Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (5) 1990, S. 473–475

Ein Fixpunktsatz für mehrdeutige konvexe Abbildungen auf der Sphäre

H. Beckert

In memoriam Dozent Dr. Johannes Maul[1])

Der bekannte Brouwer-Poincarésche Fixpunktsatz wird auf oberhalbstetige mehrdeutige Abbildungen der Sphäre S^{n-1} (n ungerade) auf konvexe Bildgebiete von S^{n-1} verallgemeinert.

Известная теорема Брауэра-Пуанкаре о неподвижной точке обобщается на полунепрерывные сверху многозначные отображения сферы S^{n-1} (n—нечётное) на выпуклые области в S^{n-1}.

The well-known fixed point theorem of Brouwer-Poincaré is generalized for upper semicontinuous multivalued mappings of the sphere S^{n-1} (n odd) on convex domains of S^{n-1}.

Der bekannte Abbildungssatz von Kakutani [5] verallgemeinert den Fixpunktsatz von Brouwer über stetige Selbstabbildungen einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ auf oberhalbstetige mehrwertige Abbildungen von K auf konvexe Bildmengen (vgl. noch [2, 3, 6]). Wir wollen in dieser Note zeigen, daß man analog auch den Satz von Brouwer-Poincaré [1], wonach jede stetige Selbstabbildung F der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre S^{n-1} des Euklidischen Raumes $\mathbb{E}^n$ (n ungerade) einen Fixpunkt oder antipodalen Fixpunkt x_0 besitzt (d. h. $F(x_0) = x_0$ oder $F(x_0) = -x_0$), auf oberhalbstetige mehrdeutige Abbildungen von S^{n-1} auf konvexe Bildmengen von S^{n-1} ausdehnen kann.

Das Studium mehrwertiger Selbstabbildungen auf Sphären setzt elementare Beispiele von fixpunktlosen mehrwertigen Abbildungen in Evidenz. Ist z. B. $F(x)$ der Großkreis $S^{n-1} \cap \mathbb{E}^{n-1}$, der von dem Unterraum $\mathbb{E}^{n-1}$ mit $\mathbb{E}^{n-1} \perp \overrightarrow{Ox}$ aus S^{n-1} ausgeschnitten wird, und bewegt man x in dieser festen Konfiguration auf S^{n-1}, so erhält man offenbar dabei eine oberhalbstetige, fixpunktlose Abbildung $x \to F(x)$. Dasselbe trifft zu, wenn $F(x)$ aus der Ringfläche besteht, welche zwei zu $\mathbb{E}^{n-1}$ parallele Hyperebenen E_1^{n-1} und E_2^{n-1} ausschneiden, oder wenn $F(x)$ aus der im Urbildpunkt x punktierten Kugelkappe besteht, welche etwa E_1^{n-1} ausschneidet. In diesen Fällen sind die Bildmengen nicht azyklisch, bekanntlich sind hier im allgemeinen nur unter zusätzlichen Annahmen Fixpunkte zu erwarten.

Es sei also $F: S^{n-1} \to S^{n-1}$ (n ungerade) eine mehrwertige Abbildung, P der Operator der Zentralprojektion vom Ursprung O aus auf S^{n-1} und P_K ein aus Projektionsstrahlen gebildeter Projektionskegel. Diesen werden wir *spitz* nennen, wenn

$$\sup \{\operatorname{arc}(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in P_K \cap S^{n-1}\} =: \alpha < \pi \tag{1}$$

gilt. Wir formulieren nun die beiden folgenden Bedingungen:

(A) *Oberhalbstetigkeit*: Aus $x_n \to x_0$, $y_n \in F(x_n)$ und $y_n \to y_0$ folgt $y_0 \in F(x_0)$.

(B) *Konvexität*: Jede Bildmenge $F(x)$ wird innerhalb eines spitzen Kegelausschnittes $P_K(x) \cap S^{n-1}$ von O aus gesehen.

[1]) Siehe die Fußnote auf S. 433.

Aus (B) folgt, daß alle $(n'-1)$-dimensionalen Simplexe $s^{n'-1} = (y^1, \ldots, y^{n'})$, $n' \leqq n$, mit $y^1, \ldots, y^{n'} \in F(x)$ durch P eineindeutig in $F(x)$ abgebildet werden (offenbar genügt es, dies nur für alle 2-dimensionalen Simplexe zu verlangen).

Die Bedingungen (A) und (B) reichen für unseren Nachweis von Fixpunkten auf S^{n-1} allein nicht aus. Es wird deshalb noch von der folgenden Bedingung (C′) Gebrauch gemacht, welche jedoch, wie im Anschluß gezeigt wird, durch die natürlichere Bedingung (C) ersetzt werden kann.

(C′) Für alle $x \in S^{n-1}$ existiert eine von x unabhängige Umgebung U derart, daß die Bilder $F(x)$, $x \in U$, jeweils innerhalb spitzer Kegel $P_K(x)$ liegen.

Wir zeigen jetzt, daß (C′) gilt, wenn außer (A) und (B) nur noch die folgende schwächere Bedingung (C) erfüllt wird.

(C) Es existiert eine Zahl $\alpha_0 < \pi$, so daß $F(x) \subset P_K(x) \cap S^{n-1}$ mit $\sup\{\operatorname{arc}(z_1, z_2): z_1, z_2 \in P_K(x) \cap S^{n-1}\} \leqq \alpha_0$ für alle x gilt.

