) + \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\mathfrak{u})\right) \left(\sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ll}(\mathfrak{v})\right)$$

mit $\varepsilon_{kl}(\mathfrak{u}) = 2^{-1}(u_{k,l} + u_{l,k})$. Danach ist

$$\int_{D_1} \underset{(1)}{E}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})\, \mathrm{d}\mathfrak{x} = \int_S \{\mathfrak{u}\}^+ \cdot \left\{\underset{(1)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}\right\}^+ \mathrm{d}S,$$

$$\int_{D_0^R} \underset{(0)}{E}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})\, \mathrm{d}\mathfrak{x} = -\int_S \{\mathfrak{u}\}^- \cdot \left\{\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}\right\}^- \mathrm{d}S + \int_{S_R} \mathfrak{u} \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}\, \mathrm{d}S.$$

Durch Addition dieser beiden Formeln und Berücksichtigung der Kontaktbedingungen für $\mathfrak{u}$ folgt

$$\int_{D_1} \underset{(1)}{E}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})\, \mathrm{d}\mathfrak{x} + \int_{D_0^R} \underset{(0)}{E}(\mathfrak{u}, \mathfrak{u})\, \mathrm{d}\mathfrak{x} = \int_{S_R} \mathfrak{u} \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}\, \mathrm{d}S. \tag{10}$$

Wegen $\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, (\mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) = 0$ ist $\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u} = \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}_0$, woraus

$$\int_{S_R} \mathfrak{u} \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}\, \mathrm{d}S = \int_{S_R} \mathfrak{u}_0 \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}_0\, \mathrm{d}S + \int_{S_R} (\mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}_0\, \mathrm{d}S \tag{11}$$

folgt. Nun ist nach dem Integralsatz (9), wegen $\underset{(0)}{\mathcal{A}}(\partial_{\mathfrak{x}})\, (\mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) = 0$ und folglich $\underset{(0)}{\mathcal{A}}(\partial_{\mathfrak{x}})\, \mathfrak{u}_0(\mathfrak{x}) = 0$ sowie $\underset{(0)}{E}(\mathfrak{u}_0, \mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) = 0$

$$0 = -\int_S (\mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) \cdot \left\{\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}_0(\mathfrak{x})\right\}^- \mathrm{d}S$$
$$+ \int_{S_R} (\mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}_0(\mathfrak{x})\, \mathrm{d}S. \tag{12}$$

Wegen $\underset{(1)}{\mathcal{A}}(\partial_{\mathfrak{x}})\, \mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = 0$ in D_1, $\underset{(1)}{E}(\mathfrak{u}, \mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) = 0$ folgt wieder mit dem Integralsatz (9)

$$0 = \int_S (\mathsf{A}_0\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_0) \cdot \left\{\underset{(1)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{n})\, \mathfrak{u}\right\}^+ \mathrm{d}S. \tag{13}$$

Nun ist $\left\{\underset{(1)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n})\,\mathbf{u}\right\}^+ = \left\{\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n})\,\mathbf{u}\right\}^- = \left\{\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n})\,\mathbf{u}_0\right\}^-$, so daß aus (13) und (12) folgt

$$\int_{S_R} (\mathsf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0) \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n})\,\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\,\mathrm{d}S = 0. \tag{14}$$

Wegen $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{S_R} \mathbf{u}_0 \cdot \underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n})\,\mathbf{u}_0\,\mathrm{d}S = 0$, (11), (14), (10) folgt

$$\int_{D_1} \underset{(1)}{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{D_0} \underset{(0)}{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Also ist $\mathbf{u} = \mathsf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0$ in D_0, und wegen $\{\mathbf{u}\}^+ = \{\mathbf{u}\}^-$ ist $\mathbf{u} = \mathsf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0$ in ganz $\mathbb{R}^3$. Sind A und $\mathbf{b}$ vorgegeben, so ist $\mathsf{A}_0 = \mathsf{O}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ ∎

3. Potentialtheorie

Wir stellen jetzt die benötigten Bezeichnungen und potentialtheoretischen Sätze zusammen [5, 9].

Die Grundlösungsmatrix $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ von $\mathcal{A}(\partial_{\mathbf{x}})\,\Gamma(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,\mathsf{E}_3$ (E_3 = dreireihige Einheitsmatrix) hat die Elemente

$$\Gamma_{kj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left[(\lambda + 3\mu)\,\delta_{kj} + (\lambda + \mu)\,\frac{(x_k - y_k)\,(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}\right]\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \tag{15}$$

Steht unter einem Ausdruck (i), so bedeutet das, daß er statt mit λ, μ mit λ_i, μ_i zu bilden ist.

Wir betrachten das Potential der einfachen Schicht

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi}) = (2\pi)^{-1} \int_S \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S_{\mathbf{y}}. \tag{16}$$

Unter den Voraussetzungen $S \in C^{k+1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{l,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $0 \leqq l \leqq k$ gilt $\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})|_{D_i} \in C^\infty(D_i) \cap C^{l+1,\beta}(\bar{D}_i)$, $i = 0, 1$, und $\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})$ erfüllt (5).

Sei $S \in C^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{0,\beta}(S)$, dann gilt mit dem verallgemeinerten Spannungsoperator $\overset{\times}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$ mit den Elementen

$$\overset{\times}{\mathcal{T}}_{kj}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \mu\delta_{kj} \sum_{l=1}^{3} n_l(\mathbf{x})\,\partial/\partial x_l + (\lambda + \mu - \varkappa)\,n_k(\mathbf{x})\,\partial/\partial x_j + \varkappa n_j(\mathbf{x})\,\partial/\partial x_k \tag{17}$$

die Sprungrelation

$$\left\{\overset{\times}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\,\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})\right\}^\pm$$

$$= \pm\boldsymbol{\varphi}(x) + (2\pi)^{-1} \int_S \overset{\times}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\,\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S_{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{x} \in S. \tag{18}$$

Das Integral ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen, die Kernmatrix hat die Elemente

$$\begin{aligned}&\left(\overset{\times}{\mathcal{T}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)_{kj}\\ &= \left[\left(\frac{(\mu+\varkappa)(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)} - 1\right)\delta_{kj} - 3\,\frac{(\mu+\varkappa)(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)}\,\frac{(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}\right]\\ &\times \sum_{l=1}^{3} n_l(\mathbf{x})\,\frac{x_l-y_l}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3} + \left(\frac{(\mu+\varkappa)(\lambda+3\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)} - 1\right)\\ &\times \frac{n_k(\mathbf{x})\,(x_j-y_j) - n_j(\mathbf{x})\,(x_k-y_k)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}.\end{aligned} \tag{19}$$

Weiter gilt $\mathcal{A}(\partial_{\mathbf{x}})\,\mathbf{V}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \notin S$ und

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})\}^+ = \{\mathbf{V}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})\}^- = \mathbf{V}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}), \quad \mathbf{x}\in S. \tag{20}$$

Für das Potential der doppelten Schicht

$$\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}) = (2\pi)^{-1}\int_S \left(\overset{\times}{\mathcal{T}}\left(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y})\right)\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})^T\right)^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S_{\mathbf{y}} \tag{21}$$

gilt unter der Voraussetzung $S \in C^{k+1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{l,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $0 \leqq l \leqq k+1$, daß $\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})|_{D_i} \in C^\infty(D_i) \cap C^{l,\beta}(D_i)$ sowie $\mathcal{A}(\partial_{\mathbf{x}})\,\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \notin S$ und $\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}) = O(|\mathbf{x}|^{-2})$, $\partial\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})/\partial x_j = O(|\mathbf{x}|^{-3})$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$ ist.

