

Zur Regularität einer Kontakt-Randwertaufgabe

R. SCHUMANN

Dem Andenken an Johannes Maul (1947–1988) gewidmet¹⁾

Es wird gezeigt, daß die Lösung einer Kontakt-Randwertaufgabe der linearen, n -dimensionalen Elastizitätstheorie zur Klasse $C^{1+\alpha}$ gehört, falls die Normalkomponente des Verschiebungsvektors in derselben Klasse liegt.

Доказывается непрерывность по Гельдеру первых производных решения контактно-границной задачи линейной упругости в n -мерном пространстве если нормальная компонента смещений тоже принадлежит этому классу.

It is proved that the solution of a contact boundary value problem in linear n -dimensional elasticity belongs to $C^{1+\alpha}$ if the normal component of the displacement vector does.

1. Einleitung

In [15] hat der Verfasser eine Kontakt-Randwertaufgabe benutzt, um das Signorini-Problem der linearen n -dimensionalen Elastizitätstheorie auf eine skalare Variationsungleichung auf dem Rand des zugrundeliegenden Gebietes zurückzuführen. Die skalare Aufgabe enthält einen Pseudodifferentialoperator, und es wurde in [15] gezeigt, daß die Normalenkomponente $u \cdot n$ der Lösung u auf dem Rand lokal zum Hölder-Raum $C^{1+\alpha}$ gehört. Um die $C^{1+\alpha}$ -Regularität der Lösung auch im Abschluß des Gebietes zu zeigen, braucht man den folgenden Satz, dessen Bezeichnungen in Abschnitt 2 erklärt werden und dessen Beweis sich aus Satz 3.1 und den Formeln (9), (11) ergibt.

Satz: Sei $\Phi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ schwache Lösung (vgl. Satz 2.2) der elliptischen Randkontaktaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta \partial_\alpha (a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi^j) &= 0 \text{ in } \Omega \quad (i = 1, \dots, n) \\ -\Phi \cdot n &= g, T_t \Phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

zu vorgegebenem $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$. Ferner sei Γ eine offene Teilmenge von $\partial\Omega$. Aus $a_{ij}^{\alpha\beta} \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ und $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega) \cap C_{loc}^{1+\alpha}(\Gamma)$ mit $\alpha \in (0, 1)$ folgt dann $\Phi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C_{loc}^{1+\alpha}(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}^n)$.

In der klassischen Arbeit von AGMON, DOUGLIS und NIRENBERG [1] werden Regularitätsaussagen vom obigen Typ für die Räume $C^{k+\alpha}$ mit $k \geq 2$ hergeleitet. In TRIEBEL [16: Abschnitt 4.3.3/4] findet man die von uns gewünschten Hölderschen Abschätzungen, allerdings für Gleichungen und nicht für Systeme. Das obige Kontakt-Randwertproblem ordnet sich als Spezialfall in die Theorie der Randwert- und

¹⁾ Siehe die Fußnote auf S. 433.

Kopplungsprobleme von elastischen Medien ein, für die BECKERT [3] bereits 1972 Regularitätsuntersuchungen auf der Basis von Variationsmethoden durchführte. JENTSCH und MAUL haben mit Hilfe singularer Integralgleichungen in einer Vielzahl von Arbeiten sehr allgemeine räumliche und ebene Aufgaben der Elastizitätstheorie unter verschiedenen Rand- und Kopplungsbedingungen betrachtet (vgl. [9] und [13]). Für die hier betrachteten Aufgaben (1) werden in KUPRADZE et al. [12] und in MAUL [13] im Fall räumlicher bzw. ebener homogener, isotroper elastischer Medien mit Hilfe von Potentialansätzen reguläre Lösungen nachgewiesen. Wir benutzen in dieser Arbeit die Campanato-Technik (vgl. [4]), die es gestattet, ohne Potentialtheorie und Darstellungsformeln auszukommen. Diese Technik wurde von GIAQUINTA und MODICA [7] auf elliptische Systeme vom Navier-Stokesschen Typ unter Neumannschen Randbedingungen angewandt. Wir werden uns hier auf die letztgenannte Arbeit stützen und können uns daher an einigen Stellen auf die Angabe der Beweisidee beschränken.

Die Randbedingung in Aufgabe (1) kann interpretiert werden als Kontaktbedingung mit einem starren Stempel, der am Rande des Gebietes in das elastische Medium eingedrückt wird, wenn das elastische Medium am Stempel reibungsfrei gleiten kann, ohne sich von diesem abzuheben. Ist Abheben möglich, kommt man zum eingangs genannten Signorini-Problem.

2. Die Kontakt-Randwertaufgabe

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ (vgl. KUFNER et al. [11: S. 305]). Wir nehmen an, daß Ω mit einem elastischen Material angefüllt ist. Das lineare elastische Verhalten dieses Materials werde durch die elastischen Koeffizienten $a_{ij}^{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$ ($i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n$) beschrieben, welche den folgenden Voraussetzungen genügen mögen:

(i) *Symmetrie*: $a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ji}^{\alpha\beta} = a_{ij}^{\beta\alpha} = a_{ji}^{\beta\alpha}$ für $i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n$; $x \in \bar{\Omega}$. Dabei sei $a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{ij}^{\alpha\beta}(x)$ usw.

