Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (6) 1990, S. 503–517

Minimalflächen auf Möbius-Bändern

K. Schüffler

Wir entwickeln eine global-analytische Theorie für nichtorientierbare Minimalflächen vom topologischen Typ von Möbius-Bändern. Es gelingt auf funktionentheoretischem Wege, Mannigfaltigkeitsstrukturen für harmonische Funktionen und für Minimalflächen zu gewinnen, wobei eine Veriation des konformen Typs inbegriffen ist. Wir beweisen sodann den sogenannten „Indexsatz für Minimalflächen", welcher Stabilitäts- und Isoliertheitsaussagen für Lösungen des Plateauschen Problems gestattet.

Развивается глобально-аналитическая теория для неориентируемых минимальных поверхностей топологического типа листа Мебиуса. Теоретико-функциональным методом удается получить векторное расслоение для гармонических функций и минимальных поверхностей, причем охватывается вариант конформного типа. Как приложение доказывается так называемая ,,теорема об индексе для минимальных поверхностей", из которой следуют результаты устойчивости и изолированности решений задачи Плато.

We develope a global analytic theory for non-orientiable minimal surfaces of the topological type of the Möbius strip. By function-theoretic methods it is possible to give the bundles of harmonic mappings and minimal surfaces including a variation of the conformal type. As an application we prove the so-called "index theorem for minimal surfaces" which in turn implies generic stability and isolatedness of the solutions of the Plateau problem.

Wir betrachten unter den nichtorientierbaren Minimalflächen solche, welche vom Typ des Möbius-Bandes sind. Unser Ziel ist dabei, eine globalanalytische Beschreibung dieser Flächen unter Einbeziehung des Plateauschen Problems vorzunehmen. Solche Flächen sind schon sehr früh untersucht worden; insbesondere begegnet man ihnen in Arbeiten von S. Lie [4] und im Zusammenhang mit Invarianzeigenschaften partieller Differentialgleichungen unter Transformationsgruppen. Lie spricht von Doppelflächen. Das Plateausche Problem (Existenzaussagen) für Minimalflächen vom Typ des Möbius-Bandes wurde von J. Douglas in seiner berühmten Arbeit aus dem Jahre 1932 behandelt, vgl. [3] und [5]. Wie bei anderen höher-topologischen Problemen findet man eine Variationsrechnung vor, welche die Variation sogenannter Normalgebiete mit einbeziehen muß. Für folgende Klassen topologischer Typen ist eine diesbezügliche Untersuchung bereits vorgenommen worden:

- Kreisscheibe (siehe [1] und weitere Arbeiten von R. Böhme);
- Mehrfach zusammenhängende (ebene) Gebiete [6, 9];
- Flächen vom Geschlecht 1 [7]; für H-Flächen (konstante mittlere Krümmung) findet man Resultate für den Fall des Einheitskreises in [8]).

Während alle diese Fälle orientierbare Flächen behandeln, wollen wir in dieser Arbeit zeigen, wie im nichtorientierbaren Fall vorgegangen werden kann. Wir zeigen, daß dies auch auf funktionentheoretischem Wege geschehen kann, eine Methode, welche der Autor für die verschiedenen vorstehenden Fälle entwickelt hat. Unsere Methode begründet sich weitgehend darauf,

- harmonische Funktionen auf Möbius-Bändern als harmonische Funktionen auf Ringgebieten aufzufassen unter der Invarianzbedingung hinsichtlich der involutorischen antikonformen Transformation $\tau(z) = -1/\bar{z}$ (ein Zugang, wie man ihn bei J. DOUGLAS findet [3]),
- die Variation der (eindimensionalen) konformen Strukturen mittels derjenigen der orientierten Überlagerungen durchzuführen,
- sowie geeignete Sobolev-Räume holomorpher Funktionen auf Ringgebieten zu finden, welche der involutorischen Invarianz harmonischer Funktionen entsprechen und welche geeignet sind, die Konformitätsbedingung $x \mapsto (x_z)^2$ (deren Nullstellenmenge gerade die Minimalflächen sind) funktionalanalytisch und unter Einbeziehung von Verzweigungsbedingungen zu behandeln.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind nun im wesentlichen:

- Konkrete Kartographierung des Sobolev-Raums $\mathbb{H}_h^m$ aller harmonischen Funktionen auf Möbius-Bändern als Mannigfaltigkeit bzw. als Faserraum über dem (eindimensionalen) Teichmüllerschen Raum der konformen Strukturen;
- Mannigfaltigkeitsstrukturen für Minimalflächen auf Möbius-Bändern;
- Behandlung des Plateauschen Problems in Form des in [1] entwickelten und in oben genannten nachfolgenden Arbeiten weitergeführten sog. „Indexsatzes";
- Fredholmsche Theorie für eine Riemann-Hilbertsche Randwertaufgabe, welche der involutorischen Invarianz harmonischer Funktionen angepaßt ist.

§ 1. Harmonische Funktionen auf Möbius-Bändern

Indem wir einer Mitteilung von H. Voss [10] folgen, sehen wir ein Möbius-Band als einen „halboffenen" Halbkreisring an zusammen mit einer entsprechenden Identifizierungsbedingung. Als Modell diene $M_R = \{z \mid R^{-1} < |z| < R, \operatorname{Im} z \geqq 0\}$, wobei für reelle z sich die Punkte z und $-1/\bar{z}$ entsprechen. Der Rand ist demnach die (zusammenhängende) Kurve $\{R\, e^{i\varphi} \mid 0 \leqq \varphi \leqq \pi\} \cup \{R^{-1} e^{i\varphi} \mid 0 \leqq \varphi \leqq \pi\}$. Der Parameter R, $R > 1$, beschreibt hierbei die konforme Klasse (Teichmüllerscher Raum für Möbius-Bänder). $\mathbb{P} := \{R \mid R > 1\}$.

Wir verwenden weiterhin folgende Symbole, wobei wir für den Sobolev-Exponenten stets $m \geqq 2$ voraussetzen:

- Da Verwechselungen ausgeschlossen sind, soll R gleichzeitig der Kreisring $R^{-1} < |z| < R$ sein.
- $A^m(\Omega, \mathbb{C}^k) = \{f \in H^{m,2}(\Omega, \mathbb{C}^k) \mid f \text{ holomorph im Gebiet } \Omega\}$ ist der Sobolev-Raum der holomorphen Funktionen auf Ω; $A_0^m(B, \mathbb{C}) = A^m(B, \mathbb{C}) \cap \{f(0) = 0\}$, $B = \{z \mid |z| < 1\}$.
- Für komplexwertige Funktionen g soll $\bar{g}$ die Funktion $\bar{g}(w) = \overline{g(w)}$ sein (punktweises Konjugieren; in manchen Schriften findet man auch stattdessen $\bar{g}(w) = \overline{g(\overline{w})}$, was gegebenenfalls zu berücksichtigen ist).

Eine Funktion x auf M_R ist demnach eine auf dem Halbkreisring M_R definierte Funktion, welche die Verheftungsbedingung $x(z) = x(-1/\bar{z})$ für $\operatorname{Im} z = 0$ erfüllt. Wir formulieren nun die folgende Bedingung:

$$(\cdot) \qquad x(z) = x(-1/\bar{z}) \qquad \text{für alle } z \in R.$$

Harmonische Funktionen (auf M_R) kann man — vermöge Fortsetzung aufgrund zuvor stehender Bedingung — auf ganz R definieren; aus Gründen der Analytizität der Funktionen und der Bedingung folgt deren Übertragung auf ganz R:

x ist harmonisch auf $M_R \Leftrightarrow x$ ist harmonisch auf R und erfüllt die Bedingung $(\cdot)$.

Das heißt: Die Funktion x ist invariant unter der involutorischen Abbildung τ: $R \to R$, $\tau(z) = -1/\bar{z}$ (welche simultan für alle solche Ringgebiete definiert ist).

Hieraus ergibt sich nun die folgende grundlegende Darstellung.