Falls $S \in C^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{0,\beta}(S)$ ist, gilt die Sprungrelation

$$\left\{\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})\right\}^{\pm} = \mp\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}), \quad \mathbf{x}\in S. \tag{22}$$

Dabei ist $\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})$ der direkte Wert des Potentials im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes, für die Elemente der Kernmatrix gilt

$$\left(\overset{\times}{\mathcal{T}}\left(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y})\right)\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})^T\right)^T_{kj} = \left(\overset{\times}{\mathcal{T}}\left(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y})\right)\Gamma(\mathbf{y},\mathbf{x})\right)_{jk}. \tag{23}$$

Sei $S \in C^{2,\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi} \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, dann gilt die Sprungrelation [9: V, 8.2]

$$\begin{aligned}&\left\{\overset{\gamma}{\mathcal{T}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)\overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})\right\}^{\pm} = \pm(\varkappa-\gamma)\,\mathcal{M}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\\ &+ (2\pi)^{-1}\int_S \left\{\mu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}}{\partial s_k(\mathbf{x})}\,\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})}{\partial s_k(\mathbf{y})} + \left(\frac{\varkappa\gamma}{\mu} - \eta\right)\mathcal{M}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)\right.\\ &\left.\times \frac{\mathsf{E}_3}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,\mathcal{M}\left(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y})\right)\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\right\}\mathrm{d}S_{\mathbf{y}} + (2\pi)^{-1}\int_S \mathsf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y},\varkappa,\gamma)\,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\,\mathrm{d}S_{\mathbf{y}}\end{aligned} \tag{24}$$

mit

$$\mathcal{M}_{kj}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) = n_j(\mathbf{x})\,\partial/\partial x_k - n_k(\mathbf{x})\,\partial/\partial x_j,$$

$$\partial/\partial s_1(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{32}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right), \quad \partial/\partial s_2(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{13}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right), \quad \partial/\partial s_3(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{21}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)$$

(diese Operatoren sind auf das über S hinaus fortgesetzte $\boldsymbol{\varphi}$ anzuwenden [9]),

$$\eta = (\varkappa+\mu)(\gamma+\mu)(\lambda+\mu)/2\mu(\lambda+2\mu)$$

und

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_{kj}(\mathbf{x},\mathbf{y},\varkappa,\gamma) = {} & (\varkappa+\gamma-\eta)\big(n_j(\mathbf{x})\,n_k(\mathbf{y}) - n_k(\mathbf{x})\,n_j(\mathbf{y})\big)/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3 \\ & + 3(\eta-\varkappa)\left(n_k(\mathbf{y})\,(x_j-y_j)\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)\,n_l(\mathbf{x})\right)\Big/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5 \\ & + 3\gamma\left(n_k(\mathbf{x})\,(x_j-y_j)\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)\,n_l(\mathbf{y})\right)\Big/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5 \\ & + 3\varkappa\left(n_j(\mathbf{y})\,(x_k-y_k)\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)\,n_l(\mathbf{x})\right)\Big/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5 \\ & + 3(\eta-\gamma)\left(n_j(\mathbf{x})\,(x_k-y_k)\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)\,n_l(\mathbf{y})\right)\Big/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5 \\ & + 3\eta\big(\delta_{kj} - 5(x_k-y_k)\,(x_j-y_j)/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\big) \\ & \times\left(\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)\,n_l(\mathbf{x})\right)\left(\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)\,n_l(\mathbf{y})\right)\Big/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5.\end{aligned}$$

Aus (24) folgt

$$\begin{aligned}&\left\{\overset{\gamma}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\overset{\varkappa}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})\right\}^+ - \left\{\overset{\gamma}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\overset{\varkappa}{\mathbf{W}}(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi})\right\}^- \\ &= 2(\varkappa-\gamma)\,\mathcal{M}\big(\partial_{\mathbf{x}},\mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}). \qquad (25)\end{aligned}$$

Das Integral mit der Kernmatrix $\mathsf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y},\varkappa,\gamma)$ stellt einen singulären Integraloperator dar [5, 9].

Die Untersuchung des Sprungverhaltens für den verallgemeinerten Spannungsoperator des verallgemeinerten elastischen Doppelschichtpotentials ist ein schwieriges potentialtheoretisches Problem. Gegenüber [5] ermöglicht es die Formel (24), die dem Randintegraloperator $\mathcal{K}$ entsprechende sechsreihige Symbolmatrix vollständig explizit aufzuschreiben und damit die Frage der starken Elliptizität positiv zu beantworten. Der Nachweis der Fredholm-Eigenschaft von $\mathcal{K}$ allein erfordert nicht die explizite Kenntnis der hiervon herrührenden dreireihigen Teilmatrix der Symbolmatrix [5]. Das Überraschende ist, daß diese Teilmatrix sogar die Nullmatrix ist.

4. Existenzsätze

In diesem Abschnitt treffen wir die Voraussetzungen $S \in C^{2,\alpha}$, $\mathbf{w} \in C^{1,\beta}(S)$, $\mathbf{P} \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Zur Lösung des Problems $K(\mathbf{w},\mathbf{P};\mathsf{C},\mathsf{A},\mathbf{b})$ machen wir den Ansatz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A_1\underset{(1)}{\overset{\varkappa_1}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x};\mathbf{P}_0) + G_1\underset{(1)}{\mathbf{V}}(\mathbf{x};\mathbf{P}_1) \text{ für } \mathbf{x}\in D_1, \qquad (26)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A_0\underset{(0)}{\overset{\varkappa_0}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x};\mathbf{P}_0) + G_0\underset{(0)}{\mathbf{V}}(\mathbf{x};\mathbf{P}_1) + (\mathsf{C}+\mathsf{A})\,\mathbf{x} + \mathbf{b} \text{ für } \mathbf{x}\in D_0. \qquad (27)$$

Dieser Ansatz erfüllt bereits (1), (4), (5). Die Kontaktbedingung (2) führt wegen (20), (22) auf die Integralgleichung

$$(A_0 + A_1)\,\mathbf{P}_0(\mathbf{x}_0) - A_1 \underset{(1)}{\overset{\varkappa_1}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{P}_0) + A_0 \underset{(0)}{\overset{\varkappa_0}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{P}_0)$$
$$- G_1 \underset{(1)}{\mathbf{V}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{P}_1) + G_0 \underset{(0)}{\mathbf{V}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{P}_1) = -\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) - (\mathsf{C} + \mathsf{A})\,\mathbf{x}_0 - \mathbf{b} \tag{28}$$

und die Kontaktbedingung (3) führt wegen (18), (24) auf

$$A_1 \left\{ \underset{(1)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big) \underset{(1)}{\overset{\varkappa_1}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{P}_0) \right\}^+ - A_0 \left\{ \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big) \underset{(0)}{\overset{\varkappa_0}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x}_0; \mathbf{P}_0) \right\}^-$$
$$+ (G_0 + G_1)\,\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_0) + G_1 (2\pi)^{-1} \int_S \underset{(1)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big) \underset{(1)}{\Gamma}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})\,\mathbf{P}_1(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}}$$
$$- G_0 (2\pi)^{-1} \int_S \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big) \underset{(0)}{\Gamma}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})\,\mathbf{P}_1(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) + \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big)\,\mathsf{C}\mathbf{x}_0 . \tag{29}$$

Stellen wir jetzt die Bedingungen

$$A_1(\varkappa_1 - \mu_1) + A_0(\varkappa_0 - \mu_0) = 0, \tag{30}$$

$$A_1 \mu_1 = A_0 \mu_0 , \tag{31}$$

$$A_1 \left(\varkappa_1 - \frac{(\varkappa_1 + \mu_1)(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \right) = A_0 \left(\varkappa_0 - \frac{(\varkappa_0 + \mu_0)(\lambda_0 + \mu_0)}{\lambda_0 + 2\mu_0} \right), \tag{32}$$

dann erhalten wir aus (24) für (29)

$$A_1 (2\pi)^{-1} \int_S \underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}, \varkappa_1, \mu_1)\,\mathbf{P}_0(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}} - A_0 (2\pi)^{-1} \int_S \underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}, \varkappa_0, \mu_0)\,\mathbf{P}_0(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}}$$
$$+ (G_0 + G_1)\,\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_0) + G_1 (2\pi)^{-1} \int_S \underset{(1)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big) \underset{(1)}{\Gamma}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})\,\mathbf{P}_1(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}}$$
$$- G_0 (2\pi)^{-1} \int_S \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big) \underset{(0)}{\Gamma}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})\,\mathbf{P}_1(\mathbf{y})\,dS_{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}_0) + \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{n}(\mathbf{x}_0)\big)\,\mathsf{C}\mathbf{x}_0 . \tag{33}$$

Wir wählen

$$A_1 = \mu_0, \quad A_0 = \mu_1 , \tag{34}$$

dann ist (31) erfüllt. Aus (30), (32) ergeben sich dann eindeutig $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ zu

$$\varkappa_0 = \mu_0 \frac{3\lambda_0\mu_1 + \mu_0(4\mu_1 - \lambda_1)}{\lambda_0\mu_1 + \mu_0\lambda_1 + 4\mu_0\mu_1}, \qquad \varkappa_1 = \mu_1 \frac{3\lambda_1\mu_0 + \mu_1(4\mu_0 - \lambda_0)}{\lambda_0\mu_1 + \mu_0\lambda_1 + 4\mu_0\mu_1}. \tag{35}$$