(ii) *Elliptizität*: $a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \geq c_0 |\xi|^2$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi_\alpha = \xi_\alpha$ ($i, \alpha = 1, \dots, n$; Anwendung der Summenkonvention; $|\xi|^2 = \sum |\xi_\alpha|^2$).

Wir bemerken, daß aus (ii) sofort die Gültigkeit der Legendre-Hadamard-Bedingung

$$a_{ij}^{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \eta^i \eta^j \geq (c_0/2) |\xi|^2 |\eta|^2 \quad (2)$$

für alle $x \in \bar{\Omega}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ folgt (vgl. KINDERLEHRER [10: S. 607]). Der Spannungstensor σ_i^α wird gegeben durch

$$\sigma_i^\alpha(u) = \sum_{j,\beta=1}^n a_{ij}^{\alpha\beta} e_{j\beta}(u),$$

wobei $e_{j\beta}(u) = (1/2)(\partial_j u^\beta + \partial_\beta u^j)$ der Dehnungstensor zum Verschiebungsvektor $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist. Es gilt natürlich $\sigma_i^\alpha = a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\beta u^j$.

Bemerkung 2.1: Wir setzen $V = W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $H = L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $T = W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ und definieren den Spuoperator $\gamma: V \rightarrow T$ durch $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$. Er bildet V auf T ab und $V_0 = \hat{W}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist sein Kern. Für Funktionen $\varphi \in T$ werden wir die Normal- und Tangentialkomponenten φ_n bzw. φ_t benötigen. Daher erklären wir Projektionsoperatoren $\sigma_1, \sigma_2: T \rightarrow T$ durch $\sigma_1 \varphi := \varphi_n = (\varphi \cdot n) n$ und $\sigma_2 \varphi := \varphi_t = (\text{id} - \sigma_1) \varphi$. Wir bemerken in diesem Zusammenhang, daß für jedes $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ die Funktio-

nen $\varphi \cdot n_i$ ($i = 1, \dots, n$) ebenfalls zu $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ gehören, weil $\partial\Omega$ glatt ist (vgl. WLOKA [17: S. 71]; TRIEBEL [16: S. 192, S. 195]). Hierbei ist $n = (n_1, \dots, n_n)$ der äußere Normalenvektor. Wir setzen $T_i = \sigma_i T$ ($i = 1, 2$), $W = \ker \sigma_1 \gamma$, $\|w\|_W = \|w\|_V$ für $w \in W$. Schließlich definieren wir die Bilinearform

$$a(\Phi, \zeta) = \int_{\Omega} a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi^j \partial_{\alpha} \zeta^i dx \text{ für } \Phi, \zeta \in V$$

und einen Operator $A: V \rightarrow V_0^*$, linear und stetig, durch

$$\langle A\Phi, \zeta \rangle = a(\Phi, \zeta) \text{ für alle } \zeta \in V_0.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir aus AUBIN [2: Ths. 6.2.1 und 6.2.2.] schließen, daß sowohl der Randspannungsoperator $T(n) \Phi \in T^*$ (T^* — Dualraum von T) als auch dessen Normal- und Tangentialkomponenten

$$T_n \Phi = \sigma_1^* T(n) \Phi \text{ bzw. } T_t \Phi = \sigma_2^* T(n) \Phi \in T^*$$

wohl-definiert sind und die folgende Greensche Formel gilt:

$$\begin{aligned} a(\Phi, \zeta) &= (A\Phi, \zeta)_H + \langle T(n) \Phi, \zeta|_{\partial\Omega} \rangle \\ &= (A\Phi, \zeta)_H + \langle T_n \Phi, \zeta_n \rangle + \langle T_t \Phi, \zeta_t \rangle \end{aligned} \tag{3}$$

für $\Phi, \zeta \in V$ mit $A\Phi \in H$ ($V_0 \subset H \hookrightarrow V_0^*$, vgl. AUBIN [2: Kap. 2.1.5] und ZEIDLER [18: Bd. 2, Kap. 23]). Für glattes Φ gilt natürlich ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} (A\Phi)_i &= -\partial_{\alpha} (a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi^j), \quad (T(n) \Phi)_i = a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi^j n_{\alpha}, \\ T_n \Phi &= (T(n) \Phi \cdot n), \quad T_t \Phi = T(n) \Phi - T_n \Phi. \end{aligned}$$

Jetzt kommen wir zur eigentlichen Problemstellung. Gegeben sei eine Funktion $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wir suchen eine Gleichgewichtskonfiguration des Ω ausfüllenden elastischen Körpers unter Volumenkräften f bei auf $\partial\Omega$ vorgegebener Normalenkomponente g des Verschiebungsvektors und verschwindenden Tangential-Randkräften, d. h., wir betrachten

$$\begin{aligned} -\partial_{\alpha} (a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi^j) &= f_i \text{ in } \Omega \quad (i = 1, \dots, n) \\ -\Phi \cdot n &= g, \quad T_t \Phi = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir notieren noch

$$\mathcal{P} = \{ \zeta = a + Bx \mid a \in \mathbb{R}^n, B \text{ eine schiefsymmetrische reelle, konstante } (n, n)\text{-Matrix; } \zeta \cdot n = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}.$$

