Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (6) 1990, S. 545–563

О приближенном решении эллиптических псевдодифференциальных уравнений на гладкой замкнутой кривой

Б. А. Амосов

Für auf einer glatten Kurve vorgegebene elliptische Pseudodifferentialgleichungen wird ein numerischer Lösungsalgorithmus hergeleitet. Er beruht auf dem mit der Methode der trigonometrischen Kollokation verbundenen Gebrauch der Parametrix der entsprechenden Gleichung. Die Berechnung der ersten N Koeffizienten des die genaue Lösung approximierenden trigonometrischen Polynoms erfordert $O(N \ln N)$ arithmetische Operationen. Es wird eine optimale asymptotische Fehlerabschätzung in der Skala der Sobolewschen Räume abgeleitet, welche den aus der Anwendung von Quadraturformeln herrührenden Fehler berücksichtigt.

Предлагается алгоритм численного решения эллиптического псевдо-дифференциального уравнения на гладкой замкнутой кривой. Алгоритм основан на использовании параметрикса для соответствующего псевдодифференциального оператора в сочетании с методом тригонометрической коллокации. Для вычисления N коэффициентов тригонометрического полинома, аппроксимирующего точное решение, требуется $O(N \ln N)$ арифметических операций. Обоснована оптимальная асимптотическая оценка погрешности в шкале соболевских пространств, включающая погрешности соответствующих квадратурных формул.

We present a procedure for the numerical treatment of elliptic pseudodifferential equations on smooth closed curves using the parametrix for the corresponding pseudodifferential operators combined with the trigonometric collocation procedure. This requires $O(N \ln N)$ significant operations to find N coefficients of the trigonometric polynomial which approximates the solution. We prove that the asymptotic error estimate obtained, including the quadrature errors, is of optimal order in the scale of Sobolev spaces.

1. Введение

В настоящей статье предлагается эффективный алгоритм приближенного решения уравнений вида

$$Au = f, \tag{1.1}$$

где A — классический эллиптический псевдодифференциальный оператор на гладкой замкнутой кривой Γ. Такие уравнения возникают, в частности, при сведении на границу внутренних и внешних эллиптических краевых задач на плоскости (см., например, [1]). Этот алгоритм позволяет совместить оптимальную оценку скорости сходимости в соболевских пространствах (см. ниже формулу (1.2)) с оценкой $O(N \ln N)$ числа необходимых арифметических операций.

Вопросам приближенного решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на гладкой замкнутой кривой посвящена обширная литература. Рассматриваемый здесь класс уравнений пересекается с классом одномерных сингулярных интегральных уравнений и классом интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Различные методы и алгоритмы численного решения таких уравнений предложены, в частности, в [6—8, 10, 12, 13, 20]. Остановимся несколько подробнее на работах, в которых были изучены методы приближенного решения уравнения (1.1), позволяющие получить оптимальную оценку погрешности в шкале пространств С. Л. Соболева $H_t = W_2^t(\Gamma)$. Поясним, что здесь имеется в виду. Из оценки снизу колмогоровского поперечника компакта $\{u\colon |u|_s \leqq 1\}$ в пространстве $H_t(t < s)$ вытекает, что если $\{\mathfrak{M}_N\}$ — фиксированная последовательность N-мерных подпространств в H_t и $\{u_N\}$ с $u_N \in \mathfrak{M}_N$ — последовательность аппроксимаций функции $u \in H_s$, то оценка погрешности в соответствующих нормах, вообще говоря, не может быть лучше, чем

$$|u - u_N|_t \leqq C N^{t-s} |u|_s \tag{1.2}$$

(постоянная C характеризует аппроксимационные свойства последовательности $\{\mathfrak{M}\}_N$). Оценку такого вида естественно называть *оптимальной*. В [17] эта оценка была обоснована в случае метода Галеркина для широкого класса систем базисных подпространств $\{\mathfrak{M}_N\}$. В работах [14, 15, 21, 22] изучался метод сплайн-коллокации, для которого при различных предположениях также доказана оценка вида (1.2).

Необходимо отметить, что на практике вычисление матрицы орпеатора в методе Галеркина или значений функции $Av(v \in \mathfrak{M}_N)$ в узлах коллокации осуществляется приближенно при помощи некоторых квадратурных формул. Анализ вносимой при этом погрешности сложен и обычно не производится. Но лишь после введения квадратурных формул тот или иной метод приближенного решения уравнения (1.1) становится вычислительным *алгоритмом*, сводящим решение задачи к конечной последовательности арифметических опреаций, а следовательно, реализуемым на ЭВМ. Автору известна лишь одна публикация [18], в которой был предложен и обоснован алгоритм приближенного решения уравнения (1.1) общего вида с оптимальной оценкой погрешности (1.2) (она доказана лишь при $t = 0$), включающей погрешности соответствующих квадратурных формул. Этот алгоритм основан на методе Галеркина с тригонометрической базисной системой. Для приближенного вычисления элементов матрицы Галеркина существенно используется структура классического псевдодифференциального оператора. Но общее число арифметических операций, необходимых для отыскания приближенного решения в виде тригонометрического полинома степени N, составляет $O(N^3)$. Отметим также, что в [6] для уравнений вида (1.1) с псевдодифференциальным оператором A, имеющим не зависящий от x главный символ, построен алгоритм сплайн-аппроксимации решения с числом операций порядка N, но оценка погрешности при этом не является оптимальной.

В основе нашего алгоритма (см. пункт 5) лежит непосредственное вычисление „старших" коэффициентов фурье приближенного решения u_N при помощи параметрикса B для псевдодифференциального оператора A. Поясним, что здесь имеется в виду. Оператор B строится средствами символического исчисления в виде, удобном для вычислений, и близок к оператору A^{-1} в следующем смысле: справедлива асимптотическая формула

$$c_n(u) \sim c_n(Bf), \quad |n| \to \infty, \tag{1.3}$$

где $c_n(v) = c_n$ — коэффициенты фурье функции $v(x) = \sum c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$. Эта формула используется следующим образом. Приближенное решение ищется в виде тригонометрического полинома

$$u_N(x) = \sum_{-N/2 < n \leqq N/2} c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

причем коэффициенты c_n с $|n| > M$, где $M \sim N^{1/3}$, вычисляются при помощи формулы (1.3) (эти вычисления производятся с использованием алгоритма быстрого преобразования фурье за $O(N \ln N)$ арифметических операций). Остальные коэффициенты c_n ($|n| \leqq M$) вычисляются при помощи предлагаемого нами обобщения метода механических квадратур (см. пункт 4). Основная вычислительная работа здесь приходится на решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений: $O(M)^3$ арифметических операций. Эта оценка и диктует выбор соотношения между N и M (общее число операций не должно быть больше, чем $O(N \ln N)$).

Пункты 2 и 3 содержат постановку задачи и вспомогательные утверждения. В пункте 6 в качестве примера рассматриваются известные интегральные уравнения из теории дифракции.

Основные результаты настоящей статьи анонсированы в работах [3, 4].

2. Обозначения, постановка задачи и некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $x \in [0, 2\pi]$ — параметр на гладкой замкнутой кривой Γ. В соболевском пространстве $H_t(\Gamma) = H_t$ $(t \in \mathbb{R})$ будем пользоваться нормой

$$|u|_t = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + |n|)^{2t} |c_n(u)|^2\right\}^{1/2},$$

где $c_n(u)$ — коэффициенты фурье функции u по системе $\{e^{inx}\}$. Для нормы ограниченного оператора $A: H_t \to H_\tau$ будем использовать обозначение $\|A\|_{t,\tau}$, причем если $\tau = t$, то вместо $\|A\|_{t,t}$ будем писать $\|A\|_t$. Будем писать $\operatorname{ord} A = r$, если $\|A\|_{t,t-r} < \infty$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Классический псевдодифференциальный оператор порядка $r \in \mathbb{Z}$ на Γ можно определить как оператор, который при любом $l \geqq -r$ можно представить в виде

$$A = \sum_{j=1-l}^{r} A_j + K_{-l} = A_{r,l} + K_{-l}. \tag{2.1}$$

Здесь $\operatorname{ord} K_{-l} = -l$, A_j — *однородные* псевдодифференциальные операторы порядка j:

$$A_j = a_j(\cdot, +1)\, \Lambda_j^+ + a_j(\cdot, -1)\, \Lambda_j^-,$$

где

$$\Lambda_j^\pm u(x) = \delta_{0,j} c_0(u)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pm inx} n^j c_{\pm n}(u)$$

($\delta_{i,j}$ — символ Кронекера,) $a_j(\cdot, \pm 1) \in C^\infty(\Gamma)$. функция $a_j(x, n) = e^{-inx} A_j e^{inx}$ называется *символом* A_j. Нетрудно видеть, что это положительно однородная по n функция:

$$a_j(x, n) = a_j(x, \operatorname{sgn} n)\, |n|^j, \qquad n \neq 0, \tag{2.2}$$

кроме того, $2a_j(x, 0) = \delta_{0,j}\big(a_0(x, +1) + a_0(x, -1)\big)$.

