Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (5) 1990, S. 477–480

Ein Fixpunktsatz für mehrdeutige nichtazyklische Abbildungen auf der Sphäre

H. Beckert

In memoriam Prof. Dr. Hans Schubert

Wir betrachten die nichtazyklische mehrdeutige Abbildung $x \to T^s(x)$ $(0 \leqq s \leqq n-2)$ der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ auf die Großkugeln $T^s(x) = S^{n-1} \cap \mathbb{E}^{s+1}(x)$ und beweisen die Existenz von Fixpunkten $x_0 \in T^s(x_0)$, falls jeder Punkt $\varphi_0 \in T^s(x)$ für alle t mit $\|t\| \leqq \delta(x)$ Nachbarpunkte $\varphi_0 + t_1^+ \in T^s(x+t)$ mit $\|t_1^+\| < \|t\|$ besitzt.

Мы рассматриваем нeацикличеcкие многозначные отображения $x \to T^s(x)$ $(0 \leqq s \leqq n-2)$ $(n-1)$-мерной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ на шары $T^s(x) = S^{n-1} \cap \mathbb{E}^{s+1}(x)$ и доказываем существование неподвижных точек $x_0 \in T^s(x_0)$ в случае, если каждая точка $\varphi_0 \in T^s(x)$ для всех t с $\|t\| \leqq \delta(x)$ имеет соседние точки $\varphi_0 + t_1^+ \in T^s(x+t)$ с $\|t_1^+\| < \|t\|$.

We consider the non-acyclic multi-valued mapping $x \to T^s(x)$ $(0 \leqq s \leqq n-2)$ of the $(n-1)$-dimensional sphere $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ on balls $T^s(x) = S^{n-1} \cap \mathbb{E}^{s+1}(x)$ and prove the existence of fixed points $x_0 \in T^s(x_0)$ under the condition that for arbitrary $\varphi_0 \in T^s(x)$ and all t with $\|t\| \leqq \delta(x)$ we can find points $\varphi_0 + t_1^+ \in T^s(x+t)$ with $\|t_1^+\| < \|t\|$.

In der Theorie mehrdeutiger Abbildungen sind allgemeine Sätze über Fixpunkte aus zahlreichen Arbeiten wohlbekannt, wenn die Bildmengen azyklisch sind, vgl. z. B. [1–8]. Wie einfache Gegenbeispiele zeigen, besitzen mehrdeutige Abbildungen auf nichtazyklische Bildmengen ohne weitere zusätzliche Annahmen keine Fixpunkte. Elementare Beispiele gewinnt man am einfachsten bei mehrdeutigen Abbildungen der Sphäre S^{n-1}, vgl. [1].

Von Interesse für unsere Untersuchung ist die oberhalbstetige fixpunktlose Abbildung $x \to T(x)$, $x \in S^{n-1}$, bei der $T(x) = S^{n-1} \cap \mathbb{E}^{n-1}(x)$ mit $\mathbb{E}^{n-1}(x) \perp \overrightarrow{Ox}$, Tx also die Großkugel ist, die der Unterraum $\mathbb{E}^{n-1}(x)$ aus S^{n-1} ausschneidet. Wir betrachten diese in zwei Punkten $x_1, x_2 \in S^{n-1}$. Durchlaufen y_1, y_2 die Schnittkugeln $T(x_1)$, (Tx_2) und setzt man $d = \max_{y_1} \min_{y_2} \|y_1 - y_2\|$, dann erfüllt die fixpunktlose Abbildung $x \to T(x)$ offenbar $\|x_1 - x_2\| = d$. Wir wollen jetzt zeigen, daß bei dieser Klasse von Abbildungen stets Fixpunkte existieren, wenn stattdessen $\|x_1 - x_2\| > d$ gilt.