Satz 2.2: Es sei

$$\mathcal{P} = \{0\}. \tag{5}$$

Dann hat (4) zu vorgegebenen $f = (f_1, \dots, f_n) \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ genau eine schwache Lösung $\Phi \in V$, d. h. $-\Phi|_{\partial\Omega} \cdot n = g$, und

$$a(\Phi, \zeta) = \int_{\Omega} f_i \zeta^i dx \text{ für alle } \zeta \in W. \tag{6}$$

Beweis: Für $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ gilt nach Bemerkung 2.1 $g_i := gn_i \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Daher existieren $\tilde{g}_i \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\tilde{g}_i|_{\partial\Omega} = g_i$, und es gilt $\tilde{g}_i|_{\partial\Omega} \cdot n = g$

auf $\partial\Omega$ (vgl. KUFNER et al. [11: Th. 6.9.2/S. 341]). Wir suchen nun ein $u \in W$ mit

$$a(u, \zeta) = \int_{\partial} f_i \zeta^i dx + a(\bar{g}, \zeta) \text{ f\"ur alle } \zeta \in W. \tag{7}$$

Wegen $\mathcal{P} = \{0\}$ folgt im Fall $n = 3$ aus NEČAS und HLAVAČEK [14: Th. 3.5/S. 85 and Th. 4.1/S. 101f.], daß die Bilinearform a auf W koerzitiv ist, d. h., es gibt ein $c_1 > 0$ mit

$$a(\zeta, \zeta) \geq c_1 \|\zeta\|_W^2 \text{ f\"ur alle } \zeta \in W. \tag{8}$$

Es ist sehr leicht zu sehen, daß sich die Beweise aus [14] auf $n > 3$ übertragen lassen, so daß (8) für alle n gültig ist. In [14: S. 101f.] findet man auch Voraussetzungen, die die Gültigkeit der geometrischen Bedingung $\mathcal{P} = \{0\}$ sichern. Da die Abbildung $\zeta \mapsto a(\bar{g}, \zeta)$ ein lineares, stetiges Funktional auf W ist, folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung u von (7) aus dem Theorem von Milgram-Lax. Wir setzen $\Phi = u - \bar{g}$. Daraus folgt sofort (6). Wir benutzen jetzt (3) für $\zeta \in C_0^\infty(\partial\Omega)$ und erhalten zunächst $A\Phi = f$. Nun folgt aus (3) $\langle T_i \Phi, \zeta_i \rangle = 0$ für alle $\zeta \in W$, d. h. $T_i \Phi = 0$. Schließlich ist $-\Phi \cdot n = -u \cdot n + \bar{g} \cdot n = g$ auf $\partial\Omega$. Also erfüllt $\Phi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die Gleichungen (4) im schwachen Sinn ■

3. Regularität

A. Vereinfachende Voraussetzungen. Um die Regularität der schwachen Lösung von (4) zu untersuchen, nehmen wir an, daß nach Lokalisierung und Koordinatentransformation die folgende Situation vorliegen möge: $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$; $\partial\Omega = \bar{\Gamma} \cup \Gamma'$ ($\Gamma, \Gamma' \neq \emptyset$), $\Gamma = \text{int} \{x \in \partial\Omega \mid x_n = 0\}$, $\Gamma' = \{x \in \partial\Omega \mid x_n > 0\}$. Ferner gelte $0 \in \Gamma$, $U := \{x \in \Gamma \mid |x| < 1\} \subset \subset \Gamma$, und der Abschluß von $B_1^+(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1, x_n \geq 0\}$ sei in $\Omega \cup \Gamma$ enthalten. (Vgl. GLAQUINTA und MODICA [7: S. 200f.])

B. Umformung des Problems. Es sei jetzt $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega) \cap C_{\text{loc}}^{1+\alpha}(\Gamma)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Dann ist auch $g_i := g \cdot n_i \in W^{1/2,2}(\partial\Omega) \cap C_{\text{loc}}^{1+\alpha}(\Gamma)$ für $i = 1, \dots, n$. Gemäß GILBARG und TRUDINGER [8: Lemma 6.38/S. 137] und KUFNER et al. [11: Th. 6.9.2/S. 341] setzen wir g_i auf Ω so fort, daß für die fortgesetzten Funktionen \bar{g}_i

$$\bar{g}_i \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\overline{B_1^+(0)}) \tag{9}$$

gilt. Die verallgemeinerte Problemstellung (7) aus dem Beweis von Satz 2.2 kann nun umgeschrieben werden in

$$\int_{\partial} [a_{ij}^{\alpha\beta}(x) \partial_\beta u^j + a_i^\alpha(x)] \partial_\alpha \zeta^i dx = \int_{\partial} f_i \zeta^i dx \tag{10}$$

für alle $\zeta \in W$ mit $a_i^\alpha := -a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\beta \bar{g}_j^i \in L_2(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{B_1^+(0)})$; das ist der Typ von Gleichungen, wie sie GLAQUINTA und MODICA [7: S. 202ff.] unter Neumannschen Randbedingungen behandeln. Im Beweis von Satz 2.2 hatten wir

$$\Phi = u - \bar{g} \tag{11}$$

gesetzt, so daß es ausreicht, die Regularität von u zu untersuchen.