Satz 1.1 (Grundformel für harmonische Funktionen): *Für eine Funktion x gelten die folgenden Äquivalenzen:*

(i) *x ist harmonisch auf M_R.*

(ii) *x ist harmonisch auf R und $x = x \circ \tau$ (in R).*

(iii) *x hat die Darstellung $x = \operatorname{Re}\{g + \overline{g \circ \tau}\}$, also $x(z) = \operatorname{Re}\{g(z) + \overline{g(-1/\bar{z})}\}$, mit einer im Kreis $K_R(0)$ holomorphen Funktion g.*

Beweis: Setzt man $x(z)$ harmonisch auf den Ring R fort, so folgt hieraus und aus deren involutorischer Invarianz leicht, daß die holomorphe Funktion $h(z) = \partial x(z)/\partial z$ residuenfrei ist. Dann läßt sich x schreiben als $x(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $f' = h$, und f ist holomorph im Ring R. Die Bedingung $(\cdot)$ bewirkt dann, daß für die Laurent-Koeffizienten a_n

$$a_n = (-1)^n a_{-n} \quad (n \geq 1),$$

gilt; a_0 beliebig — a_0 kann allerdings ohne Einschränkung reell gewählt werden. Setzt man dann $g(z) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, so ist $f(z) = g(z) + \overline{g(-1/\bar{z})}$.

Umgekehrt: Als Realteil einer holomorphen Funktion ist x harmonisch. Die Bedingung $(\cdot)$ folgt mit $\tau \circ \tau = \mathrm{id}$, $\bar{g} \circ \tau = \overline{g \circ \tau}$ usw.

$$\begin{aligned} 2x \circ \tau &= g \circ \tau + \overline{g \circ \tau} \circ \tau + \bar{g} \circ \tau + g \circ \tau \circ \tau \\ &= \bar{g} \circ \overset{0}{\tau} + \bar{g} + \overline{g \circ \tau} + g = 2 \operatorname{Re}\{g + \overline{g \circ \tau}\}; \end{aligned}$$

Unsere Minimalflächentheorie läßt sich nun weitgehend mittels Funktionsklassen, welche die Strukturen der Form $f(z) = g \pm \overline{g \circ \tau}$ besitzen, aufbauen. Die nachfolgenden Rechnungen sind ebenso grundlegend wie einfach zu sehen:

Lemma 1.2: *Es sei f holomorph und x harmonisch in R. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

(i) *$f = \pm\overline{f \circ \tau} \Leftrightarrow f = g \pm \overline{g \circ \tau}$ mit einer im Kreis $K_R(0)$ holomorphen Funktion g.*

(ii) *$x = x \circ \tau \Leftrightarrow$ Die zu x harmonisch konjugierte Funktion $\tilde{x}$ erfüllt $x = -\tilde{x} \circ \tau$.*

(iii) *$f = -\overline{f \circ \tau} \Leftrightarrow f(z) = zh(z) + z^{-1}\,\overline{h \circ \tau(z)} + ic$ mit einer in $K_R(0)$ holomorphen Funktion h, $c \in \mathbb{R}$.*

(iv) *$f = \overline{f \circ \tau} \Leftrightarrow h(z) = zf'(z)$ erfüllt $h = -\overline{h \circ \tau}$.*

Folgerung: *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

(i) *$x = x \circ \tau$.*

(ii) *$x = \operatorname{Re} f$, und die im Kreisring R holomorphe Funktion f erfüllt $f = \overline{f \circ \tau}$ (modulo additiver imaginärer Konstanten).*

(iii) *$x(z) = \operatorname{Re} \int^{z} h(z)/z$ mit einer in R holomorphen Funktion h, welche die Bedingungen $\operatorname{Re} \oint h(z)/z = 0$ und $h = -\overline{h \circ \tau}$ erfüllt.*

Beweis von Lemma 1.2: (i) erhält man aus der Laurent-Reihe von f (oder durch Vergleich der Hauptteile und holomorphen Anteile), $a_n = \pm(-1)^n a_{-n}$ für alle $n \geqq 1$, und setzt $g(z) = a_0/2 + \sum_{n\geqq 1} a_n z^n$; $a_0 \in \mathbb{R}$ bei „+“ und $a_0 \in i\mathbb{R}$ bei „−“. (ii) folgt aus Satz 1.1 und (i). In (iii) setzt man $g(z) = \sum_{n\geqq 1} a_n z^n$, $a_0 = ic$ und $zh(z) = g(z)$. Dann ist $\bar{g} \circ \tau(z) = \overline{g(-1/\bar{z})} = -\overline{1/\bar{z}}\bar{h}(-1/\bar{z}) = -(1/z)\,\bar{h} \circ \tau(z)$. (iv) Für holomorphes g ist $\overline{g \circ \tau}$ holomorph; es ist, wie eine kurze Rechnung zeigt, $d\overline{g \circ \tau(z)}/dz = z^{-2}\overline{g' \circ \tau}$. Ist dann $f(z) = g(z) + \overline{g \circ \tau(z)}$, so ist $f'(z) = g'(z) + z^{-2}\overline{g' \circ \tau}$, also $h(z) = zg'(z) + z^{-1}\overline{g' \circ \tau}$ ∎

Wir bemerken, daß das Ableiten selbst aus der Klasse der Funktionen, welche eine Struktur gemäß Lemma 1.2(i) haben, herausführt — bei Hinzunahme einer z-Potenz dagegen nicht.

Nach diesen rechentechnischen Vorüberlegungen widmen wir uns den eigentlichen funktionalanalytischen Strukturen. Dazu führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$A_\pm^{m,k} = \{f \in A^m(R, \mathbb{C}^k) \mid f = \pm\bar{f} \circ \tau\}$, $A_\pm^m = A_\pm^{m,1}$, $\mathbb{A}_\pm^{m,k} = \bigcup_{R>1} A_\pm^{m,k}$ (die Funktionen aus $\mathbb{A}_\pm^{m,k}$ nennen wir *konjugiert involutorisch*),

$$A_{-*}^{m,k} = A_\pm^{m,k} \cap \left\{f \mid \operatorname{Re} \oint_{S^1} f/z = 0\right\},$$

$$H_h^{m,k} = \{x \in H^m(M_R, \mathbb{R}^k) \mid x \text{ harmonisch}\},$$

$$\mathbb{H}_h^{m,k} = \bigcup_{R>1} H_h^{m,k} \text{ (Faserraum).}$$

Satz 1.3: *Es gelten die folgenden Behauptungen:*

1. A_+^m *und* A_-^m *sind Hilbertsche Unterräume (über* $\mathbb{R}$*) des Raumes* $A^m(R, \mathbb{C})$ *aller Kreisringfunktionen.*

2. A_+^m *ist eine* $\mathbb{R}$*-Unteralgebra von* $A^m(R, \mathbb{C})$.

3. $A_+^m \cdot A_-^m = A_-^m$; $A_-^m \cdot A_-^m = A_+^m$; $iA_-^m = A_+^m$.

4. $A_{-*}^m \subset A_-^m$ *und die Kodimension*$_{|\mathbb{R}}$ *beträgt* 1.

5. $\mathbb{A}_+^m$ *(bzw.* $\mathbb{A}_-^m$*) ist ein differenzierbares Faserbündel mit Basisraum* $\mathbb{P}$ *und gleichzeitig ein Unterbündel sowie eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{A}^m = \bigcup\{A^m(R, \mathbb{C}) \mid R > 1\}$. *Genauer: Die Abbildung*

$$\Phi\colon A^m(B, \mathbb{C}) \times A_0^m(B, \mathbb{C}) \times \mathbb{P} \to \mathbb{A}^m,$$

$$\Phi(g, h, R)(z) = g(z/R) + h(-1/Rz) \in A^m(R, \mathbb{C}),$$

ist eine (in den Variablen g, h lineare) Homöomorphie, die Abbildung

$$\Phi_+\colon A^m(B, \mathbb{C}) \times \mathbb{P} \to \mathbb{A}_+^m,$$

$$\Phi_+(g, R)(z) = g(z/R) + \bar{g} \circ \tau(Rz) \in A_+^m(R, \mathbb{C}),$$

ebenfalls. Offenbar kann Φ_+ *als Einschränkung von* Φ *auf die Diagonale* $D = \{(c + g, \bar{g} \circ \tau) \mid g \in A_0^m(B, \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}\} \times \mathbb{P}$ *betrachtet werden.*