Пример 2.1: Интегро-дифференциальный оператор

$$A_j u(x) = p_j(x)\, D_x^j u(x) + \frac{q_j(x)}{2\pi i} \text{ v. p.} \int_0^{2\pi} \cot \frac{y - x}{2}\, D_y^j\, u(y)\, dy,$$

где $D_x = -i\partial_x = -i\partial/\partial x$, а p_j, $q_j \in C^\infty(\Gamma)$, является однородным псевдодифференциальным оператором порядка j с символом $a_j(x, n) = n^j(p_j(x) + q_j(x) \operatorname{sgn} n)$.

Пример 2.2: Пусть $\mathcal{K}(x, y)$ — бесконечно гладкое при $x - y \neq 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ и 2π-периодическое по обоим переменным ядро, такое, что

$$\mathcal{K}(x, x + t) = -i(t/2\,|t|)\, p(x, t) - \pi^{-1} \ln |t|\, q(x, t) + g(x, t),$$

где p, q, g — бесконечно гладкие при $|t| < \pi$ функции. Тогда интегральный оператор

$$Ku(x) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(x, y)\, u(y)\, dy \tag{2.3}$$

является классическим псевдодифференциальным оператором порядка (не выше) -1, причем однородное слагаемое A_{-1-j} в представлении вида (2.1) оператора K имеет символ $a_{-1-j}(x, n) = n^{-1-j} D_t^j (p(x, t) + q(x, t) \operatorname{sgn} n)|_{t=0}$.

Указанные примеры фактически исчерпывают все классические псевдодифференциальные операторы целого порядка на Γ. А именно, произвольный классический псевдодифференциальный оператор порядка $r \in \mathbb{Z}$ на Γ можно (единственным образом) представить в виде

$$A = \sum_{j=0}^{r} A_j + K, \tag{2.4}$$

где A_j — интегро-дифференциальные операторы примера 2.1, а K — интегральный оператор (2.3) с описанным во втором примере ядром $\mathcal{K}$. Это ядро мы также будем называть *ядром регулярной части оператора* A. (Разумеется, при $r \leqq -1$ сумма по j в представлении A отсутствует.)

Классический псевдодифференциальный оператор A порядка r называется *эллиптическим*, если его главный символ $a_r(x, n)$ не обращается в нуль при $n \neq 0$. *Параметриксом порядка* m для псевдо-дифференциального оператора A называется такой оператор $B^{(m)}$, что $\operatorname{ord}(I - B^{(m)}A) = -m$. Параметрикс $B^{(m)}$ для эллиптического псевдодифференциального оператора A порядка r строится в виде суммы

$$B^{(m)} = B_{-r} + \cdots + B_{-r-m+1}$$

однородных псевдодифференциальных операторов B_{-r-j} с символами $b_{-r-j}(x, n)$, которые определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} b_{-r}(x, \pm 1) &= a_r^{-1}(x, \pm 1), \\ b_{-r-j}(x, \pm 1) &= -b_{-r}(x, \pm 1) \sum_{\substack{p+n+k=j \\ 0 \leqq k \leqq j}} (\pm \mathrm{i})^n / n!\, (r + k)_n \\ &\quad \times b_{-r-k}(x, \pm 1)\, \partial_x^n a_{r-p}(x, \pm 1) \qquad (j \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $(r + k)_n = (r + k)(r + k + 1) \ldots (r + k + n - 1)$. Эти формулы вытекают из теоремы о композиции двух псевдодифференциальных операторов (см., напр., [16]).

Пусть Δ_N и $\tilde{\Delta}_N$ — два разбиения отрезка $[0, 2\pi]$, состоящие из равноотстоящих узлов $x_j = x_j^{(N)} = 2\pi j N^{-1}$ и $\tilde{x}_j = x_{j-1/2} = 2\pi(j - 1/2) N^{-1}$ $(j = 1, \ldots, N)$ соответственно. Будем предполагать известными значения функций $a_j(\cdot, \pm 1)$ $(j = 1 - l, \ldots, r)$ и $b_{-r-j}(\cdot, \pm 1)$ $(j = 0, \ldots, m - 1)$ в узлах разбиения Δ_N. Будем также предполагать известными значения ядра $\mathcal{K}$ регулярной части оператора A в узлах двумерной сетки $\Delta_M \times \tilde{\Delta}_M$, где $M \sim N^{1/3}$.

Используя указанную информацию об операторе A, а также значения функции f в узлах разбиения Δ_N, мы построим за $O(N \ln N)$ арифметических операций приближенное решение u_N уравнения (1.1), удовлетворяющее оценке погрешности (1.2).

Пусть $\mathbb{Z}_N = \{n \in \mathbb{Z}: -N/2 < n \leqq N/2\}$, E_N — линейная оболочка функций $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}_N$. Введем проектор P_N на E_N формулой

$$P_N v(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} e^{inx} c_n(v).$$

Через $\tilde{P}_N v$ обозначим интерполяционный тригонометрический полином из E_N, совпадающий с непрерывной функцией v в узлах разбиения Δ_N. Очевидно, что $\tilde{P}_N$ — также проектор на E_N. Если $v \in H_t$ при $t > 1/2$, то

$$\tilde{P}_N v(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} \Big(\sum_k c_{n+kN}(v)\Big) e^{inx}. \tag{2.6}$$

Очевидны также следующие соотношения:

$$\tilde{P}_N = P_N \tilde{P}_N, \tag{2.7}$$

$$\tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi = \tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi \tilde{P}_N \qquad \big(\varphi \in C(\Gamma)\big); \tag{2.8}$$

здесь и дальше $\mathcal{M}_\varphi$ — оператор умножения на функцию φ.

Замечание 2.3: Применение алгоритма быстрого преобразования фурье позволяет вычислить все коэффициенты тригонометрического полинома $\tilde{P}_N v$ за $O(N \ln N)$ арифметических операций.

Замечание 2.4: Пусть $v \in E_N$ — тригонометрический полином, A_j — однородный псевдодифференциальный оператор с символом $a_j(x, \pm 1)$, заданным при $x \in \Delta_M$, где $M \leqq N$. Тогда значения функции $A_j v$ в точках сетки Δ_M можно найти по точным формулам за $2N + O(M \ln M)$ арифметических операции. В самом деле, в силу соотношений (2.8) имеем для $x \in \Delta_M$

$$A_j v(x) = a_j(x, +1)\,(\tilde{P}_M A_j^+ v)\,(x) + a_j(x, -1)\,(\tilde{P}_M A_j^- v)\,(x).$$

Коэффициенты тригонометрических полиномов $A_j^\pm v \in E_N$ вычисляются за N операций умножения. Согласно тождеству (2.6)

$$(\tilde{P}_M A_j^\pm v)\,(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_M} \Big(\sum_k c_{n+kM}(A_j^\pm v)\Big) e^{inx};$$

здесь для вычисления всех сумм по k необходимо не более N операций сложения. Значения этих тригонометрических полиномов из E_M на сетке Δ_M можно вычислить при помощи алгоритма быстрого преобразования фурье за $O(M, \ln M)$ арифметических операций.

Приведем необходимые в дальнейшем оценки, характеризующие действие в шкале H_t проекторов P_N, $\tilde{P}_N$, а также проекторов $Q_N = I - P_N$ и $\tilde{Q}_N = I - \tilde{P}_N$. Непосредственно проверяется, что

$$|Q_N v|_t \to 0 \quad (N \to \infty) \quad \text{при} \quad v \in H_t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

$$\|Q_N\|_{\tau,t} = O(N^{t-\tau}) \quad (N \to \infty) \quad \text{при} \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \leqq \tau, \tag{2.10}$$

$$\|P_N\|_{\tau,t} = O(1 + N^{t-\tau}) \quad (N \to \infty) \quad \text{при} \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Лемма 2.5: *Имеют место следующие соотношения:*

$$|\tilde{Q}_N v|_t \to 0 \quad (N \to \infty) \quad \textit{при} \quad v \in H_t, \quad t > 1/2, \tag{2.12}$$

$$\|\tilde{Q}_N\|_{\tau,t} = O(N^{t-\tau}) \quad (N \to \infty) \quad \textit{при} \quad \tau > 1/2, \quad 0 \leqq t \leqq \tau, \tag{2.13}$$

$$\|\tilde{P}_N\|_{\tau,t} = O(1 + N^{t-\tau}) \quad (N \to \infty) \quad \textit{при} \quad \tau > 1/2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Доказательство: Поскольку $\tilde{Q}_N = Q_N + P_N - \tilde{P}_N$, при $v \in H_\tau$ $(0 \leqq t \leqq \tau)$ имеем $|\tilde{Q}_N v|_t \leqq |Q_N v|_t + (P_N - \tilde{P}_N) v|_t$. Далее в силу (2.6)

$$|(P_N - \tilde{P}_N) v|_t^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} \Big| \sum_{k \neq 0} c_{n+kN}(v) \Big|^2 (1 + |n|)^{2t}.$$