Führen wir die Vektoren

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{w} - (\mathsf{C} + \mathsf{A})\,\mathbf{x} - \mathbf{b} \\ \mathbf{P} + \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\mathsf{C}x \end{pmatrix}$$

und die Matrizen

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} (A_0+A_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (A_0+A_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (A_0+A_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (G_0+G_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (G_0+G_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (G_0+G_1) \end{pmatrix},$$

$$\big(k_{ij}(\mathrm{x},\mathrm{y})\big) = \frac{1}{2\pi}\left(\begin{array}{c|c} -A_1\left(\overset{\varkappa_1}{\underset{(1)}{\mathcal{T}}}(\partial_{\mathrm{y}}, \mathrm{n}(\mathrm{y}))\ \underset{(1)}{\Gamma}(\mathrm{x},\mathrm{y})^T\right)^T & -G_1\underset{(1)}{\Gamma}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ +A_0\left(\overset{\varkappa_0}{\underset{(0)}{\mathcal{T}}}(\partial_{\mathrm{y}}, \mathrm{n}(\mathrm{y}))\ \underset{(0)}{\Gamma}(\mathrm{x},\mathrm{y})^T\right)^T & +G_0\underset{(0)}{\Gamma}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \hline A_1\underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_1,\mu_1) & G_1\underset{(1)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathrm{x}}, \mathrm{n}(\mathrm{x}))\ \underset{(1)}{\Gamma}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ -A_0\underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_0,\mu_0) & -G_0\underset{(0)}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathrm{x}}, \mathrm{n}(\mathrm{y}))\ \underset{(0)}{\Gamma}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \end{array}\right)$$

ein, dann können wir das System (28), (33) in der Form ($m = 1, \ldots, 6$)

$$\sum_{j=1}^{6} (\mathcal{K}_{mj}\varphi_j)(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{6} a_{mj}\varphi_j(\mathrm{x}) + \int_S \sum_{j=1}^{6} k_{mj}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\varphi_j(\mathrm{y})\,\mathrm{d}S_{\mathrm{y}} = f_m(\mathrm{x}) \tag{36}$$

oder kurz $(\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ schreiben. Der Operator $\mathcal{K}$ ist ein linearer beschränkter Operator im Hilbert-Raum $L_2^{(6)}(S)$.

Hätten wir im Ansatz (26), (27) das gewöhnliche elastische Potential der doppelten Schicht genommen ($\varkappa_1 = \mu_1$, $\varkappa_0 = \mu_0$), so stünde im Block links unten ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung 1 (s. Anhang). Bereits in [5] wurde bewiesen, daß man bei der Wahl der Konstanten A_0, A_1, $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ gemäß (34), (35) ein gewöhnliches singuläres Integralgleichungssystem erhält, in dem keine Ableitungen der gesuchten Dichtevektoren auftreten.

Ein weiteres überraschendes Ergebnis tritt zutage, wenn wir uns die Matrix $A_1\underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_1,\mu_1) - A_0\underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_0,\mu_0)$ näher ansehen. Aus (24) folgt unter Beachtung von (30)—(32)

$$\begin{aligned} &\Big(A_1\underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_1,\mu_1) - A_0\underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_0,\mu_0)\Big)_{kj} \\ &= 3(A_1\varkappa_1 - A_0\varkappa_0)\,n_j(\mathrm{y})\,(x_k - y_k)\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,n_l(\mathrm{x})/|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^5 \\ &\quad + 3(A_1\varkappa_1 - A_0\varkappa_0)\,n_j(\mathrm{x})\,(x_k - y_k)\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,n_l(\mathrm{y})/|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^5 \\ &\quad + 3(A_1\varkappa_1 - A_0\varkappa_0)\,\big(\delta_{kj} - 5(x_k - y_k)(x_j - y_j)/|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^2\big) \\ &\quad \times \left(\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,n_l(\mathrm{x})\right)\left(\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,n_l(\mathrm{y})\right)\Big/|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^5. \end{aligned}$$

Nun ist

$$A_1\varkappa_1 - A_0\varkappa_0 = 4\mu_0\mu_1(\lambda_1\mu_0 - \lambda_0\mu_1)/(\lambda_0\mu_1 + \mu_0\lambda_1 + 4\mu_0\mu_1).$$

Gilt für die Poissonschen Zahlen $\nu_0 = \nu_1$, so ist $\lambda_1\mu_0 - \lambda_0\mu_1 = 0$. Man hat also

$$A_1\underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_1,\mu_1) - A_0\underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x},\mathrm{y},\varkappa_0,\mu_0) = \mathsf{O}, \text{ falls } \nu_0 = \nu_1 \text{ ist.} \tag{37}$$

Eine weitere nähere Betrachtung zeigt, daß $A_1 \underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \varkappa_1, \mu_1) - A_0 \underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \varkappa_0, \mu_0)$ ein schwachsingulärer Kern ist. Um das zu sehen, führen wir in $\mathrm{x} \in S$ ein lokales kartesisches (s_1, s_2, s_3)-Koordinatensystem ein, so daß die (s_1, s_2)-Ebene Tangentialebene an S in $\mathbf{x}$ ist. Die Gleichung von S in der Umgebung von x sei $s_3 = \Phi(s_1, s_2)$, so daß $\mathrm{y} \in S$ die lokalen Koordinaten $\big(s_1, s_2, \Phi(s_1, s_2)\big)$ hat. Es ist dann für $\mathrm{y} \in S$ der Abstand $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| = \sqrt{\varrho^2 + \Phi^2}$ mit $\varrho^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2$. Nach den detaillierten Untersuchungen in [5] ist

$$\sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{x}) = O(\varrho^2), \quad \sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{y}) = O(\varrho^2), \quad \varrho \leqq |\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leqq C\varrho;$$

also

$$[\delta_{kj} - 5(x_k - y_k)(x_j - y_j)/|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^2]$$
$$\times \left(\sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{x})\right)\left(\sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{y})\right)\Big/|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^5 = O(|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^{-1}).$$

Weiter ist wegen $n_j(\mathrm{y}) - n_j(\mathrm{x}) = O(\varrho)$, $x_k - y_k = O(\varrho)$

$$n_j(\mathrm{y})\,(x_k - y_k) \sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{x})/|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^5$$
$$= n_j(\mathrm{x})\,(x_k - y_k) \sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{x})/|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^5 + O(|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^{-1}).$$

Nun ist [5: (3.54), (3.57)]

$$\sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{x}) = -2^{-1}(s_1{}^2\mathring{\Phi}_{,11} + 2s_1s_2\mathring{\Phi}_{,12} + s_2{}^2\mathring{\Phi}_{,22}) \mp O(\varrho^{2+\alpha})$$
$$\sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{y}) = +2^{-1}(s_1{}^2\mathring{\Phi}_{,11} + 2s_1s_2\mathring{\Phi}_{,12} + s_2{}^2\mathring{\Phi}_{,22}) + O(\varrho^{2+\alpha})$$

$\big(\mathring{\Phi}_{,kj} = \Phi_{,kj}(0, 0)\big)$, also hat man

$$n_j(\mathrm{x})\,(x_k - y_k) \sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{x})/|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^5$$
$$+ n_j(\mathrm{x})\,(x_k - y_k) \sum_{l=1}^{3} (x_l - y_l)\, n_l(\mathrm{y})/|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^5 = O(|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^{\alpha-2}).$$

Somit gilt

$$A_1 \underset{(1)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \varkappa_1, \mu_1) - A_0 \underset{(0)}{\mathsf{B}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \varkappa_0, \mu_0) = O(|\mathrm{x} - \mathrm{y}|^{\alpha-2}). \tag{38}$$

Zum Nachweis der Fredholm-Eigenschaft von $\mathcal{K}$ stellen wir die symbolische Matrix auf. Doch vorher müssen wir noch über G_0 und G_1 verfügen. Es ist

$$\varkappa_1 = \mu_1 \frac{2 - 5\nu_0 - \nu_1 + 4\nu_0\nu_1}{2 - 3\nu_0 - 3\nu_1 + 4\nu_0\nu_1} =: \mu_1 f(\nu_0, \nu_1) =: \mu_1(-1 + \varepsilon) \tag{39}$$

und wegen $\mu_1\varkappa_0 + \mu_0\varkappa_1 = 2\mu_0\mu_1$ ist

$$\varkappa_0 = \mu_0(3 - \varepsilon). \tag{40}$$

Für die Funktion $f(\nu_0, \nu_1)$ gelten im Bereich $0 < \nu_0 < 1/2$, $0 < \nu_1 < 1/2$ die Ungleichungen

$$-1 < f(\nu_0, \nu_1) < 3, \tag{41}$$

also gelten für $\varepsilon = 1 + f(\nu_0, \nu_1)$ die Ungleichungen

$$0 < \varepsilon < 4. \tag{42}$$

Wir wählen jetzt

$$G_0 = 4 - \varepsilon, \quad G_1 = \varepsilon. \tag{43}$$

Die Wahl von G_0 und G_1 hat für den Beweis der Invertierbarkeit von $\mathcal{K}$ Bedeutung und ist nur von daher zu verstehen. In [5] war $G_0 = G_1 = 1$, und es mußte $\varkappa_0 > 0$, $\varkappa_1 > 0$ vorausgesetzt werden. Zusammen mit den Gewichtsfaktoren Q_0, Q_1 bei der verallgemeinerten elastischen Energie in (49) kann diese bei Erhalt der Positivität der Energiedichten zu Null gemacht werden bei voller Ausschöpfung des Spielraumes $0 < \nu_1 < 1/2$ für die Poissonschen Zahlen.