C. Regularitätsaussage. Unter obigen Voraussetzungen gilt folgender

Satz 3.1: Sei $a_{ij}^{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\alpha(\overline{B_1^+(0)})$, $a_i^\alpha \in L_2(\Omega) \cap C^\alpha(\overline{B_1^+(0)})$ ($i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n$), $f \in L_q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $q > n$. Ist dann u Lösung von (10), so gilt die Inklusion $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap C^{1+\bar{\alpha}}(\overline{B_{1/2}^+(0)}, \mathbb{R}^n)$ mit $\bar{\alpha} = \min(\alpha, 1 - (n/q))$.

Beweis: Ist $\Omega' \subset\subset \text{int } B_{1/2}^+(0)$, so ist die Regularität von u in Ω' nach GLIAQUINTA und MODICA [7: Teil 1] klar. Für den Beweis in der Nähe des Randteils Γ brauchen wir einige Vorbereitungen.

D. Wachstumsungleichungen. Wir setzen

$$\varphi(r; u) = \int_{B_r^+(x_0)} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} |\nabla u^j - (\nabla u^j)_{B_r^+}|^2 + |\partial_n u^n - (\partial_n u^n)_{B_r^+}|^2 + \sum_{s=1}^{n-1} |\partial_s u^n|^2 \right\} dx.$$

Lemma 3.2: Sei u Lösung von (10). Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, die nur von der Elliptizitätskonstante c_0 des Systems (vgl. Abschnitt. 2) und von $L = \sup \{|a_{ij}^{\alpha\beta}(x)| \mid x \in \bar{\Omega}; i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n\}$ abhängt, so daß für alle $x_0 \in U$ und alle r, R mit $0 \leq r \leq R \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega' - U)$

$$(i) \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq c[(r/R)^n + \omega^2(R)] \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx + c \int_{B_R^+(x_0)} (|a|^2 + R^2|f|^2) dx, \quad (12)$$

$$(ii) \varphi(r; u) \leq c \left\{ (r/R)^{n+2} \varphi(R; u) + \omega^2(R) \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx \right\} + c \int_{B_R^+(x_0)} (|a - (a)_{B_R^+}|^2 + R^2|f|^2) dx \quad (13)$$

mit

$$\omega(R) = \sup \{|a_{ij}^{\alpha\beta}(x) - a_{ij}^{\alpha\beta}(x_0)| \mid x \in B_R^+(x_0); i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n\}.$$

gilt. Hierbei bedeute

$$\nabla u = (\partial_\beta u^j), \quad |\nabla u|^2 = \sum_{j,\beta} |\partial_\beta u^j|^2, \quad a = (a_i^\alpha), \quad |a|^2 = \sum_{i,\alpha} |a_i^\alpha|^2,$$

$$(h)_{B_R^+} = |B_R^+(x_0)|^{-1} \int_{B_R^+(x_0)} h(x) dx \quad \text{für } h \in L_1(B_R^+(x_0)).$$

Beweis: a) Wir stellen auf $B_R^+(x_0)$ ein gemischtes Randwertproblem in der schwachen Form: Man finde $v \in W^{1,2}(B_R^+(x_0), \mathbb{R}^n)$, so daß

$$v - u|_{B_R^+(x_0)} \in Y, \quad \int_{B_R^+(x_0)} [a_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_\beta v^j + (a_i^\alpha)_{B_R^+}] \partial_\alpha \varphi^i dx = 0 \quad (14)$$

für alle $\varphi \in Y$ gilt. Hierbei setzen wir

$$Y = \{\varphi \in W^{1,2}(B_R^+(x_0), \mathbb{R}^n) \mid \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma_R', \varphi^n = 0 \text{ auf } \Gamma_R\},$$

und es sei $\Gamma_R = \partial B_R^+(x_0) \cap \{x = (x', x_n) \mid x_n = 0\}$ und $\Gamma_R' = \partial B_R^+(x_0) \cap \{x \mid x_n > 0\}$ der „untere“ bzw. „obere“ Randteil der Halbkugel $B_R^+(x_0)$. Die Existenz genau einer Lösung von (14) folgt aus dem Theorem von Milgram-Lax, da die Bilinearform

$$(\varphi, \zeta) \mapsto a_{R,x_0}(\varphi, \zeta) := \int_{B_R^+(x_0)} a_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_\beta \varphi^j \partial_\alpha \zeta^i dx$$

auf Y koerzitiv ist, d. h., es gibt ein $c_1 > 0$ mit

$$a_{R,x_0}(\varphi, \varphi) \geq c_1 \|\varphi\|_Y^2 \text{ für alle } \varphi \in Y. \quad (15)$$

(Vgl. NEČAS und HLAVAČEK [14: Kap. 6, Thm. 3.5/S. 85; Kap. 7, Lemma 2.1/S. 91] für $n = 3$; der Fall $n > 3$ ist analog: FICHERA [5: Teil 1, Kap. 12].)

b) Wir definieren $w \in W^{1,2}(B_R^+(x_0), \mathbb{R}^n)$ durch $w = u - v$. Aus den Campanato-Ungleichungen (29), (30) von Lemma 3.6 folgt

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx &\leq 2 \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx + 2 \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla w|^2 dx \\ &\leq c \left\{ (r/R)^n \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx + \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla w|^2 dx \right\} \\ &\leq c \left\{ (r/R)^n \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx + \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla w|^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

sowie analog

$$\varphi(r; u) \leq c(r/R)^{n+2} \varphi(R; u) + \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla w|^2 dx. \quad (17)$$