Используя неравенство Шварца, можно показать, что правая часть этого равенства оценивается сверху величиной

$$C_\tau^2 (1 + N/2)^{2(t-\tau)} \sum_{n \notin \mathbb{Z}_N} |c_n(v)|^2 (1 + |n|)^{2\tau} = C_\tau^2 (1 + N/2)^{2(t-\tau)} |Q_N v|_\tau^2,$$

где $C_\tau^2 = \sum_{k \neq 0} |k|^{-2\tau}$. Таким образом,

$$|\tilde{Q}_N v|_t \leqq |Q_N v|_t + C_\tau (1 + N/2)^{t-\tau} |Q_N v|_\tau.$$

Отсюда и из свойств оператора Q_N вытекают первые две оценки, а последная получается при помощи соотношений (2.7), (2.13) и (2.11):

$$\|\tilde{P}_N\|_{\tau,t} = \|P_N \tilde{P}_N\|_{\tau,t} \leqq \|P_N\|_{\tau,t} + \|P_N\|_{\tau,t} \|\tilde{Q}_N\|_\tau = O(1 + N^{t-\tau}) \blacksquare$$

Следствие 2.6: *Пусть $\varphi \in C^\infty(\Gamma)$. Тогда при любом $t \geqq 0$ справедлива оценка*

$$\|\tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi P_N\|_t \leqq C \tag{2.15}$$

с постоянной $C = C_t(\varphi)$, не зависящей от N.

В самом деле,

$$\|\tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi P_N\|_t = \|\mathcal{M}_\varphi P_N - \tilde{Q}_N \mathcal{M}_\varphi P_N\|_t$$
$$\leqq \|\mathcal{M}_\varphi\|_t \|P_N\|_t + \|\tilde{Q}_N\|_{t+1,t} \|\mathcal{M}_\varphi\|_{t+1} \|P_N\|_{t,t+1}.$$

Остается воспользоваться оценками (2.13) и (2.11) $\blacksquare$

3. Метод тригонометрической коллокации

Здесь и далее будем предполагать, что эллиптический псевдодифференциальный оператор A целого порядка r обратим и $f \in H_{s-r}$, так что решение уравнения (1.1) существует, единственно и принадлежит H_s; при этом справедлива оценка $|u|_s \leqq C\,|f|_{s-r}$, где $C = \|A^{-1}\|_{s-r,s}$.

N-м приближением метода тригонометрической коллокации называется функция $u_N \in E_N$, такая, что

$$Au_N(x) = f(x), \qquad x \in \Delta_N. \tag{3.1}$$

Аппроксимации $u_N \in E_N$, предлагаемые ниже, будут удовлетворять более общей (возмущенной) системе уравнений

$$(A + \delta A)\, u_N(x) = f(x) + \delta f(x), \qquad x \in \Delta_N, \tag{3.2}$$

где δA — некоторый оператор, а δf — непрерывная функция.

Лемма 3.1: *Пусть $s - r > 1/2$, $r \leqq t \leqq s$. Тогда существуют такие положительные константы ε и N_0, что для любой непрерывной функции δf и любого оператора δA, удовлетворяющего условию $\|\tilde{P}_N \delta A\|_{t,t-r} < \varepsilon$ $(N \geqq N_0)$, система уравнений (3.2) при $N \geqq N_0$ однозначно разрешеима и справедлива оценка погрешности*

$$|u - u_N|_t \leqq C(N^{t-s} |Q_N u|_s + |\tilde{P}_N \delta A u|_{t-r} + |\tilde{P}_N \delta f|_{t-r}),$$

где постоянная C не зависит от N и u, а также от δf и δA.

Доказательство: Оно основано на представлении A в виде

$$A = \mathcal{M}_\psi \mathcal{A} + T, \tag{3.3}$$

где $\operatorname{ord} T = r - 1$, ψ — не обращающаяся в 0 функция из $C^\infty(\Gamma)$; $\mathcal{A}$ — обратимый псевдодифференциальный оператор порядка r, такой, что

$$P_N \mathcal{A} P_N = \mathcal{A} P_N, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Представление (3.3) подсказано аналогичными рассмотрениями для абстрактного сингулярного оператора в [13, гл. 11]. Приведем доказательство этой формулы, опуская некоторые детали. Положим

$$\Lambda_r u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx}(1 + |n|)^r c_n(u), \qquad P^+ u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx} c_n(u),$$

$$P^- = I - P^+.$$

Для функции $g(x) = a_r(x, +1)\, a_r^{-1}(x, -1)$ $(a_r(x, N)$ — главный символ $A)$ построим разложение $g = g_+ g_-$, где $g_\pm = \exp(P^\pm \ln g)$. Так как оператор A обратим, то $[\arg g(x)]_{-\pi}^{\pi} = \operatorname{ind} A = 0$ и $\ln g$ — определенная с точностью до несущественного слагаемого функция из $C^\infty(\Gamma)$. Положим $\Psi(x) = a_r(x, -1)\, g_+(x) = a_r(x, +1) \times g_-^{-1}(x)$. Тогда (см. (2.1)) $A_r = \mathcal{M}_\psi \mathcal{A} + T_{r-1}$, где

$$\mathcal{A} = (P^+ \mathcal{M}_{g_-} + P^- \mathcal{M}_{g_+}^{-1})\, \Lambda_r,$$

$$T_{r-1} = \mathcal{M}_\psi (\mathcal{M}_{g_-} P^+ - P^+ \mathcal{M}_{g_-} + \mathcal{M}_{g_+}^{-1} P^- - P^- \mathcal{M}_{g_+}^{-1})\, \Lambda_r.$$

Легко видеть, что $\operatorname{ord} T_{r-1} = r - 1$. Заметим теперь, что

$$c_n(g_-^{\pm 1}) = c_{-n}(g_+^{\pm 1}) = 0, \qquad n > 0. \tag{3.5}$$

Действительно, в силу определения оператора P^+ функция $P^+ \ln g$ как функция комплексного переменного $z = e^{ix}$ непрерывно продолжается до аналитической функции в круге $|z| < 1$, функция $g_+ = \exp(P^+ \ln g)$ также будет аналитической в этом круге. Отсюда следует, что $c_{-n}(g_+) = 0$ при $n > 0$. Аналогично проверяются остальные соотношения (3.5). Следствиями этих соотношений является наличие у оператора $\mathcal{A}$ обратного $\mathcal{A}^{-1} = \Lambda_{-r}(P^+ \mathcal{M}_{g_-}^{-1} + P^- \mathcal{M}_{g^+})$ и соотношения (3.4).

Используя представление (3.3), систему уравнений (3.2) можно записать в эквивалентном виде

$$[\mathcal{A} + \tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi (T + \delta A)]\, u_N = \tilde{P}_N \varphi (f + \delta f), \tag{3.6}$$

где $\varphi = \psi^{-1}$. Действительно, умножив левую и правую части этого равенства на функцию φ и воспользовавшись определением проектора P_N, соотношения (3.2) можно записать в виде

$$\tilde{P}_N [\mathcal{A} + \mathcal{M}_\varphi (T + \delta A)]\, u_N = \tilde{P}_N \varphi (f + \delta f), \qquad u_N \in E_N.$$

Это уравнение эквивалентно (3.6) в силу соотношений (3.4). Покажем, что если норма $\|\tilde{P}_N \delta A\|_{t,t-r}$ достаточно мала, то при достаточно больших N оператор в левой части уравнения (3.6) обратим как оператор из H_{t-r} в H_t. Имеем

$$\mathcal{A} + \tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi (T + \delta A) = \mathcal{M}_\varphi A - \tilde{Q}_N \mathcal{M}_\varphi T + \tilde{P}_N \mathcal{M}_\varphi \delta A.$$

Здесь оператор $\mathcal{M}_\varphi A$ обратим (обратный равен $A^{-1} \mathcal{M}_\psi$), а два других слагаемых оцениваются следующим образом. В силу (2.13)

$$\|\tilde{Q}_N \mathcal{M}_\varphi T\|_{t,t-r} \leqq \|\tilde{Q}_N\|_{t-r+1,t-r}\, \|\mathcal{M}_\varphi T\|_{t,t-r+1} = O(N^{-1}),$$

и, с учетом соотношений (2.7), (2.8) и (2.15),

$$\|\tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi\delta A\|_{t,t-r} \leqq \|\tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi P_N\|_{t-r}\,\|\tilde{P}_N\delta A\|_{t,t-r} \leqq C_1\,\|\tilde{P}_N\delta A\|_{t,t-r}.$$