Mit $\mathcal{K}^t$ bezeichnen wir den Operator, wenn in (36) vor dem Integral noch ein Parameter $t \in [0, 1]$ angebracht wird. Für $t = 0$ erhalten wir bis auf konstante Faktoren den identischen Operator, der den Index Null hat. Für $t = 1$ erhalten wir (36). Die Symbolmatrix von $\mathcal{K}^t$ im Sinne der Theorie der singulären Integralgleichungen bezeichnen wir mit $\sigma^t(\mathbf{x}, \vartheta)$ [5, 9, 11]. Die Hauptsymbolmatrix von $\mathcal{K}^t$ im Sinne der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren bezeichnen wir mit $\sigma_0{}^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ [3, 13]. Um diese zu berechnen, führen wir neue Koordinaten ein. Wir bilden eine Umgebung $U(\mathbf{x})$ von $\mathbf{x} \in S$ bijektiv auf eine Umgebung von $(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$ in folgender Weise ab: In der Tangentialebene an S in $\mathbf{x}$ betrachten wir ein kartesisches (v_1, v_2)-Koordinatensystem und Polarkoordinaten $v_1 = \varrho \cos \varphi$, $v_2 = \varrho \sin \varphi$. Einem Punkt $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}} \in U(\mathbf{x})$ ordnen wir (v_1, v_2, v_3) zu, wobei v_1, v_2 die Koordinaten der orthogonalen Projektion von $\mathbf{y}$ auf die (v_1, v_2)-Ebene sind und v_3 der mit Vorzeichen versehene senkrecht zur (v_1, v_2)-Ebene gemessene Abstand des Punktes $\mathbf{y}$ von S ist. Die Abbildung werde durch

$$y_j = \Psi_j(v_1, v_2, v_3), \quad v_j = \Phi_j(y_1, y_2, y_3), \quad j = 1, 2, 3$$

beschrieben. Für Punkte $\mathbf{y} \in S$ ist

$$y_j = \Psi_j(v_1, v_2, 0) = y_j(\varrho, \varphi) = x_j + (\mathring{\Psi}_{j,1} \cos \varphi + \mathring{\Psi}_{j,2} \sin \varphi)\, \varrho + O(\varrho^2),$$

wobei $\mathring{\Psi}_{j,k} = \partial \Psi_j / \partial v_k(0, 0, 0)$ ist. Die Vektoren $\mathring{\boldsymbol{\Psi}}_{,l} = (\mathring{\Psi}_{1,l}, \mathring{\Psi}_{2,l}, \mathring{\Psi}_{3,l})^{\mathrm{T}}$ bilden ein Orthonormalsystem, $\mathring{\boldsymbol{\Psi}}_{,1}$, $\mathring{\boldsymbol{\Psi}}_{,2}$ sind Einheitsvektoren in Richtung der v_1-, v_2-Achse, $\mathring{\boldsymbol{\Psi}}_{,3} = [\mathring{\boldsymbol{\Psi}}_{,1} \times \mathring{\boldsymbol{\Psi}}_{,2}] = \mathbf{n}(\mathbf{x})$. Für das Flächenelement $\mathrm{d}S_{\mathbf{y}}$ gilt $\mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = \mathrm{d}S(\varrho, \varphi) = \varrho\big(1 + O(\varrho^2)\big)\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\varphi$.

Für Integraloperatoren der Gestalt $\int\limits_S k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, u(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}}$ ist das Symbol im Sinne der Pseudodifferentialoperatoren bezüglich der eingeführten Koordinaten definiert durch Fouriertransformation [3]:

$$\sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\varrho=0}^{\infty} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} k\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\varrho, \varphi)\big)\, \chi(\varrho)\, \mathrm{e}^{i\varrho(\xi_1 \cos\varphi + \xi_2 \sin\varphi)}\, \mathrm{d}S(\varrho, \varphi),$$

wobei $\chi(\varrho)$ eine Abschneidefunktion ist, die in einer Umgebung von $\varrho = 0$ gleich 1 ist. Das Hauptsymbol $\sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ist durch den Anteil von $\sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ mit dem höchsten Homogenitätsgrad bezüglich $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ bestimmt. Die in $\mathcal{K}^t$ auftretenden Integraloperatoren mit schwachsingulären Kernen liefern zum Hauptsymbol keinen Beitrag. An singulären Kernen treten auf $k^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = n_k(\mathbf{x})\,(x_j - y_j)/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3$. Wegen $|\mathring{\mathbf{\Psi}}_{,1}| = |\mathring{\mathbf{\Psi}}_{,2}| = 1$, $\mathring{\mathbf{\Psi}}_{,1} \cdot \mathring{\mathbf{\Psi}}_{,2} = 0$ ist

$$k^{\mathrm{H}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\varrho, \varphi)\big)\, \mathrm{d}S(\varrho, \varphi) = \left(-\frac{n_k(\mathbf{x})\,(\mathring{\Psi}_{j,1} v_1 + \mathring{\Psi}_{j,2} v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}^{\,3}} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2,$$

so daß man für das Hauptsymbol des Integraloperators mit dem Kern $k^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{aligned}
&\sigma_0^{\mathrm{H}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\
&= -\iint_{-\infty}^{+\infty} n_k(\mathbf{x}) \left(\mathring{\Psi}_{j,1} \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}^{\,3}} + \mathring{\Psi}_{j,2} \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}^{\,3}}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 \\
&= -2\pi \mathrm{i}\, n_k(\mathbf{x})\, |\boldsymbol{\xi}|^{-1} (\mathring{\Psi}_{j,1} \xi_1 + \mathring{\Psi}_{j,2} \xi_2)
\end{aligned}$$

[4: S. 122], $|\boldsymbol{\xi}| = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}$ erhält.

Betrachten wir nun den Operator

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi}) = (2\pi)^{-1} \int_S \mathcal{M}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\, (\mathsf{E}_3/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in S,$$

dessen Kernmatrix die Elemente $(k, j = 1, 2, 3)$

$$\big(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \mathsf{E}_3/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\big)_{k,j} = \big(n_k(\mathbf{x})\,(x_j - y_j) - n_j(\mathbf{x})\,(x_k - y_k)\big)/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3$$

hat, dann erhält man nach dem Vorhergehenden für die Elemente der Hauptsymbolmatrix $\sigma_0^{\mathrm{M}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$

$$\begin{aligned}
\sigma_0^{\mathrm{M}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{kj} &= -\mathrm{i}\, |\boldsymbol{\xi}|^{-1} (\mathring{\Psi}_{j,1} \xi_1 + \mathring{\Psi}_{j,2} \xi_2)\, n_k(\mathbf{x}) + \mathrm{i}\, |\boldsymbol{\xi}|^{-1} (\mathring{\Psi}_{k,1} \xi_1 + \mathring{\Psi}_{k,2} \xi_2)\, n_j(\mathbf{x}) \\
&= \mathrm{i}\, |\boldsymbol{\xi}|^{-1} \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{lkj} (-\mathring{\Psi}_{l,2} \xi_1 + \mathring{\Psi}_{l,1} \xi_2)
\end{aligned}$$

(ε_{lkj}: Levi-Civita-Symbol). Führen wir die Matrizen

$$\mathsf{R}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathring{\Psi}_{1,1} & \mathring{\Psi}_{2,1} & \mathring{\Psi}_{3,1} \\ \mathring{\Psi}_{1,2} & \mathring{\Psi}_{2,2} & \mathring{\Psi}_{3,2} \\ n_1(\mathbf{x}) & n_2(\mathbf{x}) & n_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i}\,\xi_1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\,\xi_2 \\ -\mathrm{i}\,\xi_1 & -\mathrm{i}\,\xi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