Beweis: A_+^m ist Bild der stetigen linearen, abgeschlossenen Injektion

$$\Phi_+\colon A^m(B, \mathbb{C}) \to A^m(R, \mathbb{C}),$$

$$\Phi_+(g)(z) = g(z/R) + \bar{g} \circ \tau(Rz) \qquad \text{(injektiv mod. imaginärer Konst.)}$$

bzw. $A_+{}^m$ ist Kern des stetigen linearen Operators

$$\varphi\colon A^m(B, \mathbb{C}) \to A^m(R, \mathbb{C}), \qquad \varphi(f) = f - \bar{f} \circ \tau$$

wegen Lemma 1.2. Anhand dieses Lemmas sieht man auch die Behauptungen 2 und 3 sofort ein, z. B. gilt die Implikation

$$f, h \in A_+{}^m \Rightarrow \overline{(f \cdot h)} \circ \tau = \bar{f} \circ \tau \cdot \bar{h} \circ \tau = fh.$$

Zu Behauptung 4: Für $f \in A_-{}^m$ gilt $a_0 = ic$, $c \in \mathbb{R}$ (a_0 = Laurent-Koeffizient), also $\oint f(z)/z = (1/2\pi\,i)\,ic = -c/2\pi \in \mathbb{R}$. Daher ist die Abbildung $A_-{}^m \ni f \mapsto \operatorname{Re} \oint f(z)/z \in \mathbb{R}$ surjektiv. Zur Behauptung 5: In [2] wurde gezeigt, daß die Abbildung Φ eine Bijektion ist, welche faserweise eine lineare Homöomorphie ist. Der Rest folgt leicht ∎

Satz 1.4 (Harmonische Funktionen): *Es gelten die folgenden Behauptungen:*

1. *Die Menge aller harmonischen Funktionen auf Möbius-Bändern,* $\mathbb{H}_h{}^m = \bigcup \{H_h{}^m(M_R, \mathbb{R}) \mid R > 1\}$, *ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, modelliert über* $A_0{}^m(B, \mathbb{C}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{P}$. *Die Karte* $\tilde{\Phi}$ *ist gegeben durch*

$$\tilde{\Phi}(g, \alpha, R)\,(z) = \operatorname{Re}\,\{\alpha + g(z/R) + \overline{g(-1/R\bar{z})}\}.$$

2. *Das Faserbündel* $\mathbb{H}_h{}^m$ *läßt sich ebenso universell kartographieren über* $\mathbb{A}^m_{-*}$: *Die Abbildung*

$$\Phi\colon \mathbb{A}^m_{-*} \to \mathbb{H}_h{}^m, \qquad \Phi(f)\,(z) = \operatorname{Re} \int^z \frac{f(z)}{z}\, dz = x(z)$$

ist die gewünschte Bijektion, die Umkehrung ist durch $f = zx_z$ ($\partial/\partial z$ = *Wirtingersche Ableitung*) *gegeben.*

3. $\mathbb{H}_h{}^m$ *ist gleichzeitig eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des Faserbündels aller in Kreisringen* R ($R > 1$) *harmonischen Funktionen* $\hat{\mathbb{H}}_h{}^m$, $\mathbb{H}_h{}^m \subset \hat{\mathbb{H}}_h{}^m := \bigcup \{H_h{}^m(R, \mathbb{R}) \mid R > 1\}$.

Der Beweis folgt aus den Sätzen 1.1 und 1.3 sowie Lemma 1.2 ∎

Wir bemerken, daß die Tatsache, daß sich harmonische Funktionen auf Möbius-Bändern als Untermannigfaltigkeiten von harmonischen/holomorphen Funktionen in Kreisringen beschrieben lassen, für einige äußerst kurze Beweisführungen verantwortlich ist (indem man nämlich entsprechende Resultate für (variable) Ringgebiete benutzt).

§ 2. Die Funktionalanalysis der Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt werden wir eine Integrabilitätsbedingung herleiten, eine Aussage über maximale Ideale in $A_+{}^m$ treffen und innerhalb der Klasse $A_+{}^m$ (bzw. $A_-{}^m$) Nullstellen ausfaktorisieren. Wir beginnen mit

Lemma 2.1: *Es sei* $f \in A_-{}^m$ *gegeben. Dann gilt die Äquivalenz*

$$\operatorname{Re} \oint_1 f \cdot h \cdot 1/z = 0 \text{ für alle } h \in A_+{}^m \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

Beweis: Nach Lemma 1.2 haben wir für $f \in A_-^m$ in R die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k z^k - \bar{b}_k(-1/z)^k\right);$$

die Funktionen $h(z) = az^n + \bar{a}(-1/z)^n$, $n \geqq 0$, $a \in \mathbb{C}$, sind eine Banachraumbasis von A_+^m. Wählt man in obiger Bedingung diese Funktionen als Testfunktionen, so ist

$$\operatorname{Re} \oint \frac{1}{z} \left(az^n + \bar{a}(-1/z)^n\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k z^k - \bar{b}_k(-1/z)^k\right) dz = 0$$

für alle $n \geqq 0$, $a \in \mathbb{C}$. Für $n \geqq 1$ folgt dann, daß $\operatorname{Im}(\bar{a} b_n) = 0$ ist für alle $a \in \mathbb{C}$, also $b_n = 0$ für alle $n \geqq 1$. Für $n = 0$ erhält man die Bedingung, daß $\operatorname{Re}(a) \operatorname{Im}(b_0) = 0$, also $b_0 \in \mathbb{R}$ ist. Also ist $f(z) = b_0 - \bar{b}_0 = 0$ ∎

Satz 2.2: *Es seien $f^1, \ldots, f^k$ linear unabhängige Funktionen in A_-^m. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi: A_+^m \ni g \mapsto \left(\operatorname{Re} \oint_1 g f^i \cdot 1/z\right)_{i=1,\ldots,k} \in \mathbb{R}^k$$

surjektiv. Ist also $F := (f^1, \ldots, f^k) \in A_-^{m,k}$ mit linear unabhängigen Komponenten, so gibt es ein $g \in A_+^m$, so daß gF $(\in A_-^{m,k})$ die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{Re} \oint_1 gF \cdot 1/z = 0$ *erfüllt.*

Beweis: Es gilt die Implikation $(\alpha_i \in \mathbb{R})$

$$\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \oint g f^i \cdot 1/z = 0 \;\forall\, g \in A_+^m \Rightarrow \operatorname{Re} \oint g \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f^i\right) \cdot 1/z = 0 \;\forall\, g \in A_+^m,$$

woraus nach dem vorstehenden Lemma die Behauptung folgt ∎

Satz 2.3 (Maximale Ideale in A_+^m): *Jedes echte maximale Ideal I von A_+^m ist Kern eines Auswertungsfunktionals, d. h. $I = \{f \in A_+^m \mid f(a) = 0\}$ für ein $a \in M$.*

Beweis: Ist I ein solches Ideal, so ist jedes $f \in I$ nicht invertierbar in A_+^m, also auch nicht in $A^m(R, \mathbb{C})$, denn aus $fg = 1$ für ein $g \in A^m(R, \mathbb{C})$ würde auch folgen, daß g konjugiert involutorisch, also $g \in A_+^m$ ist. Daher ist $\tilde{I} = I \cdot A^m(R, \mathbb{C})$ ein (echtes) Ideal von $A^m(R, \mathbb{C})$, welches im Kern eines Auswertungsfunktionals liegt (vgl. [7]; beachte, daß die 1-kodimensionalen Unterräume $\{f \mid \operatorname{Re} f(a) = 0\}$ von A_+^m keine Ideale sind) ∎

Wie kann man nun innerhalb der Klasse A_+^m (bzw. A_-^m) Nullstellen ausfaktorisieren? Die Rolle der Linearfaktoren $z - z_0$ wird durch Funktionen $P \in A_+^m$ der Form $P(z) = \alpha + \beta z + \bar{\alpha} - \bar{\beta}/z$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ übernommen. Wegen $P(z) = P(-1/\bar{z})$ gibt es also in R nur paarweise auftretende Nullstellen.