Если $\|\tilde{P}_N\delta A\|_{t,t-r} \leqq \varepsilon = C_1^{-1}/2$, то при достаточно больших $N(N \geqq N_0)$

$$\|[\mathcal{A} + \tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi(T + \delta A)]^{-1}\|_{t-r,t} \leqq 2\|A^{-1}\mathcal{M}_\varphi\|_{t-r,t}.$$

Итак, при $N \geqq N_0$ система уравнений (3.2) однозначно разрешима. Для оценки погрешности вычтем из левой и правой части уравнения (3.6) функцию $[\mathcal{A} + \tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi(T + \delta A)]\,u$. После некоторых тождественных преобразований с использованием соотношений (3.4) получим

$$\begin{aligned}[\mathcal{A} + \tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi(T + \delta A)]\,(u_N - u) &= -\tilde{Q}_N\mathcal{A}u + \tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi(\delta f - \delta Au)\\ &= -\tilde{Q}_N\mathcal{A}Q_Nu + \tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi(\delta f - \delta Au).\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое справа оценивается по норме в H_{t-r} при помощи соотношения (2.13):

$$|\tilde{Q}_N\mathcal{A}Q_Nu|_{t-r} \leqq \|\tilde{Q}_N\|_{s-r,t-r}\,\|\mathcal{A}\|_{s,s-r}\,|Q_Nu|_s \leqq C_2N^{t-s}\,|Q_Nu|_s,$$

а второе — при помощи (2.7), (2.8) и (2.15):

$$\begin{aligned}|\tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi(\delta f - \delta Au)|_{t-r} &\leqq \|\tilde{P}_N\mathcal{M}_\varphi P_N\|_{t-r}\,|\tilde{P}_N(\delta f - \delta Au)|_{t-r}\\ &\leqq C_3(|\tilde{P}_N\delta f|_{t-r} + |\tilde{P}_N\delta Au|_{t-r}).\end{aligned}$$

Из этих соотношении вытекает утверждение леммы ∎

При помощи доказанной леммы легко проверяется

Теорема 3.2: *Пусть $s - r > 1/2$. Тогда существует такое число N_0, что при $N \geqq N_0$ система уравнений метода тригонометрической коллокации (3.1) однозначно разрешима для любой функции $f \in H_{s-r}$. Последовательность $\{u_N\}$ сходится к точному решению и по норме в H_s, и при $r \leqq t \leqq s$ справедлива оценка скорости сходимости $|u - u_N|_t \leqq CN^{t-s}\,|u|_s$ с постоянной C, не зависящей от N и f.*

4. Метод механических квадратур

Для реализации метода тригонометрической коллокации в виде вычислительного алгоритма необходимо иметь формулу для приближенного вычисления значений функций $(Ae_n)\,(x)$ при $n \in \mathbb{Z}_N$, $x \in \Delta_N$. Представление (2.4) оператора A подсказывает такую формулу:

$$(Ae_n)\,(x) \approx (A_1{}^{(N)}e_n)\,(x) = e^{inx}\sum_{j=0}^{r} a_j(x, n) + \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{K}(x, \tilde{x}_k)\,e^{in\tilde{x}_k}. \tag{4.1}$$

Здесь первая сумма справа в силу $a_j(x, n) = e^{-inx}A_je^{inx}$ равна той от $(A_je_n)\,(x)$ (при $r \leqq -1$ она полагается равной 0). Вторая сумма является аппроксимацией интеграла в (2.3) при помощи квадратурной формулы прямоугольников с разбиением $\tilde{\Delta}_N$; эта сумма определена при $x \notin \tilde{\Delta}_N$, в частности, при $x \in \Delta_N$. Погрешность формулы (4.1) зависит от гладкости ядра $\mathcal{K}$ и в общем случае составляет $O(N^{-1})$ (см. ниже лемму 4.1). Более точная квадратурная формула отвечает более подробному (в случае $l > 1$) представлению (2.1) оператора A:

$$(Ae_n)\,(x) \approx (A_l{}^{(N)}e_n)\,(x) = e^{inx}\sum_{j=1-l}^{r} a_j(x, n) + (2\pi/N)\sum_{k=1}^{N}\mathcal{K}_{-l}(x, \tilde{x}_k)\,e^{in\tilde{x}_k}, \tag{4.2}$$

где $\mathcal{K}_{-l}$ — ядро оператора K_{-l}. Но непосредственно эту формулу в вычислениях использовать нельзя, так как ядро $\mathcal{K}_{-l}$ при $l > 1$, вообще говоря, неизвестно. Поэтому мы приведем её к более удобному виду. А именно, покажем, что при $x \in \Delta_N$ справедливо тождество

$$\begin{aligned}(A_l{}^{(N)}e_n)(x) &= (A_1{}^{(N)}e_n)(x) \\ &+ e^{inx} \sum_{j=1-l}^{-1} \bigl(a_j(x, N)\,\theta_j(nN^{-1}) + a_j(x, -N)\,\theta_j(-nN^{-1})\bigr), \quad (4.3)\end{aligned}$$

где

$$\theta_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(x+k)^j, \qquad j = -1, -2, \ldots \quad (4.4)$$

Для этого запишем сумму по k справа в (4.2) в виде

$$(2\pi/N) \sum_{k=1}^{N} \mathcal{K}_{-l}(x, \bar{x}_k)\, e^{in\bar{x}_k} = (K_{-l}\delta_{N,n})(x), \quad (4.5)$$

где

$$\delta_{N,n}(x) = (2\pi/N) \sum_{k=1}^{N} \delta(x - \bar{x}_k)\, e^{in\bar{x}_k} \quad (4.6)$$

— обобщенная функция, принадлежащая H_τ при $\tau < -1/2$. формула (4.2) при этом принимает вид

$$A_l{}^{(N)}e_n = \sum_{j=1-l}^{r} A_j e_n + K_{-l}\delta_{N,n}. \quad (4.7)$$

Отсюда и из представлений (2.1) и (2.4) оператора A вытекает соотношение

$$A_l{}^{(N)}e_n = A_1{}^{(N)}e_n + \sum_{j=1-l}^{-1} A_j(e_n - \delta_{N,n}). \quad (4.8)$$

Заметим теперь, что

$$\delta_{N,n}(x) = \sum_k (-1)^k e^{i(n+kN)x}. \quad (4.9)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}c_m(\delta_{N,n}) &= (2\pi)^{-1}\langle \delta_{N,n}, e^{-imx}\rangle = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} e^{i(m-n)2\pi(j-1/2)N^{-1}} \\ &= \begin{cases} (-1)^{(m-n)N^{-1}}, & \text{если } m-n \text{ кратно } N, \\ 0, & \text{если } m-n \text{ не кратно } N. \end{cases}\end{aligned}$$

Воспользуемся этим разложением для $\delta_{N,n}$:

$$\begin{aligned}A_j(e_n - \delta_{N,n})(x) &= \sum_{k\neq 0} (-1)^{k+1}(A_j e_{n+kN})(x) \\ &= \sum_{k\neq 0} (-1)^{k+1} a_j(x, n+kN)\, e^{i(n+kN)x}; \quad (4.10)\end{aligned}$$

при $x \in \Delta_N$ имеем $e^{i(n+kN)x} = e^{inx}$, поэтому (см. также (2.2))

$$\begin{aligned}\bigl(A_j(e_n - \delta_{N,n})\bigr)(x) &= e^{inx} \sum_{k\neq 0} (-1)^{k+1} a_j(x, n+kN) \\ &= N^j e^{inx}\bigl(a_j(x, +1)\,\theta_j(nN^{-1}) + a_j(x, -1)\,\theta_j(-nN^{-1})\bigr), \\ x \in \Delta_N, & \quad (4.11)\end{aligned}$$

откуда с учетом соотношения (4.8) получается тождество (4.3).

Функцию $u_N \in E_N$ будем называть *N-м приближением метода механических квадратур порядка l*, если (ср. (3.1))

$$A_l^{(N)} u_N(x) = f(x), \qquad x \in \Delta_N. \tag{4.12}$$

Эти соотношения эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_N} a_{jn}^{(N)} \zeta_n = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, N, \tag{4.13}$$

где

$$\zeta_n = c_n(u_N), \qquad a_{jn}^{(N)} = (A_l^{(N)} e_n)(x_j).$$

Можно показать, что вычисление всех коэффициентов $a_{jn}^{(N)}$ требует $O(N^2 \ln N)$ арифметических операций. Как известно, для решения системы уравнений вида (4.13) нужно $O(N^3)$ арифметических операций. Тем самым общий объем вычислений, необходимых для определения коэффициентов тригонометрического полинома u_N, также составляет $O(N^3)$.