Bezeichne also jetzt K_1^n die n-dimensionale Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung O und $x \to F(x)$ eine mehrdeutige Abbildung über K_1^n, welche jedem $x \in K_1^n$ einen $(s+1)$-dimensionalen Teilraum $F(x) = \mathbb{E}^{s+1}(x)$ $(0 \leqq s \leqq n-2)$ zuordnet, der die Sphäre $S^{n-1} = \partial K_1^n$ in $T^s(x) = S^{n-1} \cap \mathbb{E}^{s+1}(x)$ schneidet. Wir betrachten die hierdurch definierte mehrdeutige Abbildung $x \to T^s(x)$, $x \in S^{n-1}$, unter der folgenden Voraussetzung:

(V) Jeder Punkt $\varphi \in T^s(x)$ besitzt für alle hinreichend kleinen Verschiebungen t, $\|t\| < \delta(x)$, mindestens einen Nachbarpunkt $\varphi + t_1^+ \in T^s(x+t)$ mit $\|t_1^+\| < \|t\|$.

Die Funktion $\delta = \delta(x)$ braucht hierbei nicht nach unten beschränkt zu sein. Es gilt dann der folgende

Satz 1: *Unter der Voraussetzung* (V) *besitzt die Abbildung* $x \to T^s(x)$ *mindestens einen Fixpunkt, d. h. einen Punkt* $x_0 \in S^{n-1} \cap T^s(x_0)$.

Beweis: Sei x_0 Lösung des Minimumproblems

$$\mathrm{Min}_{S^{n-1}} \operatorname{dist}\big(x, F(x)\big) = \operatorname{dist}\big(x_0, \mathbb{E}^{s+1}(x_0)\big) = d, \tag{1}$$

die auf Grund der Kompaktheit von S^{n-1} einerseits und den aus (V) folgenden Stetigkeitsaussagen von $F(\cdot)$ andererseits existiert. P_0 bezeichne den Fußpunkt des Lotes von x_0 auf $\mathbb{E}^{s+1}(x_0)$ und φ_0 den Schnittpunkt $\overrightarrow{OP_0} \cap S^{n-1}$ (vgl. Fig. 1). Wir variieren jetzt die Abbildung $x \to F(x)$ in x_0 in der von φ_0 und x_0 aufgespannten Projektionsebene $\mathbb{E}^2$ (im Fall $x_0 \perp \mathbb{E}^{s+1}(x_0)$ wähle man $\varphi_0 \in \mathbb{E}^{s+1}(x_0)$ beliebig) und setzen $x_0 + t = h \in S^{n-1} \cup \mathbb{E}^2$. Nach (V) existiert ein Punkt $\varphi_0 + t_1^+ \in F(h) \cap S^{n-1}$ mit $\|t_1^+\| < \|t\|$. Seien $\varphi_0 + t_1$, $\varphi_0 + t_1' \in S^{n-1} \cap \mathbb{E}^2$ die beiden Punkte, welche von φ_0 den gleichen Abstand $\|t_1^+\| = \|t_1\| = \|t_1'\|$ haben und $s_1 h$ $(s_1 > 1)$ der Schnittpunkt des Strahls $\{\lambda h\}_{\lambda > 0}$ mit der Verbindungsgeraden durch $\varphi_0 + t_1$ und $\varphi_0 + t_1'$. Aus $\|t_1^+\| < \|t\|$ folgt sofort $\|\varphi_0 - x_0\| > \|\varphi_0 + t_1 - h\|$, und aus den beiden Beziehungen $\|\varphi_0 - x_0\|^2 = 2 - 2(\varphi_0, x_0)$ und $\|\varphi_0 + t_1 - h\|^2 = 2 - 2(\varphi_0 + t_1, h)$ folgt

$$(\varphi_0 + t_1, h) > (\varphi_0, x_0). \tag{2}$$

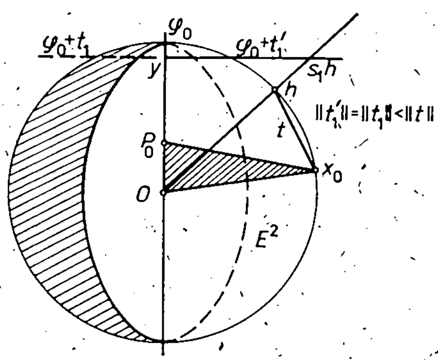

Abb. 1

Wir vergleichen jetzt die Normen von

$$u = s_1 h - (\varphi_0 + t_1) \qquad \text{und} \qquad u^+ = s_1 h - (\varphi_0 + t_1^+) \tag{3}$$