Satz 2.4 (Faktorisierung in A_+^m): *Es gelten die folgenden Behauptungen:*

1. *Zu vorgegebenem $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Funktion $P(z) = \alpha + \beta z + \bar{\alpha} - \bar{\beta}/z$ mit $\beta = \bar{a}$, $2 \operatorname{Re} \alpha = 1 - |a|^2$ aus A_+^m, welche genau an den Stellen a und $-1/\bar{a}$ verschwindet. Wir schreiben dann $P_a := P$.*

2. *Für $n \in \mathbb{N}$ und einen Multiindex $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ sowie für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ (d. h. $a_i \in R \cap \{\operatorname{Im} z \geqq 0\}$, alle a_i sollen paarweise verschieden sein) definieren wir das Produkt $P_a^\mu = P_{a_1}^{\mu_1} \ldots P_{a_n}^{\mu_n}$. Dann ist $P_a^\mu \in A_+^m$. Die Zuordnung $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \ni a \mapsto P_a^\mu \in A_+^m$ ist eine analytische Einbettung.*

3. *Ist* $f \in \mathbb{A}_+^m$ *(bzw.* $\mathbb{A}_-^m$*) und sind* $a_1, \ldots, a_n$ *genau die Nullstellen von* f *in ihrem Definitionsbereich* M_R*, besitzt* f *ferner keine Randstellen, so können wir* f *so faktorisieren:* $f(z) = P_a{}^\mu(z)\, g(z)$*; dabei sind* μ_i *die jeweiligen Vielfachheiten, und* g *ist aus* $A_+{}^m(M_R)$ *(bzw.* $A_-{}^m(M_R)$*).*

Beweis: Den ersten Teil des Satzes verifiziert man durch Nachrechnen, der Rest folgt hieraus sowie aus der Tatsache, daß $g := f/P_a{}^\mu \in A^m(R, \mathbb{C})$ ist und offenbar konjugiert involutorisch ist ∎

Für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathbb{N}^n$ führt man schließlich die Symbolik

$$|\mu| = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \text{ und } A^m_{\pm\mu} = \{f \in A^m_\pm \mid f \text{ hat genau } n \text{ (innere) Nullstellen der Vielfachheiten } \mu_1, \ldots, \mu_n \text{ in } M\}$$

ein. Entsprechend sind $\mathbb{A}^{m,k}_{\pm\mu}$ und $\mathbb{A}^{m,k}_{\pm\mu *}$ definiert.

Satz 2.5: *Es gelten die folgenden Behauptungen:*

1. $\mathbb{A}^{m,k}_{\pm\mu}$ *ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{A}^{m,k}_\pm$ *der (reellen) Kodimension* $2(k|\mu| - n)$.

2. $\mathbb{A}^{m,k}_{-\mu *}$ *ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{A}^{m,k}_{-\mu}$ *der (reellen) Kodimension* k.

Beweis: Da wir Nullstellenfunktionen $(P_a{}^\mu)$ gemäß Satz 2.4/1 konstruieren können, ist das Auswertungsfunktional für festes a, $\delta_\mu(\cdot, a)$,

$$\mathbb{A}_\pm{}^m \ni f \xrightarrow{\delta_\mu} \left((d/dz)^{l_i} f(a_i)\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ l_i = 1,\ldots,\mu_i - 1}} =: \delta_\mu(f, a) \in \mathbb{C}^{k|\mu|}$$

submersiv; läßt man die Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ variabel, so ergibt sich die angegebene Kodimension (eine formal ausführlichere analoge Behandlung findet man in [7]). Die zweite Aussage erhält man mit Satz 2.2. Ist nämlich $f \in A_-{}^{m,k}$ gegeben mit linear unabhängigen Komponenten, so gilt dies auch für die Funktionen $P_a{}^\mu f \in A^{m,k}_{-\mu}$. Die Abbildung $A_+{}^m \ni g \mapsto \operatorname{Re}\left(\oint_1 g P_a{}^\mu f/z\right) \in \mathbb{R}^k$ ist dann surjektiv, und es folgt die Aussage des Satzes ∎

Folgerung: *Setzt man*

$$\mathbb{H}^{m,k}_{h,\mu} = \{x \in \mathbb{H}_h{}^{m,k} \mid F := z x_z \in \mathbb{A}^{m,k}_{-\mu} \text{ hat genau } n \text{ Nullstellen der Ordnungen } \mu \text{ in } \operatorname{Im} z \geqq 0\},$$

also $\mathbb{H}^{m,k}_{h,\mu} = \Phi(\mathbb{A}^{m,k}_{-\mu *})$, *so ist* $\mathbb{H}^{m,k}_{h,\mu}$ *eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{H}_h{}^{m,k}$ *der (reellen) Kodimension* $2k\,|\mu| - 2n$.

Eine Beschreibung der Tangentialräume folgt schließlich aus der Bestimmungsgleichung dieser Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen von Funktionalen; so ist z. B. für $f \in \mathbb{A}^{m,k}_{\pm\mu}$ und $f \in A^m(M_R, \mathbb{C}^k)$

$$\begin{aligned} T_f \mathbb{A}^{m,k}_{+\mu} &= \{g \in A_+{}^m(M_R, \mathbb{C}^k) \mid \text{Es gibt ein } b \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \delta_\mu(g, a) + D_a \delta_\mu(f, a)\,(b) = 0\} \times \mathbb{R} \\ &= P_a{}^{\bar\mu} A_+{}^m(M_R, \mathbb{C}^k) \times \mathbb{R} \text{ mit } \bar\mu = (\mu_i - 1)_{i=1,\ldots,n}. \end{aligned}$$

§ 3. Mannigfaltigkeitsstrukturen für Minimalflächen

Wir können uns nun den Minimalflächen (nichtorientierbaren, vom „Möbius-Typ") selbst zuwenden. Das Kreisringmodell bewirkt, daß man Untermannigfaltigkeitsstrukturen zweifach zusammenhängender (orientierbarer) Minimalflächen erhält.

Bekanntlich ist ein harmonischer Vektor $x \in H^m(\Omega, \mathbb{R}^k)$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$ sei ein beliebiges Gebiet) genau dann eine Minimalfläche, wenn er konform parametrisiert ist. Diese Bedingung, $|x_u| = |x_v|$ und $x_u \cdot x_v = 0$, ist gleichwertig dazu, daß für die holomorphe Funktion $F = (F^1, \ldots, F^k) = x_z = x_u - ix_v$ (= Wirtingersche Ableitung)

$$F \cdot F := \sum_{i=1}^{k} (F^i)^2 \equiv 0$$

gilt. Um Aussagen über Mannigfaltigkeitsstrukturen für Minimalflächen zu erhalten, hat man daher den sogenannten "Konformitätsoperator",

$$A^m(\Omega, \mathbb{C}^k) \ni F \mapsto F \cdot F \in A^m(\Omega, \mathbb{C}),$$

hinsichtlich entsprechender funktional-/globalanalytischer Eigenschaften hin untersucht (vgl. [1, 6, 7]). Eine direkte Kopie dieser Vorgehensweise erscheint in unserem Fall nicht erfolgversprechend — der Operator

$$H_h^m(M_R, \mathbb{R}^k) \ni x \mapsto x_z \mapsto (x_z \cdot x_z) \in E \subsetneqq A^m(R, \mathbb{C})$$

besitzt sicherlich einen zu großen Bildraum $A^m(R, \mathbb{C})$, und die involutorische Struktur der harmonischen Funktionen aus $H^m(R, \mathbb{R}^k)$ läßt sich im Bild dieses Operators (ebenso wie das seiner Ableitung) nicht mehr erkennen und auswerten.