Перейдем к оценке погрешности приближений u_N. Воспользовавшись тем, что $P_N v = v$ при $v \in E_N$, запишем соотношения (4.12) в виде

$$(A + \delta A_l^{(N)})\, u_N(x) = f(x), \qquad x \in \Delta_N, \tag{4.14}$$

где

$$\delta A_l^{(N)} = (A_l^{(N)} - A)\, P_N. \tag{4.15}$$

Лемма 4.1: *При любом $\tau \geqq 0$ справедливо соотношение*

$$\|\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)}\|_\tau = O(N^{-l}), \qquad N \to \infty. \tag{4.16}$$

Доказательство: Обозначим через $\mathcal{M}_{\delta_N}$ оператор умножения на обобщенную функцию $\delta_N = \delta_{N,0}$ (см. (4.6)) и, заметив, что $\delta_{N,n} = \mathcal{M}_{\delta_N} e_N$, запишем соотношения (4.7) при $n \in \mathbb{Z}_N$ в виде

$$A_l^{(N)} P_N = \sum_{j=1-l}^{r} A_j P_N + K_{-l} \mathcal{M}_{\delta_N} P_N.$$

Отсюда и из (2.1) получим $\delta A_l^{(N)} = K_{-l}(M_{\delta_N} - I)\, P_N$. Так как $K_{-l} = A_{-l} + \cdots + A_{-l-m+1} + K_{-l-m}$ при любом $m \in \mathbb{Z}$ (см. снова (2.1)), то

$$\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)} = \sum_{j=1-l-m}^{-l} \tilde{P}_N A_j (\mathcal{M}_{\delta_N} - I)\, P_N + \tilde{P}_N K_{-l-m} (\mathcal{M}_{\delta_N} - I)\, P_N \tag{4.17}$$

(число m мы выберем несколько позже). Воспользуемся формулой (4.11) и запишем j-е слагаемое справа в виде

$$\tilde{P}_N A_j (\mathcal{M}_{\delta_N} - I)\, P_N = -N^j \tilde{P}_N (\mathcal{M}_{a_j(\cdot,+1)} P_N \Theta_{j,N}^{+} + \mathcal{M}_{a_j(\cdot,+1)} P_N \Theta_{j,N}^{-}),$$

где

$$\Theta_{j,N}^{\pm} u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} e^{inx} \theta_j(\pm n N^{-1})\, c_n(u).$$

Так как $|\theta_j(\pm n N^{-1})| \leqq 2^{-j}$ при $n \in \mathbb{Z}_N$ (см. (4.4)), то, при любом τ, $\|\Theta_{j,N}^{\pm}\|_\tau \leqq 2^{-j}$. Отсюда имеем

$$\|\tilde{P}_N A_j (\mathcal{M}_{\delta_N} - I)\, P_N\|_\tau \leqq (N/2)^j \,(\|\tilde{P}_N \mathcal{M}_{a_j(\cdot,+1)} P_N\|_\tau + \|\tilde{P}_N \mathcal{M}_{a_j(\cdot,-1)} P_N\|_\tau),$$

где нормы справа в силу (2.15) ограничены сверху не зависящей от N постоянной. Таким образом, $\|\tilde{P}_N A_j (\mathcal{M}_{\delta_N} - I)\, P_N\|_\tau = O(N^j)$, $\qquad N \to \infty$.

Зафиксируем теперь целое число $m \geqq \tau + 1$ и, воспользовавшись оценкой (2.14), запишем

$$\|\tilde{P}_N K_{-l-m}(\mathcal{M}_{\delta_N} - I) P_N\|_\tau \leqq \|\tilde{P}_N\|_{\tau+1,\tau} \| K_{-l-m}\|_{-l,\tau+1}\| (\mathcal{M}_{\delta_N} - I) P_N\|_{\tau,-l}$$
$$\leqq C_1 \|(\mathcal{M}_{\delta_N} - I) P_N\|_{\tau,-l}.$$

Здесь норма справа есть $O(N^{-l})$. В самом деле, пусть $v \in H_\tau$. При помощи формулы (4.9) запишем разложение в ряд фурье

$$(\mathcal{M}_{\delta_N} - I) P_N v = (\mathcal{M}_{\delta_N} - I) \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} c_n(v) e_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} c_n(v) (\delta_{N,n} - e_n)$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} c_n(v) \sum_{k \neq 0} (-1)^k e_{n+kN}.$$

Отсюда имеем

$$|(\mathcal{M}_{\delta_N} - I) P_N v|_{-l}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} |c_n(v)|^2 \sum_{k \neq 0} (1 + |n + kN|)^{-2l}$$
$$\leqq \sum_{n \in \mathbb{Z}_N} |c_n(v)|^2 C_l^2 N^{-2l} \leqq C_l^2 N^{-2l} |v|_\tau^2,$$

где $C_l^2 = \sum_{k \neq 0} (|k| - 1/2)^{-2l}$, поэтому $\|(\mathcal{M}_{\delta_N} - I) P_N\|_{\tau,-l} \leqq C_l N^{-l}$.

Окончательно нужное соотношение (4.16) получается из (4.17) и последних оценок ∎

Из доказанной леммы легко получается следующее

Предложение 4.2: *Пусть $r \leqq t$. Тогда $\|\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)}\|_{s,t-r} = O(N^{-l} + N^{-l-r+t-s})$ для любого $s \in \mathbb{R}$.*

Доказательство: Из формулы (4.15) следует, что $\delta A_l^{(N)} = \delta A_l^{(N)} P_N$. Поэтому $\|\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)}\|_{s,t-r} \leqq \|\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)}\|_{t-r} \|P_N\|_{s,t-r}$. Отсюда и из соотношений (2.11) и (4.16) вытекает нужная оценка ∎

Теорема 4.3: *Пусть $s - r > 1/2$, $l > -r$. Тогда существует такое число N_0, что при $N \geqq N_0$ система уравнений (4.12) метода механических квадратур порядка l однозначно разрешима для любой функции $f \in H_{s-r}$. Последовательность $\{u_N\}$ сходится к точному решению u по норме в H_s, и при $t \geqq r$ справедлива оценка скорости сходимости*

$$|u - u_N|_t \leqq C N^{t-s} |u|_s, \qquad s - l \leqq t \leqq s, \tag{4.18}$$

где постоянная C не зависит от N и f.

Доказательство: Из предложения 4.2 (при $s = t$) с учетом условия $l > -r$ следует, что $\|\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)}\|_{t,t-r} \to 0$ при $N \to \infty$; поэтому к системе уравнений (4.14) можно применить лемму 3.1 (с заменой δA на $\delta A_l^{(N)}$ и $\delta f = 0$). Из леммы вытекают однозначная разрешимость системы (4.14) и оценка погрешности

$$|u - u_N|_t \leqq C_1 (N^{t-s} |Q_N u|_s + |\tilde{P}_N \delta A_l^{(N)} u|_{t-r})$$
$$\leqq C_2 (N^{t-s} |Q_N u|_s + N^{-l} + N^{t-s-r-l}).$$

Так как $|Q_N u|_s \to 0$ при $N \to \infty$ (см. (2.9)), то отсюда при $t = s$ (с учетом неравенства $-r - l < 0$) следует, что $u_N \to u$ в H_s. Кроме того, из очевидного неравенства $|Q_N u|_s \leqq |u|_s$ вытекает оценка $|u - u_N|_t \leqq C_2 (2N^{t-s} + N^{-l}) |u|_s$ из которой получается соотношение (4.18) ∎

Замечание 4.4: Из доказательства видно, что оценка погрешности (4.18) остается справедливой и при $l = -r$, но в этом случае, вообще говоря, нет сходимости $u_N \to u$ по норме в H_s.

Следствие 4.5: *Если $f \in C^\infty(\Gamma)$, то, при любом $t \in \mathbb{R}$, $|u - u_N|_t = O(N^{-l})$, $N \to \infty$.*

5. Приближенное вычисление коэффициентов $c_n(u)$ при больших $|n|$. Оптимальный алгоритм приближенного решения уравнения (1.1)

Предложенный в предыдущем пункте алгоритм позволяет найте последовательность приближений $u_N \in E_N$, удовлетворяющую оптимальной оценке погрешности (1.2). Но число операций, необходимых для отыскания всех коэффициентов тригонометрического полинома u_N, составляет $O(N^3)$. Здесь мы обсудим алгоритм, позволяющий найти соответствующие коэффициенты за $O(N \ln N)$ арифметических операций.

Мы воспользуемся асимптотической формулой $Q_M u \sim Q_M B^{(m)} f$ $(M \to \infty)$, где $B^{(m)} = B_{-r} + \cdots + B_{-r-m+1}$ параметрикс для псевдодифференциального оператора A. Эта формула показывает, что коэффициенты фурье $c_n(u)$ при больших $|n|$ можно вычислить приближенно при помощи параметрикса, не прибегая к „дорогостоящему" методу механических квадратур.