Zum Beweis von (i), (ii) brauchen wir noch eine Abschätzung für den „ w -Term“ hierin. Es gilt nach (10) und (14)

$$\begin{aligned} &\int_{B_R^+(x_0)} a_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) \partial_\beta w^i \partial_\alpha \varphi^j dx \\ &= \int_{B_R^+(x_0)} [(a_{ij}^{\alpha\beta}(x_0) - a_{ij}^{\alpha\beta}(x)) \partial_\beta w^i - (a_i^\alpha(x) - (a_i^\alpha)_{B_R^+})] \partial_\alpha \varphi^i dx + \int_{B_R^+(x_0)} f_i \varphi^i dx \end{aligned} \quad (18)$$

für alle $\varphi \in Y$. Aus (15) folgt

$$a_{R,x_0}(\varphi; \varphi) \geq c_1 \|\nabla \varphi\|_{L^2(B_R^+(x_0))}^2. \quad (19)$$

Durch Skalentransformation sieht man, daß die Konstante c_1 hierin nicht von R abhängt. Wir setzen nun $\varphi := w \in Y$ in (18) ein und erhalten mit Hilfe von (19)

$$\begin{aligned} \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla w|^2 dx &\leq c \left\{ \omega^2(R) \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_R^+(x_0)} |a_i^\alpha - (a_i^\alpha)_{B_R^+}|^2 dx + R^2 \int_{B_R^+(x_0)} |f|^2 dx \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Aus (16), (17) und (20) folgen die Behauptungen des Lemmas ■

E. Weiterführung des Beweises von Satz 3.1. a) Aus Lemma 3.2/(i) und den Voraussetzungen von Satz 3.1 folgt

$$\int_{B_r^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq c[(r/R)^n + R^{2\alpha}] \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx + BR^n$$

für alle $x_0 \in U$ und alle r, R mit $0 \leq r \leq R \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega - U)$, wobei B von $\|a\|_{L^\infty}$ und $\|f\|_{L^q}$ abhängt. Insbesondere gilt dann nach GIACUENTA und MODICA [7: Lemma 0.6]

$$\int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx \leq c r^{n-2\epsilon} \left(R^{-n+2\epsilon} \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla u|^2 dx + B \right), \quad (21)$$

falls $R \leq R_0$ ist bei beliebigem, aber festem $\epsilon > 0$.

b) Aus Lemma 3.2/(ii), (21) und den Voraussetzungen von Satz 3.1 erhalten wir für $R \leq R_0$

$$\varphi(r; u) \leq c(r/R)^{n+2} \varphi(R; u) + c_1 R^{n+2\alpha-2\epsilon} \quad (22)$$

mit

$$c_1 = c(R_0^{-n+2\bar{\alpha}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + B + \|a\|_{C^{\alpha}(\overline{B_1^+(0)})}^2 + \|f\|_{L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2).$$

Wiederum gilt nach GIAQUINTA und MODICA [7: Lemma 0.6]

$$\varphi(r; u) \leq c_2 r^{n+2(\bar{\alpha}-\epsilon)} \{R^{-n-2(\bar{\alpha}-\epsilon)} \varphi(R; u) + c_1\}, \tag{23}$$

wobei c_2 eine nur von c , n und dem Exponenten $(\bar{\alpha} - \epsilon)$ abhängige Zahl ist und $0 \leq r \leq R \leq R_0$ vorausgesetzt wird. Man beachte, daß

$$\int_{B_r^+(x_0)} |\partial_s u^n - (\partial_s u^n)_{B_r^+}|^2 dx \leq \int_{B_r^+(x_0)} |\partial_s u^n|^2 dx$$

gilt ($s = 1, \dots, n - 1$). Damit ist dann

$$\int_{B_r^+(x_0)} |\nabla u - (\nabla u)_{B_r^+}|^2 dx \leq \varphi(r; u),$$

und es folgt aus (23) unter Verwendung der Überlegungen von GIAQUINTA und MODICA [7: S. 209f.], daß $\partial_{\beta} u^j \in C^{\bar{\alpha}-\epsilon}(\overline{B_{1/2}^+(0)})$ gilt. Insbesondere ist ∇u beschränkt, d. h., die Ungleichungen (22) und (23) gelten weiter, wenn man in ihnen formal $\epsilon = 0$ setzt. Somit ist $\partial_{\beta} u^j \in C^{\bar{\alpha}}(\overline{B_{1/2}^+(0)})$ wie behauptet ($j, \beta = 1, \dots, n$).

F. Campanato-Ungleichungen: Wir zeigen nun die bereits im Beweis von Lemma 3.2 verwendeten Campanato-Ungleichungen. Zur Vereinfachung nehmen wir $B_1^+(0)$ (genauer genommen $\text{int } B_1^+(0)$) als Grundgebiet an. Wir setzen voraus, daß $v \in W^{1,2}(B_1^+(0), \mathbb{R}^n)$ mit $v|_{\Gamma_1} = 0$ eine Lösung von

$$\int_{B_1^+(0)} [a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\beta} v^j + a_i^{\alpha}] \partial_{\alpha} \varphi^i dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in Y \tag{24}$$

ist. Dabei sei

$$Y = \{\varphi \in W^{1,2}(B_1^+(0), \mathbb{R}^n) \mid \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma_1', \varphi^n = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}.$$

(Hinsichtlich der Bezeichnung Γ_1, Γ_1' vgl. Abschnitt D). Wir nehmen hier an, daß die Koeffizienten $a_{ij}^{\alpha\beta}$ ($i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n$) konstant sind und die Voraussetzungen der Symmetrie und der Elliptizität aus Abschnitt 2 erfüllen. Ferner sei $a_i^{\alpha} \in L_2(B_1^+(0))$ ($i, \alpha = 1, \dots, n$). Wir beginnen mit einer Abschätzung des Gradienten ∇v gegen die Lösung v .