Statt dessen definieren wir als „Konformitätsoperator" die Abbildung

$$H_h^{m+1}(M_R, \mathbb{R}^k) \ni x \mapsto F := zx_z \in A_-^{m,k} \mapsto F \cdot F \in A_+^m,$$

wobei auch hier die Zuordnung

$$A_-^{m,k} \ni F \mapsto F \cdot F = \sum_{i=1}^{k} (F^i)^2 \in A_+^m$$

im Vordergrund steht. Offenbar sind die Nullstellen beider „Konformitätsoperatoren" auf der Menge aller harmonischen Funktionen gleich. Dieser einfache Trick ist der eigentliche Grund zur Einführung der $A_\pm^{m,k}$-Räume: Die involutorischen Strukturen werden beibehalten. Die Ausdehnung dieses Operators auf das ganze Faserbündel führt also zur Betrachtung der Abbildung

$$K: \mathbb{H}_h^{m,k} \to \mathbb{A}_+^m, \qquad K(x) = (zx_z)^2,$$

und $K^{-1}(0)$ besteht genau aus den Minimalflächen in $\mathbb{H}_h^{m,k}$. Da Verwechslungen ausgeschlossen bzw. harmlos sind, soll auch der Operator $\mathbb{A}_-^{m,k} \ni F \xrightarrow{K} F^2 = F \cdot F \in \mathbb{A}_+^m$ Konformitätsoperator K heißen.

Der funktionalanalytische Kalkül beginnt nun mit folgendem

Fundamentallemma 3.1: *Es sei $F \in A_-^{m,k}$ und $|F| > 0$ in $\bar{R}$ (im abgeschlossenen Definitionsbereich). Dann ist der lineare Operator $DK(F): A_-^{m,k} \to A_+^{m,1}$, $DK(F)(G) = F \cdot G$ surjektiv.*

Beweis: Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2 können wir die Vorgehensweise aus [7] kopieren: $DK(F)(A_-^{m,k})$ ist ein Ideal in $A_+^{m,1}$. Wäre es von $A_+^{m,1}$ verschieden, so läge es im Kern eines Auswertungsfunktionals, was auf die Existenz einer Nullstelle von F führen würde. ∎

Theorem 3.2 (Funktionalanalysis des Konformitätsoperators): *Es gelten die folgenden Behauptungen:*

1. $K: \mathbb{A}_-^{m,k} \to \mathbb{A}_+^m$ *ist fasertreu und analytisch.*

2. *Ist* $F \in \mathbb{A}_-^{m,k}$ *ohne Nullstellen, so ist* K *bei* F *submersiv.*

3. *Ist* $F \in \mathbb{A}_{-*}^{m,k}$, $|F| > 0$, *so ist ebenfalls* $K: \mathbb{A}_{-*}^{m,k} \to \mathbb{A}_+^{m,1}$ *bei* F *submersiv.*

4. *Hinsichtlich aller Nebenbedingungen gilt allgemein, daß für* $F \in \mathbb{A}_{-*\mu}^{m,k}$ *mit* $K(F) = 0$ *der Konformitätsoperator*

$$K: \mathbb{A}_{-*\mu}^{m,k} \to \mathbb{A}_{+2\mu}^{m,1} \quad bzw. \quad K: \mathbb{H}_{h,\mu}^{m,k} \to \mathbb{A}_{+2\mu}^{m,1} \; \left(K(x) = (zx_z)^2\right)$$

eine bei F *analytische Submersion ist.*

Beweis: Die Analytizität von K folgt einfach daraus, daß nach [2] der Operator

$$\bigcup_{R>1} A^m(R, \mathbb{C}^k) \ni F \mapsto F \cdot F \in \bigcup_{R>1} A^m(R, \mathbb{C})$$

analytisch ist und wir es hier mit Einschränkungen auf differenzierbare Untermannigfaltigkeiten zu tun haben. Ausgehend von der Aussage 1 reicht es nun, die Surjektivität des Differentials von K in den einzelnen Fasern zu zeigen. Aus dem Fundamentallemma 3.1 folgt — indem man die Argumentationsweise aus [7] übernimmt —, daß für $F \in A_{-*\mu}^{m,k}$ mit $F \cdot F = 0$ die lineare Abbildung $DK(F): T_F A_{-*\mu}^{m,k} \to T_0 A_{+2\mu}^{m,1}$ surjektiv ist. Die Unabhängigkeit der Surjektivitätseigenschaft hinsichtlich der Nebenbedingung betreffend die Integrabilität wird hierbei durch den allgemeinen Surjektivitätssatz 2.2 gewährleistet, indem man die Argumentation aus [7: (II, 3]) direkt übernimmt ∎

Als Folgerung erhalten wir eine stratifizierte Mannigfaltigkeitsstruktur für Minimalflächen auf Möbius-Bändern.

Theorem 3.3 (Mannigfaltigkeitsstruktur für Minimalflächen): *Es sei* $n \geqq 0$ *und* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ *ein fixierter Multiindex. Dann ist die Menge*

$$\mathbb{M}_\mu^{m,k} = \{x \in \mathbb{H}_{h,\mu}^{m,k} \mid (x_z)^2 = 0\}$$

aller Minimalflächen (mit Werten in $\mathbb{R}^k$, *parametrisiert über Möbius-Bändern* M_R $(R > 1)$, *mit genau* n *Verzweigungspunkten der jeweiligen Ordnung* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *im Innern des entsprechenden Definitionsbereichs* M_R) *eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{H}_h^{m,k}$, $\mathbb{M}_\mu^{m,k} = K^{-1}(0) \cap \mathbb{H}_{h,\mu}^{m,k}$. *Weiterhin ist die Bündelprojektion* pr: $\mathbb{M}_\mu^{m,k} \to \mathbb{P}$, $P(x) = R$, *wobei* $R > 1$ *der konforme Typ des Definitionsbereichs* M_R *von* x *ist, submersiv, der konforme Typ kann also frei gestört werden.*

Beweis: Dies alles folgt aus der Fasertreue, der Analytizität sowie der Submersionseigenschaft des Konformitätsoperators $K: \mathbb{H}_{h,\mu}^{m,k} \to \mathbb{A}_{+2\mu}^{m,1}$. Hieraus ergibt sich ebenfalls die Beschreibung der Tangentialräume:

$$\begin{aligned} T_x \mathbb{M}_\mu^{m,k} &= T_x \mathbb{H}_{h,\mu}^{m,k} \cap \text{Kern } DK(x) \\ &= \left\{ y \in H_h^m(M_R, \mathbb{R}^k) \mid \left((\partial/\partial z)^{j_i} (zy_z)(a_i) = 0\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j_i \leq \mu_i - 1}}, \; y_z \cdot x_z = 0 \right\} \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

ür $x \in \mathbb{M}_\mu^{m,k}$, $x: M_R \to \mathbb{R}^k$ mit den Verzweigungspunkten $a_1, \ldots, a_n$ ∎

§ 4. Dirichletsches Problem und Variation der harmonischen Fortsetzung

Der Sobolev-Raum $H^{m+1/2}(\partial M_R, \mathbb{R})$ ist auf naheliegende Weise homöomorph zum Raum aller Sobolev-Funktionen auf S^1, beispielsweise vermöge einer Übertragung $\theta: \partial M_R \to S^1$. Zusammen mit der Einbettung in das Kreismodell erhalten wir folgende Beschreibung:

$$\begin{array}{ccc}
H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} & \xrightarrow{\eta} & H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} \\
\updownarrow \theta & & \downarrow \sigma \\
\bigcup\limits_{R>1} H^{m+1/2}(\partial M_R, \mathbb{R}) & & H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} \\
 & & \updownarrow \tilde{\theta} \\
 & & \bigcup\limits_{R>1} H^{m+1/2}(\partial R, \mathbb{R})
\end{array}$$

mit

$$\theta(\gamma, R) = \begin{cases} \gamma(z/R), & \operatorname{Im} z \geqq 0, |z| = R, \\ \gamma(-Rz), & \operatorname{Im} z \geqq 0, |z| = 1/R, \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}(\gamma_1, \gamma_2, R) = \begin{cases} \gamma_1(z/R), |z| = R, \\ \gamma_2(-Rz), |z| = 1/R, \end{cases}$$

$$\eta(\gamma, R) = (\gamma, 0, R), \qquad \sigma(\gamma_1, \gamma_2, R) = (\gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2, R).$$

Dann ist $\sigma \circ \eta\big(H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \{R\}\big)$ die Diagonale D in $H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R})^2 \times \{R\}$, und das Bild $(\tilde{\theta} \circ \sigma \circ \eta)$ besteht genau aus den Funktionen auf Kreisringrändern, welche involutorisch sind.