Будем искать приближенное решение в виде зависящего от параметра M тригонометрического полинома $u_N^{(M)} \in E_N$. Пусть $0 < M \leqq N$. Положим

$$Q_M u_N^{(M)} = Q_M \tilde{P}_N B^{(m)} \tilde{P}_N f. \tag{5.1}$$

Из замечаний 2.1 и 2.2 следует, что для вычисления коэффициентов тригонометрического полинома $Q_M u_N^{(M)} (\in E_N)$ необходимо $O(N, \ln N)$ арифметических операций.

Предложение 5.1: *Пусть $s - r' > 1/2$, где $r' = \max\{0, r\}$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$|Q_M u - Q_M u_N^{(M)}|_s \to 0, \qquad M, N \to \infty; \tag{5.2}$$

$$|Q_M u - Q_M u_N^{(M)}|_t \leqq C(M^{t-s-m} + N^{t-s}) |u|_s, \qquad r' \leqq t \leqq s, \tag{5.3}$$

где постоянная C не зависит от M, N и f.

Доказательство этого предложения изложено в конце настоящего пункта.

Заметим теперь, что проекция $v = P_M u$ точного решения u на E_M удовлетворяет уравнению $Av = f - AQ_M u$. Его можно было бы решить методом механических квадратур (с числом узлов M), но значения функции $AQ_M u$ в узлах сетки Δ_M неизвестны. Поэтому, воспользовавшись тем, что при $M \to \infty$ справедливы асимптотические формулы $Q_M u \sim Q_M u_N^{(M)}$ и $AQ_M \sim A_{r,l} Q_M$ (см. (2.1)), мы заменим это уравнение на „близкое" ему

$$Av = f - A_{r,l} Q_M u_N^{(M)}. \tag{5.4}$$

Здесь значения правой части на сетке Δ_M могут быть вычислены в силу замечания 2.2 за $O(M \ln M + N)$ арифметических операций (предполагается, что коэффициенты тригонометрического полинома $Q_M u_N^{(M)}$ уже определены). Положим

$$P_M u_N^{(M)} = v_M, \tag{5.5}$$

где $v_M \in E_M$ — M-е приближение метода механических квадратур порядка l для уравнения (5.4). Это приближение (см. предыдущий раздел) можно найти за $O(M^3)$ арифметических операций. С учетом замечания о вычислении правой части уравнения (5.4) число арифметических операций, необходимых для отыскания v_M, составляет $O(M^3 + N)$.

Предложение 5.2: *Пусть $s - r' > 1/2$ и $l > -r$. Тогда $|P_M u - P_M u_N^{(M)}|_s \to 0$ при $M, N \to \infty$. Кроме того, для неотрицательных $t > r + 1/2$ справедлива оценка*

$$|P_M u - P_M u_N^{(M)}|_t \leqq C(M^{-l} + M^{t-s-r-l} + M^{t-s-m} + N^{t-s})\,|u|_s,$$

$t \leqq s$, с не зависящей от M, N и u постоянной C.

Доказательство этого предложения мы также отложим до конца этого раздела. Суммируем сказанное в следующем утверждении.

Предложение 5.3: *Число арифметических операций, необходимых для вычисления коэффициентов тригонометрического полинома $u_N^{(M)} \in E_N$, определенного в (5.1) и (5.5), составляет $O(M^3 + N \ln N)$. Если при этом $s - r' > 1/2$ и $l > -r$, то $u_N^{(M)} \to u$ по норме в H_s при $M, N \to \infty$; кроме того, для неотрицательных $t > r + 1/2$ справедлива оценка погрешности*

$$|u - u_N^{(M)}|_t \leqq C(M^{-l} + M^{t-s-r-l} + M^{t-s-m} + N^{t-s})\,|u|_s, \qquad t \leqq s,$$

где постоянная C не зависит от N, M и u.

Положим теперь

$$u_N = u_N^{(M)}, \qquad \text{где} \quad M \asymp N^{1/3}, \tag{5.6}$$

т.е. $C_1 N^{1/3} \leqq M \leqq C_2 N^{1/3}$, где постоянные C_1 и C_2 не зависят от N и M.

Теорема 5.4: *Число арифметических операций, необходимых для вычисления коэффициентов тригонометрического полинома $u_N \in E_N$, определенного в (5.6), составляет $O(N \ln N)$. Если при этом $s - r' > 1/2$ и $l > -r$, то $u_N \to u$ по норме в H_s при $N \to \infty$; кроме того, для неотрицательных $t > r + 1/2$ справедлива оценка погрешности $|u - u_N|_t \leqq CN^{t-s}\,|u|_s$, $s - \varkappa \leqq t \leqq s$, где $\varkappa = \min\{l/3, (l + r)/2, m/2\}$, а постоянная C не зависит от N и u.*

Доказательство состоит в непосредственной проверке утверждений теоремы при помощи предложения 5.3.

Замечание 5.5: Условие неотрицательности t в теореме 5.4 можно снять, если вместо (5.1) положить, например, $Q_M u_N^{(M)} = Q_M \tilde{P}_{\tilde{N}} B^{(m)} \tilde{P}_N f$, где $\tilde{N} \sim N/2$. Но доказательство предложения 5.1 становится существенно более громоздким, и мы не будем на нем останавливаться.

Раздел завершается доказательствами предложений 5.1 и 5.2.

Доказательство предложения 5.1: Запишем (см. (5.1))

$$\begin{aligned} Q_M u - Q_M u_N^{(M)} &= Q_M(I - \tilde{P}_N B^{(m)} \tilde{P}_N A)\,u \\ &= Q_M(I - B^{(m)}A + B^{(m)}\tilde{Q}_N A + \tilde{Q}_N B^{(m)} A - \tilde{Q}_N B^{(m)} \tilde{Q}_N A)\,u. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.10) получается оценка

$$\begin{aligned} &|Q_M u - Q_M u_N^{(M)}|_t \\ &\leqq C_1(M^{t-s-m}\,|u|_s + |\tilde{Q}_N A u|_{t-r}) + |\tilde{Q}_N B^{(m)} A u|_t + |\tilde{Q}_N B^{(m)} Q_N A u|_t. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Для того, чтобы получить (5.2), нужно здесь положить $t = s$ и воспользоваться соотношением (2.12), предварительно заметив, что в силу соотношения (2.13)

$$|\tilde{Q}_N B^{(m)} \tilde{Q}_N A u|_s \leqq \|\tilde{Q}_N\|_s \, \|B^{(m)}\|_{s-r,s} \, |\tilde{Q}_N A u|_{s-r} \leqq C_2 |\tilde{Q}_N A u|_s;$$

корректность ссылок на (2.12) и (2.13) обеспечивается условием $s - r' > 1/2$. Оценим теперь зависящие от N слагаемые справа в (5.7). Поскольку $s - r' > 1/2$ и $t - r \geqq 0$, то в силу соотношений (2.13) имеем

$$|\tilde{Q}_N A u|_{t-r} \leqq \|\tilde{Q}_N\|_{s-r,t-r} \, \|A\|_{s,s-r} \, |u|_s \leqq C_3 N^{t-s} \, |u|_s,$$

$$|\tilde{Q}_N B^{(m)} A u|_t + |\tilde{Q}_N B^{(m)} \tilde{Q}_N A u|_t$$

$$\leqq \|\tilde{Q}_N\|_{s,t} \, (\|B^{(m)} A\|_s + \|B^{(m)}\|_{s-r,s} \, \|\tilde{Q}_N\|_{s-r} \, \|A\|_{s,s-r}) \, |u|_s \leqq C_4 N^{t-s} \, |u|_s.$$

Отсюда и из неравенства (5.7) получается нужная оценка (5.3) ∎

Доказательство предложения 5.2: Тригонометрический полином $v_M = P_M u_N^{(M)} \in E_M$ по построению удовлетворяет системе уравнений

$$(A_l^{(M)} v_M)(x) = f(x) - (A_{r,l} Q_M u_N^{(M)})(x), \qquad x \in \Delta_M,$$

где $A_l^{(M)}$ определяется в (4.3). Эту систему можно записать в виде

$$(A + \delta A_l^{(M)}) \, v_M(x) = f(x) - (A Q_M u)(x) + \delta f(x), \qquad x \in \Delta_M, \tag{5.8}$$

где $\delta f = A Q_M u - A_{r,l} Q_M u_N^{(M)}$. Из предложения 4.2 (при $t = s$) с учетом условия $l > -r$ следует, что $\|\tilde{P}_M \delta A_l^{(M)}\|_{t,t-r} \to 0$ при $M \to \infty$; поэтому к системе уравнений (5.8) можно применить лемму 3.1 (с заменой N на M, u на v, δA на $\delta A_l^{(M)}$ и f на $f - A Q_M u$). Из этой леммы вытекает однозначная разрешимость системы (5.8) (при достаточно больших M) и оценка погрешности

$$|v - v_M|_t \leqq C_1 (M^{t-s} |Q_M v|_t + |\tilde{P}_M \delta A_l^{(M)} v|_{t-r} + |\tilde{P}_M (A Q_M u - A_{r,l} Q_M u_N^{(M)})|_{t-r}).$$