($\mathsf{R}(\mathbf{x})$ orthogonal) ein, dann erhält man [3] $\sigma_0^{\mathrm{M}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x})\, \mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\, \mathsf{R}(\mathbf{x})$. Ohne Mühe können wir nun die Hauptsymbolmatrix von $\mathcal{K}^t$ aufschreiben. Beachten wir noch, daß das Hauptsymbol der Identität gleich 1 ist, so folgt

$$\sigma_0^{t}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x})\, \big((\mu_0 + \mu_1)\, \mathsf{E}_3 + tK\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\big)\, \mathsf{R}(\mathbf{x}) & \mathsf{O} \\ \hline \mathsf{O} & \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x})\big(4\mathsf{E}_3 + tL\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\big)\, \mathsf{R}(\mathbf{x}) \end{array}\right)$$

mit

$$\begin{aligned}
K &= \mu_1 \left(\frac{(\mu_0 + \varkappa_0)\,(\lambda_0 + 3\mu_0)}{2\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)} - 1\right) - \mu_0 \left(\frac{(\mu_1 + \varkappa_1)\,(\lambda_1 + 3\mu_1)}{2\mu_1(\lambda_1 + 2\mu_1)} - 1\right) \\
&= \mu_1 \frac{\mu_1 \lambda_0 - \mu_0 \lambda_1 + 2\mu_0 \mu_1}{\lambda_0 \mu_1 + \mu_0 \lambda_1 + 4\mu_0 \mu_1} - \mu_0 \frac{\mu_0 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_0 + 2\mu_0 \mu_1}{\lambda_0 \mu_1 + \mu_0 \lambda_1 + 4\mu_0 \mu_1}
\end{aligned}$$

und

$$L = G_1\mu_1/(\lambda_1 + 2\mu_1) - G_0\mu_0/(\lambda_0 + 2\mu_0).$$

Setzen wir $\xi_1/|\boldsymbol{\xi}| = \cos\vartheta$, $\xi_2/|\boldsymbol{\xi}| = \sin\vartheta$, so erhalten wir aus $\sigma_0{}^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ die Symbolmatrix $\sigma^t(\mathbf{x}, \vartheta)$ von $\mathcal{K}^t$ [5]. Es ist

$$\det \sigma^t(\mathbf{x}, \vartheta) = \det\big((\mu_0 + \mu_1)\,\mathsf{E}_3 + tK\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\big)\det\big(4\mathsf{E}_3 + tL\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\big)$$
$$= (\mu_0 + \mu_1)(\mu_0 + \mu_1 - tK)(\mu_0 + \mu_1 + tK)\,4(4 - tL)(4 + tL).$$

Man sieht sofort, daß $\det \sigma^t(\mathbf{x}, \vartheta) > 0$ für alle $t \in [0, 1]$ ist.

Der Vollständigkeit halber berechnen wir im Anhang noch die Hauptsymbolmatrizen von $\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})$ und $\left\{\overset{\gamma}{\mathcal{T}}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \overset{\times}{\mathbf{W}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})\right\}^{\pm}$.

Mit Ergebnissen von [9] folgt nun der

Satz 4.1: *Sei $S \in C^{2,\alpha}$. Dann ist $\mathcal{K}$ im Raum $L_2{}^{(6)}(S)$ ein Fredholm-Operator mit Index Null. Ist $\mathbf{w} \in C^{1,\beta}(S)$, $\mathbf{P} \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$ und $\boldsymbol{\varphi} \in L_2{}^{(6)}(S)$ eine Lösung von $\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}$, dann ist $\mathbf{P}_0 \in C^{1,\beta}(S)$, $\mathbf{P}_1 \in C^{0,\beta}(S)$.*

Wir zeigen jetzt die Invertierbarkeit von $\mathcal{K}$. Dabei verwenden wir den Integralsatz [5, 9]

$$\int_D \big(\mathcal{A}(\partial_{\mathbf{x}})\,\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \overset{\gamma}{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\big)\, d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \overset{\gamma}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\, \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}} \tag{44}$$

mit

$$\overset{\gamma}{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\lambda + \mu - \gamma)\left(\sum_{j=1}^{3} u_{j,j}\right)^2 + \frac{\mu + \gamma}{4} \sum_{i,j=1}^{3} (u_{i,j} + u_{j,i})^2$$
$$+ \frac{\mu - \gamma}{4} \sum_{i,j=1}^{3} (u_{i,j} - u_{j,i})^2.$$

Ist $|\gamma| < \mu$, dann ist $\overset{\gamma}{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqq 0$ und aus $\overset{\gamma}{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ in einem Gebiet D folgt $\mathbf{u} = \mathbf{b}$ in D, wobei $\mathbf{b}$ ein beliebiger konstanter Vektor ist.

Sei $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung von $\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{P}_0 \in C^{1,\beta}(S)$, $\mathbf{P}_1 \in C^{0,\beta}(S)$. Wir betrachten

$$\underset{(i)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = A_i \overset{\times_i}{\underset{(i)}{\mathbf{W}}}(\mathbf{x}; \mathbf{P}_0) + G_i \underset{(i)}{\mathbf{V}}(\mathbf{x}; \mathbf{P}_1).$$

Dann ist

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) & \text{für} \quad \mathbf{x} \in D_1, \\ \underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) & \text{für} \quad \mathbf{x} \in D_0 \end{cases}$$

Lösung des Problems $K(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \mathsf{O}, \mathsf{O}, \mathbf{0})$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, also $\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in D_1$, $\underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in D_0$. Nach (22) und (20) ist

$$\left\{\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^- = -\left\{\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ + \left\{\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^- = 2A_1\mathbf{P}_0(\mathbf{x}), \tag{45}$$

$$\left\{\underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ = \left\{\underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ - \left\{\underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^- = -2A_0\mathbf{P}_0(\mathbf{x}). \tag{46}$$

Nach (18) und (25) ist

$$\left\{\overset{\gamma_1}{\underset{(1)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^- = -\left\{\overset{\gamma_1}{\underset{(1)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ + \left\{\overset{\gamma_1}{\underset{(1)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^-$$
$$= -2G_1\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) - 2A_1(\varkappa_1 - \gamma_1)\,\mathcal{M}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)\mathbf{P}_0(\mathbf{x}), \tag{47}$$

$$\left\{\overset{\gamma_0}{\underset{(0)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ = \left\{\overset{\gamma_0}{\underset{(0)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ - \left\{\overset{\gamma_0}{\underset{(0)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^-$$
$$= 2G_0\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) + 2A_0(\varkappa_0 - \gamma_0)\,\mathcal{M}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)\mathbf{P}_0(\mathbf{x}). \tag{48}$$

Anwendung von (44) ergibt

$$\int_{D_0} \overset{\gamma_1}{\underset{(1)}{E}}\left(\underset{(1)}{\mathbf{v}}, \underset{(1)}{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x} = -\int_S \left\{\overset{\gamma_1}{\underset{(1)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^- \cdot \left\{\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^- dS_{\mathbf{x}},$$

$$\int_{D_1} \overset{\gamma_0}{\underset{(0)}{E}}\left(\underset{(0)}{\mathbf{v}}, \underset{(0)}{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x} = \int_S \left\{\overset{\gamma_0}{\underset{(0)}{\mathcal{T}}}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) \underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ \cdot \left\{\underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x})\right\}^+ dS_{\mathbf{x}}.$$

Mit den Grenzwerten (44)—(48) folgt

$$Q_0 \int_{D_1} \overset{\gamma_0}{\underset{(0)}{E}}\left(\underset{(0)}{\mathbf{v}}, \underset{(0)}{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x} + Q_1 \int_{D_0} \overset{\gamma_1}{\underset{(1)}{E}}\left(\underset{(1)}{\mathbf{v}}, \underset{(1)}{\mathbf{v}}\right) d\mathbf{x}$$
$$= 4(A_1Q_1G_1 - A_0Q_0G_0) \int_S \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}_1(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}}$$
$$+ 4\left(A_1{}^2Q_1(\varkappa_1 - \gamma_1) - A_0{}^2Q_0(\varkappa_0 - \gamma_0)\right) \int_S \mathbf{P}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{M}\left(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right)\mathbf{P}_0(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}} = 0, \tag{49}$$

wenn wir

$$A_1Q_1G_1 - A_0Q_0G_0 = 0, \quad A_1{}^2Q_1(\varkappa_1 - \gamma_1) - A_0{}^2Q_0(\varkappa_0 - \gamma_0) = 0$$

fordern. Diese Bedingungen lassen sich durch die Wahl

$$\gamma_0 = -\mu_0\varepsilon/4, \quad \gamma_1 = \mu_1(-1 + \varepsilon/4), \quad Q_0 = \mu_0\varepsilon, \quad Q_1 = \mu_1(4 - \varepsilon)$$

erfüllen. Wegen (42) ist $Q_0 > 0$, $Q_1 > 0$, $|\gamma_0| < \mu_0$, $|\gamma_1| < \mu_1$. Aus (49) folgt $\underset{(0)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_0$ in D_1, $\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ in D_0. Wegen $\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1})$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$ ist $\underset{(1)}{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ in D_0. Aus (45) folgt $\mathbf{P}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, und aus (47) folgt $\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ auf S. Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz 4.2: *Der Operator $\mathcal{K}: L_2{}^{(6)}(S) \to L_2{}^{(6)}(S)$ ist invertierbar.*