Nun betrachten wir das Dirichletsche Problem, d. h. die Abbildung

$$\omega: H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} \to \mathbb{H}_h{}^m = \bigcup_{R>1} H_h{}^m(M_R, \mathbb{R}),$$

$$\omega(\gamma, R) = x \Leftrightarrow \{x \in H_h{}^m(M_R, \mathbb{R}), x|_{\partial M_R} = \theta(\gamma, R)\},$$

die wir Dirichletschen Operator nennen.

Theorem 4.1 (Eigenschaften des Dirichletschen Operators): *Der Dirichletsche Operator $\omega: H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} \to \mathbb{H}_h{}^m$ ist analytisch, fasertreu und faserweise ein linearer Homöomorphismus.*

Beweis: Wir betrachten die harmonische Fortsetzung bei variablen Ringbereichen

$$\tilde{\omega}: H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} \to \bigcup_{R>1} H_h{}^m(R, \mathbb{R}),$$

$$\tilde{\omega}(\gamma_1, \gamma_2, \mathbb{R}) = x \Leftrightarrow x \in H_h{}^m(R, \mathbb{R}), \qquad x(z) = \begin{cases} \gamma_1(z/R), & |z| = R \\ \gamma_2(-Rz), & |z| = 1/R, \end{cases}$$

also $x = \tilde{\theta}(\gamma_1, \gamma_2, R)$ auf ∂R. Dann hat man die Darstellung $\omega = \tilde{\omega} \circ \sigma \circ \eta$, woraus folgt, daß ω fasertreu und als Abbildung $\omega: H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{P} \to \cup \{H_h{}^m(R, \mathbb{R}) \mid R > 1\}$ analytisch ist (ω ist die Einschränkung von $\tilde{\omega}$ auf die Diagonale D). Der Satz ist daher bewiesen, wenn wir noch zeigen, daß (für fixiertes $R \in \mathbb{P}$) $\omega(H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \{R\}) = H_h{}^m(M_R, \mathbb{R})$ gilt. Dazu sei $\gamma \in H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R})$ und x diejenige Funktion aus $H_h{}^m(R, \mathbb{R})$ mit $x = \omega(\gamma)$, also

$$x(z) = \begin{cases} \gamma(z/R) =: \gamma_1(z), |z| = R, \\ \gamma(-Rz) =: \gamma_2(z), |z| = 1/R. \end{cases}$$

Dann ist $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$, $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \tau$, und die harmonische Funktion $x \circ \tau \in H_h^m(R, \mathbb{R})$ hat die gleichen Randwerte wie x. Es gilt aufgrund der Eindeutigkeit also überall $x = x \circ \tau$. Involutorische Randkurven — das ist genau die Diagonale in $H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R})$ nach Anwendung von σ — haben also auch involutorische harmonische Fortsetzungen. Da die Umkehrung trivialerweise richtig ist, ist der Satz bewiesen ∎

§ 5. Plateausches Problem und Indexsatz

Dieser Abschnitt behandelt die Fredholmsche Theorie für das Plateausche Problem — und zwar in der Weise, wie man es in der Arbeit [1] von R. Böhme und A. J. Tromba initiiert findet. Es handelt sich hierbei bekanntlich um das Modell, Randkurven in ihre Spuren und Diffeomorphismen der Berandung aufzuspalten (wie es der Fragestellung des Plateauschen Problems entspricht). In dieses Randkurvenmodell kann man nun Minimalflächen als — nach Art und Anzahl eventuell vorhandener Verzweigungspunkte stratifizierte — Untermannigfaltigkeiten erkennen. Der Operator, welcher (diesen) Minimalflächen ihre Randkurve zuordnet, wird sodann global-analytisch untersucht („Indexsatz").

Diese Beschreibung des Plateau-Douglasschen Problems ist inzwischen für viele Fälle untersucht worden: Minimalflächen vom Typ des Einheitskreises [1], solche vom Typ mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete [6, 9], solche vom Geschlecht 1 [7] sowie Flächen konstanter mittlerer Krümmung [8]. Hierbei handelt es sich in allen Fällen um orientierbare Flächen. Insbesondere kennen wir die Fredholmsche Theorie dieses Modells für zweifach zusammenhängende Minimalflächen [6]. Unsere bisherige Vorgehensweise, nichtorientierbare Flächen in ein Kreisringmodell orientierbarer Funktionen einzubetten, legt es nahe, eine Indextheorie vermöge dieser Einbettung zu deduzieren. Wir beschreiben nun dieses Modell für unsere Situation. Dazu fixieren wir Sobolev-Indizes $m' > m \geqq 2$, $n \in \mathbb{N}$ sowie den Verzweigungstyp $\mu = \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{N}^n$ und definieren

$$A := \{\alpha \in H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \mid \alpha \text{ ist Immersion}\},$$

$$D := \{u \in H^{m+1/2}(S^1, S^1) \mid u \text{ ist Diffeomorphismus, homotop zu id}\},$$

$$\mathbb{\Gamma} := A \times D \times \mathbb{P}; \qquad \Gamma = A \times D;$$

Ferner sei

$$\lambda \colon H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times D \to H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k), \qquad \lambda(\alpha, u) = \alpha \circ u$$

die Komposition von Abbildungen. A ist offen in $H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k)$.

Lemma 5.1: *Die Abbildung λ hat folgende Eigenschaften:*

1. *λ ist von der Klasse $C^{m'-m}$.*
2. *λ hat (nur) dichtes Bild.*
3. *$D\lambda$ hat (auf A) dichtes Bild.*

Nun betrachten wir die Komposition $\Lambda = \omega \circ (\lambda, \text{id})$ (vgl. § 4):

$$\mathbb{\Gamma} \xrightarrow{(\lambda, \text{id})} H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times \mathbb{P} \xrightarrow{\omega} \mathbb{H}_h^{m,k}.$$

$\Lambda(\alpha, u, R)$ ist also die harmonische Fortsetzung der Funktion $\alpha \circ u$ auf das Möbius-Band M_R, i.e. die harmonische Fortsetzung auf M_R von $\big(\alpha \circ u(z/R), \alpha \circ u(-Rz)\big)$.

Lemma 5.2: *Die Übertragungsabbildung Λ hat — aufgrund von Lemma 5.1 sowie Theorem 4.1 — folgende Eigenschaften:*

1. *Λ ist von der Klasse $C^{m'-m}$.*
2. *Λ und $D\Lambda$ haben dichtes Bild.*
3. *Λ ist fasertreu.*

Es sei nun $\mathbb{\Gamma}_\mu = \mathbb{\Gamma} \cap \Lambda^{-1}(\mathbb{H}^{m,k}_{h,\mu})$ die Menge aller (α, u, R), deren harmonische Fortsetzung genau n innere Verzweigungspunkte der Ordnungen μ besitzt.

Lemma 5.3: *$\mathbb{\Gamma}_\mu$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Klasse $C^{m'-m}$ von $\mathbb{\Gamma}$ der $\mathbb{R}$-Kodimension $2(k\,|\mu| - n)$.*

Für feste Punkte $a_1, \ldots, a_n \in M_R$ ist nämlich die Auswertungsabbildung auf der Faser R,

$$\delta_\mu \circ \Lambda : \Gamma \to \mathbb{C}^{k|\mu|},$$

$$\delta_\mu\big(\Lambda(\alpha, u, R)\big) = (\partial/\partial z)^{l_j}\, \omega(\alpha \circ u, R)\, (a_j)_{\substack{j=1,\ldots,n\\ l_j=1,\ldots,\mu_j}},$$

wegen der Dichtheit des Bildes von Γ und $D\Gamma$, der Endlichdimensionalität des Bildraumes sowie wegen der Surjektivität von δ_μ auf $H_h{}^m(M_R, \mathbb{R}^k)$ selbst wieder eine Submersion (der Klasse $C^{m'-m}$) ∎

Nun erhalten wir ein Minimalflächenmodell auf $\mathbb{\Gamma}$, indem wir die Konformitätsrelation vermöge Λ bilden, $K \circ \Lambda : \mathbb{\Gamma} \to \mathbb{A}_+{}^m$.