Учитывая, что $v = P_M u$ и $v_M = P_M u_N^{(M)}$, эту оценку можно переписать в виде (см. также (4.15))

$$|P_M u - P_M u_N^{(M)}|_t \leqq C_1 (|\tilde{P}_M \delta A_l^{(M)} u|_{t-r} + |\tilde{P}_M (A Q_M u - A_{r,l} Q_M u_N^{(M)})|_{t-r}).$$

Здесь первое слагаемое справа оценивается при помощи предложения 4.2:

$$|\tilde{P}_M \delta A_l^{(M)} u|_{t-r} \leqq C_2 (M^{-l} + M^{t-s-r-l}) \, |u|_s.$$

Для второго слагаемого в силу соотношений (2.14) (напомним, что $t - r > 1/2$) и (2.10) имеем (см. также (2.1))

$$|\tilde{P}_M (A Q_M u - A_{r,l} Q_M u_N^{(M)})|_{t,r}$$

$$= \left|\tilde{P}_M \big(K_{-l} Q_M u + A_{r,l} Q_M (u - u_N^{(M)})\big)\right|_{t-r}$$

$$\leqq \|\tilde{P}_M\|_{t-r} \big(\|K_{-l}\|_{t-r-l,t-r} \, \|Q_M\|_{s,t-r-l} \, |u|_s + \|A_{r,l}\|_{t,t-r} \, |Q_M (u - u_N^{(M)})|_t\big)$$

$$\leqq C_3 (M^{t-s-r-l} \, |u|_s + |Q_M u - Q_M u_N^{(M)}|_t).$$

В итоге из этих оценок (при $t = s$) и (5.2) имеем первое утверждение. Эти же оценки в комбинации с (5.3) дают второе утверждение ∎

6. Примеры

В этом разделе мы рассмотрим некоторые классические интегральные уравнения из теории дифракции. В частности, мы вычислим символы однородных слагаемых в разложении вида (2.1) для соответствующих псевдодифференциальных операторов, а также необходимые для применения предложенного в предыдущем пункте алгоритма параметриксы.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой замкнутой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta U(X) + k^2 U(X) = f(X), \qquad X \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega, \tag{6.1}$$

с условием излучения

$$\partial U/\partial r + \mathrm{i}kU = O(r^{-1}), \qquad r = |X| \to \infty. \tag{6.2}$$

Как известно (см., например, [5] или [9]), решение U удовлетворяет при $X \in \Gamma$ интегральному соотношению

$$U(X) = 2U_0(X) + 2\int_\Gamma \left((\partial G(X, Y)/\partial N_Y)\, U(Y) - G(X, Y)\, \partial U(Y)/\partial N\right) ds_Y, \tag{6.3}$$

где $G(X, Y) = (\mathrm{i}/4)\, H_0^{(2)}(k\,|X - Y|)$ — функция Грина для уравнения Гельмгольца на плоскости с условием излучения (6.2), U_0 — решение уравнения Гельмгольца (6.1) во всем пространстве $\mathbb{R}^2$ с условием излучения (6.2) (падающее поле): $U_0(X) = \int G(X, Y)\, f(Y)\, dY$. Соотношение (6.3) вместе с краевым условием вида $\mu(X)\, U(X) + \eta(X)\, \partial U(X)/\partial N = 0$ $(X \in \Gamma)$ образует систему интегральных уравнений относительно функций $U(X)$ и $\partial U(X)/\partial N (X \in \Gamma)$. Остановимся подробнее на двух частных случаях.

1. *Задача Дирихле:* $U(X) = 0$, $X \in \Gamma$. В этом случае соотношение (6.3) превращается в интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_\Gamma G(X, Y)\, \partial U(Y)/dN\, ds_Y = U_0(X), \qquad X \in \Gamma, \tag{6.4}$$

относительно функции $\partial U(X)/\partial N$. Можно показать также (см. [5]), что эта функция удовлетворяет следующему интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода:

$$\partial U(X)/\partial N + 2\int_\Gamma \left(\partial G(X, Y)/\partial N_X\right) \left(\partial U(Y)/\partial N\right) ds_Y = 2\partial U_0(X)/\partial N,$$
$$X \in \Gamma. \tag{6.5}$$

2. *Задача Неймана:* $\partial U(X)/\partial N = 0$, $X \in \Gamma$. Соотношение (6.3) в этом случае становится интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода

$$U(X) - 2\int_\Gamma \left(\partial G(X, Y)/\partial N_Y\right) U(Y)\, ds_Y = 2U_0(X), \qquad X \in \Gamma, \tag{6.6}$$

относительно функции U.

Введем на Γ параметр $x \in [0, 2\pi]$ такой, что функция z, $z(x) = X_1(x) + iX_2(x)$, принадлежит $C^\infty(\Gamma)$, причем $z'(x) \neq 0$, а обход контура производится против часовой стрелки. Тогда

$$G(X, Y) = \frac{i}{4}\, H_0^{(2)}\left(k\,|z(y) - z(x)|\right),$$

$$\frac{\partial G(X, Y)}{\partial N_X} = \frac{ik}{4} \frac{H_1^{(2)}(k\,|z(y) - z(x)|)}{|z(y) - z(x)|} \frac{\operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(y) - z(x)}\right) z'(x)\right]}{|z'(x)|},$$

$$\frac{\partial G(X, Y)}{\partial N_Y} = -\frac{ik}{4} \frac{H_1^{(2)}(k\,|z(y) - z(x)|)}{|z(y) - z(x)|} \frac{\operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(y) - z(x)}\right) z'(y)\right]}{|z'(y)|}$$

где $H_1^{(2)}(\tau) = -dH_0^{(2)}(\tau)/d\tau$. Положим $u(x) = U(X(x))$, $v(x) = (\partial U(X(x))/\partial N)\,|z'(x)|$. Тогда уравнения (6.4)—(6.6) переписываются в виде

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{K}^{(1)}(x, y)\, v(y)\, dy = u_0(x), \tag{6.4'}$$

где

$$\mathcal{K}^{(1)}(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k\,|z(y) - z(x)|),$$

$$v(x) + \int_0^{2\pi} \mathcal{K}^{(2)}(x, y)\, v(y)\, dy = 2v_0(x), \tag{6.5'}$$

где

$$\mathcal{K}^{(2)}(x, y) = \frac{ik}{2} \frac{H_1^{(2)}(k\,|z(y) - z(x)|)}{|z(y) - z(x)|} \operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(y) - z(x)}\right) z'(x)\right],$$

и

$$u(x) + \int_0^{2\pi} \mathcal{K}^{(3)}(x, y)\, u(y)\, dy = 2u_0(x), \tag{6.6'}$$

где

$$\mathcal{K}^{(3)}(x, y) = \frac{ik}{2} \frac{H_1^{(2)}(k\,|z(y) - z(x)|)}{|z(y) - z(x)|} \operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(y) - z(x)}\right) z'(y)\right].$$

Для изучения ядер $\mathcal{K}^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3)$ нам понадобится представление функции Ганкеля $H_0^{(2)}$ в виде

$$H_0^{(2)}(\tau) = (2/\pi i) \ln \tau \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \tau^{2n}/4^n (n!)^2 + \varphi(\tau^2),$$

где $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (см., например, [11]). Из его следует, в частности, что

$$\tau^{-1} H_1^{(2)}(\tau) = (1/\pi i) \ln \tau \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \tau^{2n}/4^n n!(n+1)! + \tau^{-2} \psi(\tau^2),$$

где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Отметим также, что функции

$$\left|\frac{z(y) - z(x)}{y - x}\right|, \quad \frac{\operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(y) - z(x)}\right) z'(x)\right]}{(y - x)^2}, \quad \frac{\operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(y) - z(x)}\right) z'(y)\right]}{(y - x)^2}$$

бесконечно дифференцируемы при $|y - x| < 2\pi$. Это видно из разложений (6.8)—(6.10) (см. ниже). Используя сказанное, нетрудно показать, что функции $\mathcal{K}^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3)$ являются бесконечно гладкими при $x - y \neq 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ и допускают представление

$$\mathcal{K}^{(s)}(x, x + t) = -(1/\pi) \ln |t|\, q_s(x, t) + g_s(x, t),$$

где функции q_s и g_s бесконечно дифференцируемы при $|t| < 2\pi$, причем

$$2q_1(x, t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(k\,|z(x+t) - z(x)|\right)^{2n}}{4^n(n!)^2},$$

$$2q_2(x, t) = -k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(k\,|z(x+t) - z(x)|\right)^{2n}}{4^n n!(n+1)!} \operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(x+t) - z(x)}\right) z'(x)\right],$$

$$2q_3(x, t) = -k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(k\,|z(x+t) - z(x)|\right)^{2n}}{4^n n!(n+1)!} \times \operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(x+t) - z(x)}\right) z'(x+t)\right].$$