Aus allem folgt der

Satz 4.3: *Sei $S \in C^{2,\alpha}$, $\mathbf{w} \in C^{1,\beta}(S)$, $\mathbf{P} \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. Dann hat das Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{A}, \mathbf{b})$ eine eindeutige Lösung. Sie ist darstellbar in der Form* (26), (27), *wobei $\mathbf{P}_0 \in C^{1,\beta}(S)$, $\mathbf{P}_1 \in C^{0,\beta}(S)$ sich eindeutig aus dem singulären Integralgleichungssystem* (28), (33) *ergeben.*

Wir zeigen jetzt die starke Elliptizität des Operators $\mathcal{K}$. Die Hauptsymbolmatrix von $\mathcal{K}$ bezeichnen wir mit $\sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sigma_0{}^1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. $\mathcal{K}$ heißt stark elliptisch, wenn eine

C^∞-Matrix $\Theta\colon S \to \mathbb{C}^{6\times 6}$ und eine positive Konstante γ existieren, so daß

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{\zeta}^T \Theta(\mathbf{x})\, \sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, \bar{\boldsymbol{\zeta}} \geqq \gamma\, |\boldsymbol{\zeta}|^2 \text{ für alle } |\boldsymbol{\xi}| = 1,\ \mathbf{x} \in S,\ \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{C}^6 \tag{50}$$

ist [1, 3]. Da $\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})$ hermitesch ist und $\mathsf{R}(\mathbf{x})$ orthogonal, ist $\sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ hermitesch. Wir zeigen, daß (50) mit $\Theta(\mathbf{x}) = \mathsf{E}_6$ (E_6 = 6-reihige Einheitsmatrix) gilt, dann ist $\boldsymbol{\zeta}^T \sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, \bar{\boldsymbol{\zeta}}$ reell. Sei im weiteren $|\boldsymbol{\xi}| = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\det\big(\sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - s\mathsf{E}_6\big)\\
&= \det\big((\mu_0 + \mu_1 - s)\, \mathsf{E}_3 + K\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\big) \det\big((4 - s)\, \mathsf{E}_3 + L\mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\big)\\
&= (\mu_0 + \mu_1 - s)(\mu_0 + \mu_1 - K - s)(\mu_0 + \mu_1 + K - s)(4 - s)\\
&\quad \times (4 - L - s)(4 + L - s),
\end{aligned}$$

damit hat $\sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ die Eigenwerte $s_1 = \mu_0 + \mu_1 > 0$, $s_2 = \mu_0 + \mu_1 - K > 0$, $s_3 = \mu_0 + \mu_1 + K > 0$, $s_4 = 4$, $s_5 = 4 - L > 0$, $s_6 = 4 + L > 0$. Es existiert eine unitäre Matrix T, so daß in den neuen Koordinaten $\tilde{\zeta} = \mathsf{T}\boldsymbol{\zeta}$

$$\boldsymbol{\zeta}^T \sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, \bar{\boldsymbol{\zeta}} = \sum_{j=1}^{6} s_j\, |\tilde{\zeta}_j|^2$$

gilt. Sei $\gamma = \min(s_1, \ldots, s_6) > 0$; dann folgt

$$\boldsymbol{\zeta}^T \sigma_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, \bar{\boldsymbol{\zeta}} \geqq \gamma \sum_{j=1}^{6} |\tilde{\zeta}_j|^2 = \gamma |\tilde{\boldsymbol{\zeta}}|^2 = \gamma |\boldsymbol{\zeta}|^2.$$

Damit ist $\mathcal{K}$ ein stark elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung 0. Für unser System $\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}$ treffen somit folgende Aussagen zu [1, 3]: Sei $S \in C^\infty$. Für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ ist der Operator $\mathcal{K}\colon H^r(S) \to H^r(S)$ linear und beschränkt. Für jede nichtnegative ganze Zahl j existieren reelle Konstanten $\gamma_0 > 0$, $\delta > 0$, $c \geqq 0$, so daß die Gardingsche Ungleichung

$$(\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})_{H^j(S)} \geqq \gamma_0\, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^j(S)} - c\, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{j-\delta}(S)}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^j(S), \tag{51}$$

gilt. Diese ist die Grundlage für asymptotische Fehlerabschätzungen bei Randelementmethoden. Aus (51) folgt weiter, daß $\mathcal{K}\colon H^r(S) \to H^r(S)$ ein Fredholm-Operator mit Index Null ist. Für $r = 0$ wurde dies oben mit der Theorie singulärer Integralgleichungen bewiesen. Da eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ von $\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ zu allen Räumen $H^r(S)$ gehört, ist $\boldsymbol{\varphi}$ beliebig glatt. Aus Satz 4.2 folgt, daß $\mathcal{K}$ eine eineindeutige Abbildung von $H^r(S)$ auf $H^r(S)$ ist. Die Gleichung $\mathcal{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}$ hat für beliebiges $\mathbf{f} \in H^r(S)$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{\varphi} \in H^r(S)$.

Mit $LK(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{A}, \mathbf{b})$ bezeichnen wir die Lösung des Problems $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{A}, \mathbf{b})$. Sie läßt sich auch additiv aufbauen aus dem Verschiebungsfeld $\mathbf{u}_C(\mathbf{x}) = \mathsf{C}\mathbf{x}$ ($\mathsf{C} = \mathsf{C}^T$) des Gesamtraumes, das zu einem konstanten Spannungstensor gehört, aus der starren Bewegung des Gesamtraumes $\mathbf{u}_A = \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathsf{A} = -\mathsf{A}^T$) und der Störung $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = LK(\mathbf{w}, \mathbf{P}^*; \mathsf{O}, \mathsf{O}, \mathbf{0})$ mit $\mathbf{P}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \Big(\underset{(1)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big) - \underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\Big)\, \mathsf{C}\mathbf{x}$. Zu einem Feld $\mathbf{v}$ betrachten wir die Energie

$$\Pi(\mathbf{v}) = 2^{-1} \int_{D_1} \underset{(1)}{E}(\mathbf{v}, \mathbf{v})\, d\mathbf{x} + 2^{-1} \int_{D_0} \underset{(0)}{E}(\mathbf{v}, \mathbf{v})\, d\mathbf{x} - \int_S \mathbf{P}^*(\mathbf{x}) \cdot \{\mathbf{v}(\mathbf{x})\}^+\, dS_{\mathbf{x}}.$$

Da $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ (5) erfüllt, ist die Energie $\Pi(\mathbf{u}_0)$ endlich, man erhält mit (9)

$$\Pi(\mathbf{u}_0) = -2^{-1} \int_S \mathbf{P}^*(\mathbf{x}) \cdot \{\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\}^+\, dS_{\mathbf{x}} + 2^{-1} \int_S \Big\{\underset{(0)}{\mathcal{T}}\big(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\big)\, \mathbf{u}_0(\mathbf{x})\Big\}^- \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}}.$$

Da $E(\mathbf{v}, \mathbf{u}_A) = 0$ ist, ist auch $\Pi(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_0)$ endlich, man erhält

$$\Pi(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_0) = \Pi(\mathbf{u}_0) - \int_S \mathbf{P}^*(\mathbf{x}) \cdot (\mathsf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})\, dS_{\mathbf{x}}.$$

Variationsprinzip: *Unter allen Feldern* $\mathbf{v}$ *mit endlicher Energie, die* (5) *und* $\{\mathbf{v}\}^+ - \{\mathbf{v}\}^- = \mathbf{w}$ *erfüllen, hat* $\mathbf{u}_0$ *die Eigenschaft* $\Pi(\mathbf{v}) \geqq \Pi(\mathbf{u}_0)$.