Lemma 5.4: *Die Konformitätsrelation $K \circ \Lambda$ hat folgende Eigenschaften:*

1. *$K \circ \Lambda$ ist von der Klasse $C^{m'-m}$.*
2. *$K \circ \Lambda$ ist fasertreu.*
3. $K \circ \Lambda : \mathbb{\Gamma}_\mu \subseteqq \mathbb{A}^m_{+2\mu}$.
4. *Das Differential von $K \circ \Lambda$ hat auf $\mathbb{\Gamma}_\mu$ dichtes Bild in $\mathbb{A}^m_{+2\mu}$.*

Diese Eigenschaften folgen aus Lemma 5.2 und Theorem 3.2 ∎

Die Globalanalysis des Plateauschen Problems wird nun wie folgt entwickelt. Wir betrachten die Nullstellenmenge unter dieser Konformitätsrelation, $\mathbb{U}_\mu = \mathbb{\Gamma}_\mu \cap (K \circ \Lambda)^{-1}(0)$, und untersuchen folgende Fragen:

1. Ist $\mathbb{U}_\mu \subset \mathbb{\Gamma}$ eine Untermannigfaltigkeit?
2. Wenn ja: Welche Eigenschaften hat die Projektion $\Pi_\mu : \mathbb{\Gamma}_\mu \to A$, $\Pi_\mu(\alpha, u, R) = \alpha$ auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{U}_\mu$?

Hinsichtlich dieser Fragen beachten wir, daß es reicht, auf konstanter Faser ($R \in \mathbb{P}$ fest) zu operieren; die Fasertreue von Λ, ω, sowie K zusammen mit deren Differenzierbarkeitseigenschaften (bezüglich der Variablen R) gestatten eine triviale Übertragung auf das gesamte Bündel (vgl. [7: Theorem B]). Wir fixieren also einen festen, konformen Parameter $R \in \mathbb{P}$ und bilden mit der linearen Homöomorphie

$$\sigma : H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \to H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k),$$

$$\sigma(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2),$$

(vgl. § 4) das Diagramm

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{\Gamma} \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\tilde{\varphi}} \\
\Gamma = A \times D & \xrightarrow{\varphi} & A \times D \times H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times D \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\lambda} \\
 & & H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\
 & & H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times H^{m+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle\omega} \\
 & & H_h^m(R, \mathbb{R}^k).
\end{array}
$$

Hierbei soll $\varphi(\alpha, u) = (\alpha, u, 0, \mathrm{id})$, $\lambda(\alpha, u, \beta, v) = (\alpha \circ u, \beta \circ v)$ sein,

$$\tilde{\Gamma} = \{(\alpha, u, \beta, v) \in A \times D \times H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times D \mid \sigma \circ \lambda(\alpha, u, \beta, v) = (\alpha \circ u, \alpha \circ u - \beta \circ v) \text{ ist immersiert}\}$$

($\tilde{\Gamma}$ ist offen), und $\tilde{\varphi}$ soll die natürliche Einbettung von $\tilde{\Gamma}$ in $A \times D \times H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times D$ sein. Offenbar ist $\Lambda = \omega \circ \sigma \circ \lambda \circ \varphi$, und $\tilde{\Lambda} = \omega \circ \sigma \circ \lambda \circ \tilde{\varphi} : \tilde{\Gamma} \to H_h^m(R, \mathbb{R}^k)$ hat ein dichtes Bild in $H_h^m(R, \mathbb{R}^k)$; gleiches gilt für $D\tilde{\Lambda}$ auf $\tilde{\Gamma}$.

Nachdem wir nun das Randkurvenmodell Γ auf diese Weise in dasjenige für Ringgebiete R eingebettet haben, können wir die Resultate zu letzterem dazu benutzen, die eingangs gestellten Fragen zu beantworten.

Theorem 5.5 (Mannigfaltigkeitsstrukturen): *Die Menge $\mathbb{U}_\mu \subset \mathbb{\Gamma}$, definiert als Nullstellenmenge des Operators $K \circ \Lambda : \mathbb{\Gamma}_\mu \to \mathbb{A}^m_{+2\mu}$, ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{\Gamma}_\mu$ der Klasse $C^{m'-m}$. $\mathbb{U}_\mu$ besteht — vermöge der Anwendung des Übertragungsoperators Λ — genau aus den Minimalflächen vom topologischen Typ des Möbius-Bandes, welche genau n Verzweigungspunkte der Ordnungen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ besitzen. Ferner ist die Bündelprojektion $\mathrm{p}_r : \mathbb{U}_\mu \to \mathbb{P}$ (welche jeder Minimalfläche ihren konformen Typ zuordnet) surjektiv.*

Beweis: Wie erwähnt reicht es, auf konstanter Faser ($R \in \mathbb{P}$ fix) zu operieren. Der Tangentialraum der Mannigfaltigkeit Γ läßt sich — via φ — als Unterhilbertraum von $H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k)^2 \times TD^2$ auffassen. Nun wissen wir nach [6], daß dort der Konformitätsoperator

$$D(K \circ \tilde{\Lambda}) : H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k)^2 \times TD^2 \to A^m(R, \mathbb{C})$$

in einer Umgebung von $\lambda(U_\mu)$ ein abgeschlossenes Bild hat. Deswegen hat auch $D(K \circ \Lambda)$ in einer Umgebung von U_μ ein abgeschlossenes Bild (welches in A_+^m liegt). Da nun $D(K \circ \Lambda)\,(T\Gamma_\mu) \subseteqq A^m_{+2\mu}$ dicht ist, ist $D(K \circ \Lambda)$ dann auch surjektiv, und der Satz folgt. (Hierbei spielt es keine Rolle, ob wir den Operator $x \mapsto x_z \cdot x_z$ oder $x \mapsto zx_z \cdot zx_z$ betrachten, da die Multiplikation mit z^2 im Raum $A^m(R, \mathbb{C})$ ein linearer Homöomorphismus ist.) ∎

Theorem 5.6 (Indexsatz): *Die Projektionsabbildung $\Pi_\mu : \mathbb{U}_\mu \to A$, $\Pi_\mu(\alpha, u, R) = \alpha$ ist Fredholmsch und besitzt den Index $2(n - (k - 2)\,|\mu|) + 1$. Faktorisiert man (z. B. durch eine 1-Punkte-Bedingung) die konforme Gruppe in Kreisringen aus (das ist die 1-dimensionale Schar der Drehungen), so ergibt sich die Formel*

$$\operatorname{index} \Pi_\mu = 2(n - (k - 2)\,|\mu|).$$

Bemerkung: Die Indexeigenschaft kann bewiesen werden, indem man bekannte Resultate für Ringgebiete benutzt. Ist nämlich $\tilde{\Pi} = (\Pi^1, \Pi^2)$ die Projektion in $H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k)^2 \times D^2$, so folgt aus der Beziehung index $(\Pi^1, \Pi^2)|_{\mathrm{Kern}(K\circ\tilde{\Lambda})} = 0$ sowie aus der Tatsache, daß mit der Projektion p von $A^m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ auf $A_+{}^m$ gilt $p \circ K \circ \tilde{\Lambda}$: Kern $\Pi^2 \to A^m_{+2\mu}$ ist (auf U_μ) submersiv, Π^1 und Π^2 sind surjektiv sowie Kern $(p \circ K \circ \tilde{\Lambda})|_{\mathrm{Kern}\,\Pi^1} = \lambda(\mathrm{Kern}\ K \circ \Lambda)$ die obige Beziehung (zusammen mit den Kodimensionen von $\Gamma_\mu \subset \Gamma$ und $A^m_{+2\mu} \subset A_+{}^m$) — allerdings mit etwas aufwendigem funktionalanalytischen Kalkül, welcher den Satz B aus [7: S. 345] mehrfach verwendet.

Man kann jedoch die Vorgehensweise aus (z. B.) [7] kopieren und erhält für den Operator $\Psi: \Gamma \to H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times A_+{}^m$, $\Psi = (\Pi, K \circ \Lambda)$ die Beziehung index Ψ = index $D(K \circ \Lambda)|_{\mathrm{Kern}\,\Pi}$ = index RH, wobei $RH: A_+{}^{m+1} \to H^{m+1/2}(\partial M_R, \mathbb{R})$ der Riemann-Hilbertsche Operator $RH(w) = \mathrm{Re}\,\{z'\overline{w}\}|_{\partial M_R}$ ist. Hierbei ist $z'(s)$ die Parametrisierung von ∂M_R nach der Bogenlänge.