In der Tat, wäre bei Gültigkeit von (A)—(C) die Eigenschaft (C′) nicht erfüllt, so existierten Folgen von Punkten x_1^m, x_2^m und Umgebungen $U^m \ni x_1^m, x_2^m$, $\operatorname{diam} U^m \to 0$, auf S^{n-1} und Folgen von zugehörigen Bildpunkten $y_1^m \in F(x_1^m)$, $y_2^m \in F(x_2^m)$ mit $\operatorname{arc}(y_1^m, y_2^m) > \alpha_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fest. Nach geeigneter Auswahl gilt $x_1^m, x_2^m \to x_0$ und $y_1^m \to y_1$, $y_2^m \to y_2$ mit $\operatorname{arc}(y_1, y_2) \geqq \alpha_0 + \varepsilon$. Aus (A) folgt dann $y_1, y_2 \in F(x_0)$, im Widerspruch zu (C).

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den folgenden

Satz: *Jede mehrdeutige Abbildung $x \to F(x)$ der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre S^{n-1} (n ungerade) besitzt unter den Bedingungen* (A)—(C) *die Fixpunkteigenschaft, d. h., es existiert ein $x_0 \in S^{n-1}$ mit $x_0 \in F(x_0)$ oder $-x_0 \in F(x_0)$.*

Beweis: In bekannter Weise konstruieren wir eine simpliziale Zerlegungsfolge von einbeschriebenen Polyederfolgen J_m über baryzentrische Verfeinerungen mit nachfolgenden Projektionen der Simplexeckpunkte vermöge P auf S^{n-1}. Dabei werde die Zerlegung von J_m so fein gewählt, daß jedes $(n-1)$-dimensionale Simplex von J_m gemäß (C′) im Innern einer Umgebung des Typs U liegt. Die Zentralprojektion P von J_m auf S^{n-1} führt auf eine krummlinige simpliziale Zerlegungsfolge $\tilde{J}_m$ von S^{n-1}. Es werde jetzt auf J_m eine simpliziale Abbildung konstruiert, indem wir $F_m(x^i) = y_m^i$ in einem beliebigen Simplex $(x^1, \ldots, x^n) \in J_m$ mit beliebigen $y_m^i \in F(x^i)$ setzen. Nach bekannter simplizialer Interpolation erhalten wir weiter eine simpliziale Abbildung $PF_m: S^{n-1} \to S^{n-1}$, indem wir die Simplexe $(x^1, \ldots, x^n)$ mit Hilfe von P auf S^{n-1} und ebenfalls die Bildsimplexe $(y_m^1, \ldots, y_m^n)$ auf S^{n-1} projizieren, also

$$PF_m(x) = P(\textstyle\sum_i \lambda_i x^i) \to P(\sum_i \lambda_i y_m^i) \tag{2}$$

für $x = \sum_i \lambda_i x^i$ mit $\lambda_i \geqq 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$ setzen. Nach dem Satz von Brouwer-Poincaré existiert mindestens ein Punkt $x_m^0 \in S^{n-1}$, für den $x_m^0 = PF_m(x_m^0)$ oder $-x_m^0 = PF_m(x_m^0)$ gilt. Er liege auf dem Trägersimplex $P(\tilde{x}_m^1, \ldots, \tilde{x}_m^n) \subset \tilde{J}_m$, nach (2) gelte also $x_m^0 = P(\sum_i \lambda_i^m \tilde{x}_m^i)$, mit $\lambda_i^m \geqq 0$ und $\sum_i \lambda_i^m = 1$ und wegen der Simplizialität (2)

$$\pm x_m^0 = P(\textstyle\sum_i \lambda_i^m \tilde{y}_m^i) \quad \text{mit} \quad \tilde{y}_m^i = F_m(\tilde{x}_m^i) \in F(\tilde{x}_m^i). \tag{3}$$

Unter Beachtung der Kompaktheit von S^{n-1} folgen für laufende Verfeinerungen die Konvergenzen $x_m^0 \to x^0$ und $\tilde{x}_m^i \to x^0$, $\lambda_i^m \to \lambda_i$, $\tilde{y}_m^i \to y^i$ $(i = 1, \ldots, n)$, woraus nach (A) folgt $y^i \in F(x^0)$. Offenbar kann man $m \to \infty$ so wählen, daß in (B) stets dasselbe Vorzeichen auftritt, also nach dem Grenzübergang $x^0 = P(\sum_i \lambda_i y^i)$ oder $-x^0 = P(\sum_i \lambda_i y^i)$ gilt. Aus (B) und $y^i \in F(x^0)$ folgt dann $x^0 \in F(x^0)$ oder $-x^0 \in F(x^0)$ ∎

LITERATUR

[1] ALEXANDROFF, P., und H. HOPF: Topologie. Berlin: Springer 1935.
[2] BEGLE, E.: The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces. Ann. Math. 51 (1950), 534–543.
[3] BROWDER, F. E.: The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces. Math. Ann. 177 (1968), 283–301.
[4] EISENACK, G., und C. FENSKE: Fixpunkttheorie. Zürich: Bibl. Inst. 1978.
[5] KAKUTANI, S.: A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J. 8 (1941), 171–180.
[6] NEILL, O.: Induced homology homomorphism for set valued maps. Pac. J. Math. 7 (1957), 1179–1184.
[7] ZEIDLER, E: Functional Analysis and Its Applications. I: Fixed Point Theorems. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer-Verlag 1985.

Manuskripteingang: 30. 09. 1988

VERFASSER

Prof. Dr. HERBERT BECKERT
Raschwitzer Str. 12
O-7113 Leipzig