Dieses Variationsprinzip ist äquivalent zur Variationsgleichung, ein $\mathbf{u}_0$ mit endlicher Energie zu finden, das $\{\mathbf{u}_0\}^+ - \{\mathbf{u}_0\}^- = \mathbf{w}$ und (5) erfüllt, so daß

$$\int_{D_1} E(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\, dx + \int_{D_0} E(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)\, dx - \int_S \mathbf{P}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}} = 0$$
$$(1) \qquad\qquad (0)$$

gilt, für alle $\mathbf{v}_0$ mit endlicher Energie, die (5) und $\{\mathbf{v}_0\}^+ - \{\mathbf{v}_0\}^- = 0$ erfüllen [7].

Das Problem $K(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \cdot, \cdot)$ hat die Lösung

$$LK(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \cdot, \cdot) = LK(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{O}, 0) + LK(0, 0; \mathsf{O}, \cdot, \cdot).$$

Nun ist

$$LK(0, 0; \mathsf{O}, \cdot, \cdot) = \{LK(0, 0; \mathsf{O}, \mathsf{A}, \mathbf{b}) \colon \mathsf{A} = -\mathsf{A}^T \text{ und } \mathbf{b} \text{ beliebig}\}.$$

Für fest vorgegebenes $\mathsf{A}_0 = -\mathsf{A}_0^T$, $\mathbf{b}_0$ ist auf Grund des Eindeutigkeitssatzes $LK(0, 0; \mathsf{O}, \mathsf{A}_0, \mathbf{b}_0) = \mathsf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{b}_0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Also ist

$$LK(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \cdot, \cdot) = LK(\mathbf{w}, \mathbf{P}; \mathsf{C}, \mathsf{O}, 0) + \mathsf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},\ \mathsf{A} = -\mathsf{A}^T \text{ und } \mathbf{b} \text{ beliebig}.$$

Bemerkenswert ist, daß man im Unterschied zum ebenen Fall bei zugelassener freier Starrkörperbewegung im Unendlichen keine Gleichgewichtsbedingungen bezüglich $\mathbf{P}$ zu stellen hat.

Als ein triviales Beispiel geben wir die Lösung des Problems $K(w\mathbf{e}_r, P\mathbf{e}_r, (2\mu_0 + 3\lambda_0)^{-1} p\delta_{kj}, \mathsf{O}, 0)$ an für einen kugelförmigen Einschluß $D_1 = \{\mathbf{x} \colon |\mathbf{x}| < a\}$ in einem unter allseitigem Druck oder Zug ($p < 0$ oder $p > 0$) stehenden elastischen Raum. Mit Hilfe der Formeln für den kugelsymmetrischen Fall folgt elementar für das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r$

$$u = \begin{cases} (2\mu_0 + 3\lambda_0)^{-1} p|\mathbf{x}| + D|\mathbf{x}| & \text{für } |\mathbf{x}| < a, \\ (2\mu_0 + 3\lambda_0)^{-1} p|\mathbf{x}| + C/|\mathbf{x}|^2 & \text{für } |\mathbf{x}| > a \end{cases}$$

mit

$$C = \frac{a^3}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_0} \left(P - p \left(\frac{2\mu_1 + 3\lambda_1}{2\mu_0 + 3\lambda_0} - 1 \right) - (3\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{w}{a} \right),$$

$$D = \frac{1}{3\lambda_1 + 2\mu_1 + 4\mu_0} \left(P - p \left(\frac{(2\mu_1 + 3\lambda_1}{2\mu_0 + 3\lambda_0} - 1 \right) + 4\mu_0 \frac{w}{a} \right).$$

Für die Komponenten des Spannungstensors erhält man

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\varphi\theta} = 0,$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \big((2\mu_1 + 3\lambda_1)/(2\mu_0 + 3\lambda_0)\big)\, p + (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, D \text{ für } |\mathbf{x}| < a,$$

$$\sigma_{rr} = p - 4\mu_0 C|\mathbf{x}|^{-3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = p + 2\mu_0 C|\mathbf{x}|^{-3} \text{ für } |\mathbf{x}| > a.$$

Im konkreten Fall $p = 0$, $P = 0$, $w < 0$ (Aufweitung) ist $C > 0$, $D < 0$.

Lösungen in weiteren Fällen nach der Methode des äquivalenten Einschlusses (equivalent inclusion method) von Eshelby (ein oder zwei ellipsoidale Einschlüsse) findet man in [12].

Die hier dargelegte Theorie ist ohne Mühe übertragbar auf den Fall mehrerer Einschlüsse und den Fall, daß der Spannungstensor des Raumes vor der Störung durch den Einschluß eine allgemeinere Gestalt hat.

Anhang

a) *Hauptsymbolmatrix von* $\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})$, $\mathbf{x} \in S$: Im Kern von $\mathbf{V}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})$ treten auf (vgl. (15), (16))

$$k^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \; k_{kj}^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_k - y_k)(x_j - y_j)/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3.$$

Nun ist

$$k^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\varrho, \varphi))\, \mathrm{d}S(\varrho, \varphi) = (|\mathbf{v}|^{-1} + O(1))\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2, \quad \varrho = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2};$$

also erhält man für das Hauptsymbol des Integraloperators mit dem Kern $k^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\sigma_0^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{v}|^{-1}\, \mathrm{e}^{i(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 = 2\pi\, |\boldsymbol{\xi}|^{-1}.$$

Aus

$$k_{kj}^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\varrho, \varphi))\, \mathrm{d}S(\varrho, \varphi)$$
$$= \left(\mathring{\Psi}_{k,1}\mathring{\Psi}_{j,1} \frac{v_1^2}{|\mathbf{v}|^3} + (\mathring{\Psi}_{k,1}\mathring{\Psi}_{j,2} + \mathring{\Psi}_{k,2}\mathring{\Psi}_{j,1}) \frac{v_1 v_2}{|\mathbf{v}|^3} + \mathring{\Psi}_{k,2}\mathring{\Psi}_{j,2} \frac{v_2^2}{|\mathbf{v}|^3} + O(1)\right) \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2$$

folgt durch Fouriertransformation das Hauptsymbol des Integraloperators mit dem Kern $k_{kj}^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\sigma_0^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{kj} = 2\pi \left(\mathring{\Psi}_{k,1}\mathring{\Psi}_{j,1} \frac{\xi_2^2}{|\boldsymbol{\xi}|^3} - (\mathring{\Psi}_{k,1}\mathring{\Psi}_{j,2} + \mathring{\Psi}_{k,2}\mathring{\Psi}_{j,1}) \frac{\xi_1\xi_2}{|\boldsymbol{\xi}|^3} + \mathring{\Psi}_{k,2}\mathring{\Psi}_{j,2} \frac{\xi_1^2}{|\boldsymbol{\xi}|^3}\right).$$

Alle hier benötigten Fourierintegrale stehen in [4]. Für die Elemente der Hauptsymbolmatrix $\sigma_0^{\mathrm{V}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ von

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}) = (2\pi)^{-1} \int\limits_S \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in S,$$

erhält man

$$\sigma_0^{\mathrm{V}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{kj} = \delta_{kj} \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} + \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \sigma_0^{\mathrm{A}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{kj}.$$

Mit der Matrix

$$\mathsf{Q}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|^3}$$
$$\times \begin{pmatrix} (\lambda + 3\mu)\, |\boldsymbol{\xi}|^2 + (\lambda + \mu)\, \xi_2^2 & -(\lambda + \mu)\, \xi_1\xi_2 & 0 \\ -(\lambda + \mu)\, \xi_1\xi_2 & (\lambda + 3\mu)\, |\boldsymbol{\xi}|^2 + (\lambda + \mu)\, \xi_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 3\mu)\, |\boldsymbol{\xi}|^2 \end{pmatrix}$$

können wir schreiben ([3]; dort fehlt der Faktor $1/\mu$)

$$\sigma_0^{\mathrm{V}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x})\, \mathsf{Q}^{\mathrm{V}}(\boldsymbol{\xi})\, \mathsf{R}(\mathbf{x}).$$

b) *Hauptsymbolmatrix von* $\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$: Wir betrachten C^∞-Funktionen $\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) > 0$ mit Träger in $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon$, $\int\limits_S \delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = 1$ und der Eigenschaft, daß eine von ε unabhängige Konstante C existiert mit $|\partial\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})/\partial x_j| \leqq C/\varepsilon^3$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$. Solche Funktionen existieren [14: S. 19]. Nach dem Satz von Stokes [9: V, §1, (1.21)] ist

$$\int_S \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}} = -\int_S \delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}},$$

also hat man

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}}\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})\, \mathrm{d}S_{\mathbf{y}}.\end{aligned}$$