Wir zeigen nun folgendes

Theorem 5.7 (Riemann-Hilbertscher Operator): *Es sei $\lambda \in H^{m-1/2}(\partial M_R, \mathbb{C})$ nullstellenfrei und $\chi(\lambda)$ der geometrische Index (Argumentzuwachs) von λ auf ∂M_R. Dann ist*

$$RH: A_+{}^m \to H^{m-1/2}(\partial M_R, \mathbb{R}), \qquad RH(w) = \mathrm{Re}\,\{\bar{\lambda} w\}|_{\partial M_R}$$

ein Fredholmscher Operator, welcher den Index $2\chi(\lambda)$ besitzt.

Beweis: Wir benutzen die Karte von $A_+{}^m$ aus § 1:

$$\begin{array}{ccc} A_+{}^m \ni w & \xrightarrow{\quad RH \quad} & \mathrm{Re}\,\{\bar{\lambda} w\}|_{\partial M_R} \in H^{m-1/2}(\partial M_R, \mathbb{R}) \\ \updownarrow{\scriptstyle\Phi} & & \| \qquad\qquad \cap\!\!| \\ A_0{}^m(B, \mathbb{C}) \times \mathbb{R} \subset A^m(B, \mathbb{C}) & & \mathrm{Re}\,\{\bar{\lambda} w\}|_{\partial K_R(0)} \in H^{m-1/2}(\partial K_R(0), \mathbb{C}) \end{array}$$

und erhalten mit

$$T: A^m(K_R(0), \mathbb{C}) \to H^{m-1/2}(\partial K_R(0), \mathbb{C}), \qquad T(g) = \mathrm{Re}\left\{\bar{\lambda}\{g + \overline{g \circ \tau}\}\right\}\Big|_{\partial K_R(0)}$$

eine Darstellung von $RH \circ \Phi$, wobei also index $(RH \circ \Phi)$ = index $T - 1$ ist, da $A_0{}^m(B, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}$ in $A^m(B, \mathbb{C})$ die Kodimension 1 hat. Nun ist

$$T(g) = \mathrm{Re}\,\{\bar{\lambda} g\}|_{\partial K_R(0)} + \mathrm{Re}\,\{\bar{\lambda}(\overline{g \circ \tau})\}|_{\partial K_R(0)}.$$

Wir sehen leicht ein, daß der zweite Summand,

$$A^m(K_R(0), \mathbb{C}) \ni g \mapsto \mathrm{Re}\,\{\lambda(g \circ \tau)\}|_{\partial K_R(0)} \in H^{m-1/2}(\partial K_R(0), \mathbb{R}),$$

ein kompakter Operator ist, denn $g \circ \tau \in A^m(R, \mathbb{C})$. Also gilt, da $\overline{g \circ \tau}$ der Hauptteil von $g + \overline{g \circ \tau}$ im Ring R ist, $g \circ \tau \in A^m(\Omega, \mathbb{C})$ für alle Ω der Form $\Omega = \{z \mid 1/R < z < K,\ K$ beliebig groß$\}$. Daraus folgt, daß der Operator

$$A^m(K_R(0), \mathbb{C}) \ni g \mapsto g \circ \tau|_{\partial K_R(0)} \in H^k(\partial K_R(0), \mathbb{C}) \qquad (k \in \mathbb{N} \text{ beliebig})$$

wohldefiniert und nach Sobolevschen Einbettungssätzen kompakt ist. Wir erhalten also, daß index T = index L ist mit

$$L: A^m(K_R(0), \mathbb{C}) \to H^{m-1/2}(\partial K_R(0), \mathbb{R}), \qquad L(g) = \mathrm{Re}\,\{\bar{\lambda} g\}|_{\partial K_R(0)}.$$

Dies ist der bekannte Riemann-Hilbertsche Operator für Kreisgebiete, und dessen Index ist wohlbekannt $(2\chi(\lambda) + 1)$.

Nun können wir den Indexsatz beweisen. Ist $z'(s)$ die Parametrisierung von ∂M_R, so ist $\chi(z'(s)) = 0$ aufgrund der gegenläufigen Orientierungen. Daher ist index Ψ = index $D(K \circ \Lambda)|_{\mathrm{Kern}\,\Pi} = 0$. Dann ist

$$\Psi_\mu : \Gamma_\mu \to H^{m'+1/2}(S^1, \mathbb{R}^k) \times A^m_{+2\mu} \qquad (\Psi_\mu = \Psi|_{\Gamma_\mu})$$

ebenfalls ein Fredholmscher Operator, welcher den Index $2(n - k\,|\mu|) + 4\,|\mu|$ hat. Da nun $D(K \circ \Lambda): \Gamma_\mu \to A^m_{+2\mu}$ surjektiv ist, gilt (mit [7: Theorem B/S. 453])

$$\operatorname{index} \Psi_\mu = \operatorname{index} \Pi|_{\mathrm{Kern}\,D(K\circ\Lambda)\cap\Gamma_\mu} = 2(n - (k-2)\,|\mu|).$$

Da die Mannigfaltigkeiten U_μ Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{U}_\mu$ der $\mathbb{R}$-Kodimension 1 sind, vermehrt sich der Index von Π_μ auf $\mathbb{U}_\mu$ um diese Zahl ∎

Die Anwendungen des Indexsatzes liegen vor allem im Bereich von Aussagen generischer Art: Für $k = 3$ hat man z. B. genau im Falle nicht vorhandener — bzw. einfacher — Verzweigungspunkte den Index 0. In diesem Fall gilt — nach Sätzen vom Sardschen Typ — generische Stabilität gegenüber Störungen der Randkurven, denn der Operator Π_μ ist dann submersiv, gleichzeitig aber auch immersiv, sofern man noch eine 1-Punkte-Bedingung mit einbezieht. Das will sagen, daß man die konforme Gruppe der Normalgebiete, welche stets die eindimensionale Gruppe reiner Drehungen ist, ausfaktorisiert. Folglich bekommt man mit der Stabilität auch die Isoliertheit der Lösungen mitgeliefert. Das Eintreten von „Index 0" kann aber auch mit Hilfe des Laplace-Beltramischen Operators $\Delta - K_{\mathrm{Gauss}}\,|x_z|^2$ untersucht werden; hierzu sei [6: S. 218] zitiert. Interessante Anwendungen des Indexsatzes findet man auch bei R. Böhme [2] bei der Frage nach Plateauschen Problemen mit vielen Lösungen.

LITERATUR

[1] Böhme, R., and A. J. Tromba: The index theorem for classical minimal surfaces. Ann. Math. (2) **113** (1981), 447—488.
[2] Böhme, R.: Plateau-Probleme mit vielen Lösungen. Arch. Math. **45** (1984), 194—205.
[3] Douglas, J.: One-sided minimal surfaces with a given boundary, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), 733—753.
[4] Lie, S.: Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Math. Ann. **14** (1878), 331 ff., und **15** (1879), 465 ff.
[5] Radó, T.: On the problem of Plateau. New York—Heidelberg: Springer-Verlag 1971.
[6] Schüffler, K.: Eine globalanalytische Behandlung des Douglasschen Problems. Man. math. 48 (1984), 189—226.
[7] Schüffler, K.: Index theory for minimal surfaces of genus 1. Part I—III. Arch. Math. 48 (1987), 250—266, 343—352 and 446—457.
[8] Schüffler, K., und F. Tomi: Ein Indexsatz für Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Math. Z. 182 (1983), 245—257.
[9] Thiel, U.: Der Indexsatz für mehrfach zusammenhängende Minimalflächen. Dissertation. Heidelberg: Universität des Saarlandes 1984.
[10] Voss, K.: Bemerkungen über spezielle Minimalflächen auf Möbius-Bändern. (erscheint demnächst)

Manuskripteingang: 11. 01. 1989

VERFASSER:

Prof. Dr. Karlheinz Schüffler
Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universität
Universitätsstr. 1
D-W-4000 Düsseldorf 1