Lemma 3.3 (Caccioppoli-Ungleichung): *Es gibt ein nur von den Koeffizienten abhängiges $c > 0$, so daß für die Lösung v von (24) und beliebige $x_0 \in \Gamma_1, R \leq \text{dist}(x_0, \Gamma_1')$*

$$\int_{B_{R/2}^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx \leq c \left\{ R^{-2} \int_{B_R^+(x_0)} |v|^2 dx + \int_{B_R^+(x_0)} |a|^2 dx \right\}. \tag{25}$$

gilt.

Beweis: Man setzt $\varphi := v\eta^2 \in Y$ in (24) ein. Hierbei sei $\eta \in C_0^{\infty}(B_R(x_0))$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf $B_{R/2}(x_0)$ sowie $|\nabla \eta| \leq c/R$. Standardüberlegungen liefern dann (25) unter Benutzung der Koerzitivitätseigenschaft (15) (vgl. GIAQUINTA [6: Kap. 3.2], GIAQUINTA und MODICA [7: S. 181, S. 203]) ■

Verschärft man die Voraussetzungen an a_i^α , so erhält man

Lemma 3.4 (Differenzierbarkeitseigenschaften):

(i) Sei v eine Lösung von (24) mit $a_i^\alpha \in W^{1,2}(B_1^+(0))$ für $i, \alpha = 1, \dots, n$. Dann ist $v \in W^{2,2}(B_{1/2}^+(0), \mathbb{R}^n)$, und für alle $x_0 \in \Gamma_1, R \leq \text{dist}(x_0, \Gamma_1')$ gilt

$$|v|_{2, B_{R/2}^+(x_0)} \leq c(R) \{|v|_{1, B_R^+(x_0)} + |a|_{1, B_R^+(x_0)}\}. \quad (26)$$

(Hierbei haben wir $|v|_{k, B_R^+(x_0)}^2 = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L_2(B_R^+(x_0))}^2$ gesetzt.)

(ii) Gilt sogar $a_i^\alpha \in W^{k+1}(B_1^+(0))$, dann ist $v \in W^{k+2}(B_{1/2}^+(0), \mathbb{R}^n)$ mit der Abschätzung

$$|v|_{k+2, B_{R/2}^+(x_0)} \leq c(k, R) \{|v|_{1, B_R^+(x_0)} + \|\nabla a\|_{W^{k,2}(B_R^+(x_0))}\}. \quad (27)$$

Beweis: (i): Mit dem Differenzenquotienten

$$(\nabla_{h,s} v)(x) = h^{-1}(v(x + he_s) - v(x)), \quad s = 1, \dots, n-1,$$

wobei $e_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der Einheitsvektor in x_s -Richtung sein soll, und der Abschneidefunktion η aus dem Beweis von Lemma 3.3 bilden, wir $\varphi := \nabla_{h,s}(\eta^2 \times \nabla_{h,s} v) \in Y$ für hinreichend kleines $h > 0$. Aus der Koerzitivitätseigenschaft (15) folgt dann mit der üblichen Abschätzungstechnik

$$\int_{B_{R/2}^+(x_0)} |\nabla(\nabla_{h,s} v)|^2 ds \leq c \left\{ R^{-2} \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx + \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla a|^2 dx \right\}.$$

Daher ist $\partial_s \partial_\alpha v \in L_2(B_{R/2}^+(x_0))$ für $s = 1, \dots, n-1$ und $\alpha = 1, \dots, n$; dabei ist die L_2 -Norm gegen die rechte Seite von (26) abschätzbar. Damit ergibt sich für $\partial_\alpha \partial_s v$ die Behauptung aus der der Gleichung (24) entsprechenden distributionellen Differentialgleichung $-\partial_\alpha(a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\beta v^j) + \partial_\alpha a_i^\alpha = 0$ in $B_1^+(0)$ und der Invertierbarkeit der Matrix $(a_{ij}^{\alpha\beta})$ (vgl. (2)). Der Beweis zu (ii) verläuft analog ■

Zusatz 3.5: Sind unter obigen Voraussetzungen die a_i^α sämtlich konstant, so gilt $|v|_{k, B_{R/2}^+(x_0)} \leq c(k, R) |v|_{1, B_R^+(x_0)}$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 3.6 (Campanato-Ungleichungen): Es sei v Lösung von (24).