und beweisen die Ungleichung

$$\|(\varphi_0 + t_1) - s_1 h\| \geqq \|(\varphi_0 + t_1^+) - s_1 h\|. \tag{4}$$

Die Verbindungsgerade der Punkte $\varphi_0 + t_1$ und $\varphi_0 + t_1'$ schneidet offenbar den Radiusvektor $\overrightarrow{O\varphi_0}$ orthogonal im Punkt $y = \varphi_0(s_1 h, \varphi_0) = \varphi_0(\varphi_0 + t_1, \varphi_0) = \varphi_0(\varphi_0 + t_1', \varphi_0)$, und $\varphi_0 + t_1^+$ liegt mit $\varphi_0 + t_1$ und $\varphi_0 + t_1'$ wegen $\|t_1^+\| = \|t_1\| = \|t_1'\|$ auf der Schnittkugel um y mit dem Radius $\|r\| = \|(\varphi_0 + t_1) - \varphi_0(\varphi_0 + t_1, \varphi_0)\|$ mit S^{n-1}. Nun gilt allgemein für $r + y - s_1 h$, wenn r die $(n-1)$-dimensionale Sphäre mit dem Radius $\|r\|$ durchläuft, die Beziehung

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}_r \|y - s_1 h + r\|^2 &= \mathrm{Max}_r \{\|y - s_1 h\|^2 + \|r\|^2 + 2(y - s_1 h, r)\} \\ &= \|y - s_1 h\|^2 + \|r\|^2 + 2\,\|y - s_1 h\|\,\|r\| \\ &= (\|y - s_1 h\| + \|r\|)^2,\end{aligned}$$

d. h., der maximale Abstand $y + r$ von $s_1 h$ wird in $\varphi_0 + t_1$ erreicht, wenn man r so wählt, daß $y + r = \varphi_0 + t_1$ ist, womit (4) bewiesen ist.

Wir betrachten jetzt die beiden Dreiecke $(0, \varphi_0 + t_1, s_1 h)$ und $(0, \varphi_0 + t_1^+, s_1 h)$ und erhalten mit den Abkürzungen (3) die Beziehungen

$$(\varphi_0 + t_1, s_1 h) = (\varphi_0 + t_1, \varphi_0 + t_1 + u) = 1 + (\varphi_0 + t_1, u),$$

$$(\varphi_0 + t_1^+, s_1 h) = (\varphi_0 + t_1^+, \varphi_0 + t_1^+ + u^+) = 1 + (\varphi_0 + t_1^+, u^+).$$

Es gilt weiter $(\varphi_0 + t_1, u) \leqq (\varphi_0 + t_1^+, u^+)$. Dies folgt nach dem Cosinussatz und (4) aus den Beziehungen

$$\|s_1 h\|^2 = \|\varphi_0 + t_1 + u\|^2 = 1 + \|u\|^2 + 2(\varphi_0 + t_1, u),$$

$$\|s_1 h\|^2 = \|\varphi_0 + t_1^+ + u^+\|^2 = 1 + \|u^+\|^2 + 2(\varphi_0 + t_1^+, u^+).$$

Zusammen ergibt sich $(\varphi_0 + t_1, h) \leqq (\varphi_0 + t_1^+, h)$ und aus (2) schließlich $(\varphi_0, x_0) < (\varphi_0 + t_1^+, h)$, woraus sofort $\operatorname{dist}\big(h, F(h)\big) < \operatorname{dist}\big(x_0, F(x_0)\big)$ im Widerspruch zu unserer Annahme folgt ∎

Unser Beweis hängt natürlich nicht vom Radius und der Dimension n ab und gilt, von einer Minimalkonfiguration (1) ausgehend, auch für die Kugel im Hilbertraum.

Welche Bedingung ist an die die Bildräume $F(x)$ kennzeichnenden Projektionsoperatoren E zu stellen, damit die Voraussetzung (V) unseres Fixpunktsatzes gilt? Wir wollen noch dieses elementare Ergebnis gleich für die Sphäre einer Kugel vom Radius l angeben.