Die Symbolmatrix ergibt sich aus der Formel

$$\begin{aligned}&\sigma^{\mathrm{D}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varrho=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2)}\, \mathrm{d}S(\varrho, \varphi)\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2.\end{aligned}$$

Beachtet man $\mathbf{n}(\mathbf{y}) = [\boldsymbol{\Psi}_{,1} \times \boldsymbol{\Psi}_{,2}]/|[\boldsymbol{\Psi}_{,1} \times \boldsymbol{\Psi}_{,2}]|$ für $v_3 = 0$, $\eta_\varepsilon(v_1, v_2) := \delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \boldsymbol{\Psi}(v_1, v_2, 0))$, dann folgt

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\delta_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)}\\ &= \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial v_1} \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} + \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial v_2} \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)}.\end{aligned}$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\begin{aligned}&\sigma^{\mathrm{D}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \Bigg\{ i\xi_1 \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(v_1, v_2) \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2\\ &\quad + i\xi_2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(v_1, v_2) \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2\\ &\quad + \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(v_1, v_2) \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2\\ &\quad + \iint_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(v_1, v_2) \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\boldsymbol{\Psi}(v_1,v_2,0)} e^{i(v_1\xi_1+v_2\xi_2)}\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 \Bigg\}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert des dritten und vierten Integrals hängt nicht von ξ ab, so daß man für die Hauptsymbolmatrix

$$\begin{aligned}\sigma_0^{\mathrm{D}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= i\xi_1\left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + i\xi_2\left(\mathcal{M}(\partial_{\mathbf{y}}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, \mathsf{E}_3\boldsymbol{\Phi}_2(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}\\ &= i\xi_1 \begin{pmatrix} 0 & -\mathring{\Psi}_{3,2} & \mathring{\Psi}_{2,2}\\ \mathring{\Psi}_{3,2} & 0 & -\mathring{\Psi}_{1,2}\\ -\mathring{\Psi}_{2,2} & \mathring{\Psi}_{1,2} & 0 \end{pmatrix} + i\xi_2 \begin{pmatrix} 0 & \mathring{\Psi}_{3,1} & -\mathring{\Psi}_{2,1}\\ -\mathring{\Psi}_{3,1} & 0 & \mathring{\Psi}_{1,1}\\ \mathring{\Psi}_{2,1} & -\mathring{\Psi}_{1,1} & 0 \end{pmatrix}\\ &= \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x})\, |\boldsymbol{\xi}|\, \mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi})\, \mathsf{R}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

erhält.

c) *Hauptsymbolmatrix von* $\mathbf{M}(\mathbf{x}; \mathcal{M}\boldsymbol{\varphi}) = (1/2\pi) \int\limits_S \mathcal{M}(\partial_\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}) (\mathsf{E}_3/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \mathcal{M}(\partial_\mathbf{y}, \mathbf{n}(\mathbf{y})) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) \, dS_\mathbf{y}$:

Mit der Darstellung von b) läßt sich der Kern dieses Integraloperators bis auf mit $\varepsilon \to 0$ vernachlässigbare Glieder als Faltung schreiben, so daß man für die Hauptsymbolmatrix $\sigma_0^{MD}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ von $\mathbf{M}(\mathbf{x}; \mathcal{M}\boldsymbol{\varphi})$

$$\sigma_0^{MD}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \, \mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \, \mathsf{R}(\mathbf{x}) \, \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \, |\boldsymbol{\xi}| \, \mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \, \mathsf{R}(\mathbf{x})$$
$$= \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \begin{pmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & 0 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{\xi}|^2 \end{pmatrix} \mathsf{R}(\mathbf{x})$$

erhält.

d) *Hauptsymbolmatrix von* $(1/2\pi) \int\limits_S \sum\limits_{k=1}^{3} (\partial|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}/\partial s_k(\mathbf{x})) \, (\partial\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})/\partial s_k(\mathbf{y})) \, dS_\mathbf{y}$: Wegen $\partial/\partial s_k(\mathbf{y}) = 2^{-1} \sum\limits_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ikj} \mathcal{M}_{ij}(\partial_\mathbf{y}, \mathbf{n}(\mathbf{y}))$ ergibt sich aus b) und c) für die Hauptsymbolmatrix $\sigma_0^S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ dieses Operators $\sigma_0^S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -|\boldsymbol{\xi}| \, \mathsf{E}_3$.

e) *Hauptsymbolmatrix von* $\left\{\overset{\gamma}{\mathcal{T}}(\partial_\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) \, \overset{\varkappa}{\mathbf{W}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\varphi})\right\}^\pm$: Aus (24), b), c), d) folgt für die Hauptsymbolmatrix

$$\sigma_0^{\gamma,\varkappa\pm}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \pm (\varkappa - \gamma) \, \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \, |\boldsymbol{\xi}| \, \mathsf{Q}(\boldsymbol{\xi}) \, \mathsf{R}(\mathbf{x})$$
$$+ \mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \, |\boldsymbol{\xi}| \left(-\mu \mathsf{E}_3 + (\varkappa\gamma/\mu - \eta) \, \mathsf{Q}^2(\boldsymbol{\xi})\right) \mathsf{R}(\mathbf{x}).$$

Für $\gamma = \varkappa = \mu$ folgt

$$\sigma_0^{\mu,\mu\pm}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \, |\boldsymbol{\xi}| \left(\mu \mathsf{E}_3 + \frac{\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \mathsf{Q}^2(\boldsymbol{\xi})\right) \mathsf{R}(\mathbf{x})$$

$$= -\mathsf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \frac{\mu}{|\boldsymbol{\xi}|} \begin{pmatrix} |\boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \xi_1^2 & \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \xi_1\xi_2 & 0 \\ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \xi_1\xi_2 & |\boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \xi_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} |\boldsymbol{\xi}|^2 \end{pmatrix} \mathsf{R}(\mathbf{x}).$$

Hier gibt es Abweichungen gegenüber [3].

LITERATUR

[1] ARNOLD, D., and W. WENDLAND: On the Asymptotic Convergence of Collocation Methods. Preprint. Darmstadt: Techn. Hochschule 1982, Preprint-Nr. 665.

[2] БУРЧУЛАДЗЕ, Т. В., и Т. Г. ГЕГЕЛИА: Развитие метода потенциала в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба 1985.

[3] HSIAO, G. C., and W. WENDLAND: On a boundary integral method for some exterior problems in elasticity. Proc. Tbilissi Univ. 257 (1985), 31–60.

[4] JENTSCH, L.: Die elastostatischen Greenschen Tensoren für den Halbraum mit Anwendungen auf Wärmespannungsprobleme. ZAMM 48 (1968), 117–126.

[5] JENTSCH, L.: Über Wärmespannungen in Körpern mit stückweise konstanten Laméschen Elastizitätsmoduln (Schriftenr. Zentralinst. Math. Mech. Akad. Wiss.: H. 14). Berlin: Akademie-Verlag 1972.

[6] JENTSCH, L.: Über stationäre thermoelastische Schwingungen in inhomogenen Körpern. Math. Nachr. 64 (1974), 171–231.

[7] JENTSCH, L.: Bemerkungen zu einigen neueren gekoppelten Randwertproblemen der Thermoelastostatik. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturw. R. 25 (1976), 39–52.
[8] JENTSCH, L.: Über Randintegralmethoden bei Randkontaktaufgaben. In: Problems and Methods in Mathematical Physics (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 111). Proc. 9. TMP, Karl-Marx-Stadt, June 27–July 1, 1988 (eds.: F. Kuhnert and B. Silbermann). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1989, 110–119.
[9] КУПРАДЗЕ, В. Д., ГЕГЕЛИА, Т. Г., БАШЕЛЕЙШВИЛИ, М. О., и Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ: Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва: Изд-во Наука 1976. Engl. — Übers.: Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1979.
[10] MARKOV, K. Z.: On the dilatation theory of elasticity. ZAMM 61 (1981), 349–358.
[11] MICHLIN, S. G., und S. PRÖSSDORF: Singuläre Integraloperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1980.
[12] MURA, T.: Micromechanics of Defects in Solids. The Hague–Boston–London: Martinus Nijhoff Publ. 1982.
[13] TAYLOR, M.: Pseudodifferential Operators. Princeton: University Press 1981.
[14] WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Stuttgart: B. G. Teubner 1982.

Manuskripteingang: 26. 09. 1988

VERFASSER:

Prof. Dr. LOTHAR JENTSCH
Sektion Mathematik der Technischen Universität
Reichenhainer Str. 39/41
O-9010 Chemnitz