(i) Es gelte $a_i^\alpha = 0$ für alle $i, \alpha = 1, \dots, n$. Dann gibt es ein nur von den Koeffizienten $a_{ij}^{\alpha\beta}$ des Systems abhängiges $c > 0$, so daß für alle $x_0 \in \Gamma_1, 0 \leq r \leq R \leq \text{dist}(x_0, \Gamma_1')$ gilt

$$\int_{B_r^+(x_0)} |v|^2 dx \leq c(r/R)^n \int_{B_R^+(x_0)} |v|^2 dx. \quad (28)$$

(ii) Sind die a_i^α ($i, \alpha = 1, \dots, n$) alle konstant, so gilt

$$\int_{B_r^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx \leq c(r/R)^n \int_{B_R^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx \quad (29)$$

sowie

$$\varphi(r; v) \leq c(r/R)^{n+2} \varphi(R; v). \quad (30)$$

Hierbei seien x_0, r, R wie in (i); $\varphi(r; v)$ war im Abschnitt D erklärt worden. Die Konstante c hängt von den Koeffizienten $a_{ij}^{\alpha\beta}$ mittelbar über die Elliptizitätskonstante c_0 und die in Lemma 3.2. erklärte Zahl $L = \sup |a_{ij}^{\alpha\beta}|$ ab, wie die genaue Durchsicht des Beweises zeigt.

Beweis: (i): Aus Zusatz 3.5 und der Caccioppoli-Ungleichung (Lemma 3.3) folgt

$$|v|_{k, B_{R/2}^+(x_0)}^2 \leq c(k, R) \int_{B_R^+(x_0)} |v|^2 dx \tag{31}$$

Wählt man nun $r < R/2$ und ein festes $k > n/2$, so gilt nach dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\int_{B_r^+(x_0)} |v|^2 dx \leq cr^n \sup_{B_{R/2}^+} |v|^2 \leq c(R) r^n \int_{B_R^+(x_0)} |v|^2 dx \tag{32}$$

Wir benutzen jetzt ein Dilatationsargument: Setze hier $x_0 := 0$ und $R := 1$, sowie $r := \varrho/R$ ($\varrho < R/2$). Es folgt dann

$$\int_{B_{\varrho/R}^+(0)} |v|^2 dx \leq c(1) (\varrho/R)^n \int_{B_1^+(0)} |v|^2 dx \tag{33}$$

für jede Lösung von (24). Wir setzen $z(x) := v(\lambda x)$ für $\lambda \in (0, 1)$. Dann gilt für z

$$\int_{B_{1/\lambda}^+(0)} a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\beta z^j(x) \partial_\alpha \tilde{\varphi}^i(x) dx = 0 \quad \text{für alle } \tilde{\varphi} \in Y_{1/\lambda} \tag{34}$$

mit

$$Y_{1/\lambda} = \{ \tilde{\varphi} \in W^{1,2}(B_{1/\lambda}^+(0), \mathbb{R}^n) \mid \tilde{\varphi} = 0 \text{ auf } \Gamma'_{1/\lambda}, \tilde{\varphi}^n = 0 \text{ auf } \Gamma_{1/\lambda} \}$$

Insbesondere gilt dies für alle wie folgt erklärten $\tilde{\varphi} \in Y_{1/\lambda}$:

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{auf } B_1^+(0), \\ 0 & \text{auf } B_{1/\lambda}^+(0) - B_1^+(0) \end{cases}$$

mit $\varphi \in Y$. Man erhält dann aus (33)

$$\int_{B_{\varrho/R}^+(0)} |z(x)|^2 dx \leq c(1) (\varrho/R)^n \int_{B_1^+(0)} |z(x)|^2 dx$$

Setzen wir $\lambda := R$, so ist $z(x) = v(Rx)$, und die Variablentransformation $y = Rx$ liefert

$$\int_{B_{\varrho/R}^+(0)} |v(y)|^2 dy \leq c(1) (\varrho/R)^n \int_{B_R^+(0)} |v(y)|^2 dy,$$

d. h., wir haben (28) mit $x_0 = 0$ und $r < R/2$. Für $R/2 \leq r \leq R$ ist (28) trivial erfüllbar. Analog zeigt man (28) für $x_0 \neq 0$.

(ii): Wie im Beweis zu (i) erhalten wir für $k > n/2$ und $r < R/2$ aus dem Zusatz 3.5 zunächst

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla v|^2 dx &\leq cr^n \sup_{B_{R/2}^+} |\nabla v|^2 \leq c(k, R) r^n \|\nabla v\|_{W^{k,1}(B_{R/2}^+(x_0))}^2 \\ &= c(k, R) r^n \sum_{j=1}^{k+1} |v|_{j, B_{R/2}^+(x_0)}^2 \leq c_1(k, R) r^n |v|_{1, B_R^+(x_0)}^2 \end{aligned} \tag{35}$$

Das oben benutzte Dilatationsargument liefert dann zusammen mit (35) die Formel (29).

Um (30) zu zeigen, setzen wir für $j = 1, \dots, n - 1$

$$p^j(x) = \sum_{\beta=1}^n x^\beta (\partial_\beta v^j)_{B_R^+} \quad \text{und} \quad p^n(x) = x^n (\partial_n v^n)_{B_R^+}$$

(vgl. hierzu auch GIAQUINTA und MODICA [7: S. 206]). Es ist $p|_{r_1} = 0$, und $(v - p)$ erfüllt eine Integralidentität „vom Typ (24)“, was man unter Benutzung der Tatsache, daß v die Gleichung (24) erfüllt, sofort nachrechnet:

$$\int_{B_1^+(0)} \left\{ a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\beta (v - p)^j + \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}^{\alpha\beta} (\partial_\beta v^j)_{B_{R^+}} + a_{in}^{\alpha n} (\partial_n v^n)_{B_{R^+}} + a_i^\alpha \right] \partial_\alpha \varphi^i \right\} dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in Y. \quad (36)$$