Seien etwa E_1 und E_2 die zwei Projektionsoperatoren, welche $\mathbb{E}^{s+1}(h)$ und $\mathbb{E}^{s+1}(x_0)$ definieren, wobei $\|E_1 - E_2\| = \bar{s}$ gelte, und ψ sei ein beliebiges Element von $\mathbb{E}^{s+1}(x_0)$: $E_2\psi = \psi$, $\|\psi\| = l$. Als „Nachbarelement" von ψ wählen wir zweckmäßigerweise $\varphi = lE_1\psi/\|E_1\psi\| \in \mathbb{E}^{s+1}(h)$. Dann kann man $\|\varphi - \psi\|$ leicht abschätzen. Es gilt nämlich einmal $\|I - E_1\psi\| = \|(E_2 - E_1)\,\psi\| \leqq \bar{s}\,\|\psi\| = \bar{s}l$ und nach dem Satz des Pythagoras $l^2 - \|E_1\psi\|^2 = \|(I - E_1)\,\psi\|^2 \leqq \|E_2 - E_1\|^2\,\|\psi\|^2 = \bar{s}^2l^2$. Hieraus folgt weiter $l - \|E_1\psi\| \leqq \bar{s}^2l^2/(l + \|E_1\psi\|) \leqq \bar{s}^2l$. Aus $\|\varphi - \psi\|^2 = \|\varphi - E_1\psi\|^2 + \|(I - E_1)\,\psi\|^2$ folgt wegen $\|\varphi - E_1\psi\| = l - \|E_1\psi\|$ schließlich $\|\varphi - \psi\|^2 \leqq l^2\bar{s}^4 + \bar{s}^2l^2$, also $\|\varphi - \psi\| \leqq l\bar{s}(1 + \bar{s}^2)^{1/2}$. Für die Gültigkeit von (V) reicht offenbar die Forderung $l\bar{s}(1 + \bar{s}^2)^{1/2} < t$ oder, wie man leicht nachrechnet, $0 < \bar{s}^2 < -1/2 + (1/4 + t^2/l^2)^{1/2} =: f(t)$ aus. Wegen $f(t) > t^2/l^2(1 - t^2/l^2)$ ist die Bedingung (V) also erst recht erfüllt, wenn

$$0 < \bar{s}^2 \leqq t^2/l^2(1 - t^2/l^2) \qquad \text{für } \|E_1 - E_2\| = \bar{s} \tag{5}$$

über einer Kugel vom Radius l zutrifft.

Satz 1': *Die mehrdeutige Abbildung $x \to T^s(x)$ der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre von Satz 1 besitzt einen Fixpunkt, wenn in* (V) *die Bedingung $\|t_1^+\| < \|t\|$ durch* (5) *für alle hinreichend kleinen Verschiebungen t, $\|t\| < \delta(x)$, für die die Unterräume $F(x)$ definierenden Projektionsoperatoren E ersetzt wird.*

LITERATUR

[1] Beckert, H.: Ein Fixpunktsatz für mehrdeutige konvexe Abbildungen auf der Sphäre. Z. Anal. Anw. 9 (1990), 473–475.

[2] Begle, E.: The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces. Ann. Math. 51 (1950), 534–543.

[3] Bohnenblust, H. F., and S. Karlin: The generalization of the fixed point theorem of Kakutani. In: Contribution to the Theory of Games, Vol. I (Ann. Math. Studies: Vol. 24; eds.: H. W. Kuhn und D. H. Tucker). Princeton (New Jersey): Univ. Press 1950, 159–160.

[4] Browder, F. E.: The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces. Math. Ann. 177 (1968), 283–301.

[5] EISENACK, G., and C. FENSKE: Fixpunkttheorie. Mannheim—Wien—Zürich: Bibl. Inst. 1978.

[6] KAKUTANI, S.: A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J. 8 (1941), 171—180.

[7] NEILL, O.: Induced homology homomorphism for set valued maps. Pac. J. Math. 7 (1957), 1179—1184.

[8] ZEIDLER, E.: Functional Analysis and Its Applications. I: Fixed Point Theorems. New York—Berlin—Heidelberg—Tokyo: Springer-Verlag 1985.

Manuskripteingang: 18. 10. 1988

VERFASSER:

Prof. Dr. HERBERT BECKERT
Raschwitzer Str. 12
O-7113 Markkleeberg