Es sei $r < R/2$. Auf Grund der Poincaréschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \varphi(r; v) &= \int_{B_r^+(x_0)} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} |\nabla v^j - (\nabla v^j)_{B_r^+}|^2 + |\partial_n v^n - (\partial_n v^n)_{B_r^+}|^2 + \sum_{s=1}^{n-1} |\partial_s v^n|^2 \right\} dx \\ &\leq cr^2 \int_{B_r^+(x_0)} |\nabla^2 v|^2 dx \leq cr^{n+2} \sup_{B_{R/2}^+(x_0)} |\nabla^2 (v - p)|^2. \end{aligned}$$

Wegen (36) und Zusatz 3.5 ist $|v - p|_{k, B_{R/2}^+(x_0)} \leq c(k, R) |v - p|_{1, B_{R^+}(x_0)}$. Für festes $k > 2 + (n/2)$ und für $r < R/2$ ist somit

$$\begin{aligned} \varphi(r; v) &\leq c(R) r^{n+2} |v - p|_{1, B_{R^+}}^2 \\ &= c(R) r^{n+2} \int_{B_{R^+}(x_0)} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} |\nabla v^j - (\nabla v^j)_{B_{R^+}}|^2 \right. \\ &\quad \left. + |\partial_n v^n - (\partial_n v^n)_{B_{R^+}}|^2 + \sum_{s=1}^{n-1} |\partial_s v^n|^2 \right\} dx = c(R) r^{n+2} \varphi(R; v). \end{aligned}$$

Das Dilatationsargument des Beweises von (i) liefert auch hier die Behauptung (d. h. (30)), wenn man noch die — allerdings völlig trivialen — Umrechnungen von $(f)_{B_{R^+}}$ bei der Variablentransformation $y = Rx$ berücksichtigt ■

LITERATUR

- [1] AGMON, S., DOUGLIS, A., and L. NIRENBERG: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions (II). *Comm. Pure Appl. Math.* **17** (1964), 35—92.
- [2] AUBIN, J. P.: *Approximation of Elliptic Boundary Value Problems*. New York: Wiley-Interscience 1972.
- [3] BECKERT, H.: Über die klassischen Randwertaufgaben in der Theorie der Wärmespannungen in stückweise stetigen, anisotropen Körpern unter Kopplungsbedingungen. *ZAMM* **52** (1972), 111—122.
- [4] CAMPANATO, S.: Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi $L^{2,1}$. *Ann. Mat. Pura Appl.* **69** (1965), 321—380.
- [5] FICHERA, G.: Existence theorems in elasticity. Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints. In: *Handbuch der Physik*, Vol. VIa/2 (Ed.: S. Flügge). Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1972.
- [6] GIAQUINTA, M.: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*. Princeton: Princeton University Press 1983.
- [7] GIAQUINTA, M., and G. MODICA: Non-linear systems of the type of the stationary Navier-Stokes system. *J. Reine Angew. Math.* **330** (1982), 173—214.
- [8] GILBARG, D., and N. TRUDINGER: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2nd ed. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag 1983.

- [9] JENTSCH, L.: Zur Existenz von regulären Lösungen der Elastostatik stückweise homogener Körper mit neuen Kontaktbedingungen an den Trennflächen zwischen zwei homogenen Teilen (Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Klasse: Bd. 53, Heft. 2). Berlin: Akademie-Verlag 1977.
- [10] KINDERLEHRER, D.: Remarks about Signorini's problem in linear elasticity. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 8 (1981), 605—645.
- [11] KUFNER, A., JOHN, O., and S. FUČIK: Function Spaces. Prague: Academia 1977.
- [12] KUPRADZE, V. D., GEGELIA, T. G., BAŠELEIŠVILI, M. O., and T. V. BURČULADZE: Three-Dimensional Problems in Mathematical Elasticity and Thermoelasticity. Amsterdam—New York: North-Holland 1979.
- [13] MAUL, J.: Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik (Schriftenreihe Zentralinst. Math. Mech. Akad. Wiss.: Heft 24). Berlin: Akademie-Verlag 1976.
- [14] NEČAS, J., and I. HLAVÁČEK: Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies. Amsterdam—Oxford—New York: Elsevier Sci. Publ. Comp., and Prague: Státní Nakl. Techn. Lit. (SNTL) 1981.
- [15] SCHUMANN, R.: Regularity for Signorini's problem in linear elasticity. Man. Math. 63 (1989), 255—291.
- [16] TRIEBEL, H.: Theory of Function Spaces. Leipzig: Akadem. Verlagsges. Geest & Portig, und Basel: Birkhäuser-Verlag 1983.
- [17] WLOKA, J.: Partielle Differentialgleichungen. Sobolevräume und Randwertaufgaben. Stuttgart: B. G. Teubner 1982.
- [18] ZEIDLER, E.: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Vol. I—IV. New York—Berlin—Heidelberg—Tokyo: Springer-Verlag 1985—1990.

Manuskripteingang: 16. 08. 1988; in revidierter Fassung 30. 06. 1989

VERFASSER

Dr. RAINER SCHUMANN
Sektion Mathematik der Universität
Augustusplatz 10
O-7010 Leipzig