Таким образом (см. пример 2.2), интегральный оператор $K^{(s)}$ с ядром $\mathcal{K}^{(s)}$ является классическим псевдодифференциальным оператором порядка (не выше) -1, причем слагаемое A_{-1-j} ($j = 0, 1, 2, \ldots$) в представлении вида (2.1) оператора $K^{(s)}$ имеет символ $a_{-1-j}^{(s)}(x, n) = |n|^{-1} n^{-j} D_t^j q_s(x, t)|_{t=0}$. Найдем их. Для этого построим разложение функций q_s в ряды по степеням t. Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\varrho(x) = |z'(x)|^2, \qquad \alpha(x) = |z'(x)|^2\, d\left(\arg z'(x)\right)/dx \tag{6.7}$$

(имеется в виду произвольная фиксированная ветвь многозначной функции Arg). Несложные вычисления показывают, что

$$|z(x+t) - z(x)|^2 = \varrho(x)\, t^2 + \frac{1}{2}\, \varrho'(x)\, t^3 + \cdots, \tag{6.8}$$

$$\operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(x+t) - z(x)}\right) z'(x)\right] = -\frac{1}{2}\, \alpha(x)\, t^2 - \frac{1}{6}\, \alpha'(x)\, t^3 + \cdots; \tag{6.9}$$

$$\operatorname{Im}\left[\left(\overline{z(x+t) - z(x)}\right) z'(x+t)\right] = \frac{1}{2}\, \alpha(x)\, t^2 + \frac{1}{3}\, \alpha'(x)\, t^3 + \cdots \tag{6.10}$$

Эти разложения можно продолжать, вычисляя дальнейшие коэффициенты (они также выражаются через функции ϱ, α и их производные). Пользуясь этими разложениями, нетрудно получить

$$q_1(x, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\, k^2 \varrho(x)\, t^2 + \frac{1}{16}\, k^2 \varrho'(x)\, t^3 + \cdots,$$

$$q_2(x, t) = \frac{1}{4}\, k^2 \alpha(x)\, t^2 + \frac{1}{12}\, k^2 \alpha'(x)\, t^3 + \cdots,$$

$$q_3(x, t) = -\frac{1}{4}\, k^2 \alpha(x)\, t^2 - \frac{1}{6}\, k^2 \alpha'(x)\, t^3 + \cdots$$

Эти разложения при желании также можно продолжить.

Итак, уравнения (6.4)—(6.6) можно записать соответственно в виде

$$K^{(1)} v = u_0, \tag{6.4''}$$

$$(I + K^{(2)})\, v = 2v_0, \tag{6.5''}$$

$$(I + K^{(3)})\, u = 2u_0. \tag{6.6''}$$

Операторы слева в этих уравнениях являются классическими псевдодифференциальными операторами, причем $r_1 = \operatorname{ord} K^{(1)} = -1, r_s = \operatorname{ord}(I + K^{(s)}) = 0$, $s = 2, 3$. Они имеют следующие разложения вида (2.1) (при $l = 5$):

$$K^{(1)} = A^{(1)}_{-1} + A^{(1)}_{-3} + A^{(1)}_{-4} + K^{(1)}_{-5},$$

$$I + K^{(s)} = I + A^{(s)}_{-3} + A^{(s)}_{-4} + K^{(s)}_{-5}, \qquad s = 2, 3;$$

здесь

$$a^{(1)}_{-1}(x, n) = -\frac{1}{2}|n|^{-1}, \qquad a^{(1)}_{-3}(x, n) = -\frac{1}{4}k^2\varrho(x)|n|^{-3},$$

$$a^{(1)}_{-4}(x, n) = \frac{3}{8}ik^2\varrho'(x)\,n\,|n|^{-5},$$

$$a^{(2)}_{-3}(x, n) = -\frac{1}{2}k^2\alpha(x)|n|^{-3}, \qquad a^{(2)}_{-4}(x, n) = \frac{1}{2}ik^2\alpha'(x)\,n\,|n|^{-5},$$

$$a^{(3)}_{3-}(x, n) = \frac{1}{2}k^2\alpha(x)|n|^{-3}, \qquad a^{(3)}_{-4}(x, n) = -ik^2\alpha'(x)\,n\,|n|^{-5}.$$

Эти разложения мы используем для приближенного решения уравнений (6.4)″ до (6.6)″ при помощи предложенного в предыдущем пункте алгоритма. Выпишем параметриксы порядка $m = 4$, необходимые для его реализации. Параметрикс порядка 4 для оператора $K^{(1)}$ имеет вид $B_1 + B_{-1} + B_{-2}$; символы b_j однородных слагаемых B_j вычисляются при помощи формул (2.5): $b_1(x, n) = -2|n|$, $b_{-1}(x, n) = k^2\varrho(x)|n|^{-1}$, $2b_{-2}(x, n) = -5ik^2\varrho'(x)\,n\,|n|^{-3}$. Легко видеть, что оператор $I - A^{(s)}_{-3}$ является параметриксом порядка 4 для $I + K^{(s)}(s = 2, 3)$.

В заключение интересно проанализировать, какое из двух уравнений (6.4)′ и (6.5)′ удобнее для отыскания функции v. При одинаковой степени подробности описания соответствующих псевдодифференциальных операторов ($l = 5$, $m = 4$) в рамках предложенного нами алгоритма достижима оценка скорости сходимости (см. теорему 5.4) $|v - v_N|_t \leqq CN^{t-s}|v|_s$, $s - 5/3 \leqq t \leqq s$. При этом в случае уравнения (6.5)′ дополнительно предполагается, что $t > 1/2$ (для уравнения (6.4)′ достаточно неотрицательности t). Кроме того, для работы с интегральным уравнением (6.4)′ требуется меньше информации о контуре Γ (функция ϱ выражается через z', а функция α — через z' и z'', см. (6.7)). Последнее обстоятельство особенно существенно в том случае, когда контур задан не аналитически, а известны лишь координаты некоторого конечного набора (массива) точек на Γ.

ЛИТЭРАТУРА

[1] Агранович, М. С.: Спектральные свойства задач дифракции. Добавление к кн.: Войтович, Н. Н., Каценеленбаум, Б. З., и А. Н. Сивов: Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракций. Москва: Изд-во Наука 1977.

[2] Агранович, М. С.: Об эллиптических псевдодифференциальных операторах на замкнутой кривой. Труды Моск. мат. об-ва 47 (1984), 22—67.

[3] Амосов, Б. А.: Приближенное решение эллиптических псевдо-дифференциальных уравнений на гладкой замкнутой кривой. Успехи мат. наук 40 (1985) 3, 215 до 216.

[4] Амосов, Б. А.: Об одном алгоритме приближенного решения интегральных уравнений теории дифракции. Радиотехника и электроника 32 (1987), 490—497.

[5] Ваганов, Р. Б., и Б. З. Каценеленбаум: Основы теории дифракции. Москва: Изд-во Наука 1982.
[6] Гребенников, А. И.: Методы сплайн-коллокации и двойной сплайн-аппроксимации решения операторных уравнений и приложение к решению интегральных уравнений с особенностями. В кн.: Методы и алгоритмы в численном анализе (ред.: Н. С. Бахвалов). Москва: Изд-во Моск. Гос. Ун-та 1984, 141—153.
[7] Емельянов, К. В., и А. М. Ильин: О числе арифметических операций при решении интегрального уравнения II рода. Ж. выч. мат. и мат. физ. 7 (1967), 905—910.
[8] Иванов, В. В.: Об оптимальных алгоритмах численного решения сингулярных интегральных уравнений. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (ред.: Л. И. Седов). Москва: Изд-во Наука 1972, 209—219.
[9] Колтон, Д., и Р. Кресс: Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. Москва: Изд-во Мир 1987.
[10] Мокин, Ю. И.: Многосеточный метод для интегральных уравнений. Вести. Моск. ун-та. Выч. мат. и киб. 4 (1986), 15—19.
[11] Никофоров, А. Ф., и В. Б. Уваров: Специальные функции математической физики. Москва: Изд-во Наука 1984.
[12] Переверзев, С. В.: Об оптимизации приближенных методов решения интегральных уравнений. Докл. Акад. Наук СССР 287 (1986), 58—62.
[13] Прёсдорф, З.: Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва: Изд-во Мир 1979.
[14] Прёсдорф, З.: Принцип локализации в теории методов конечных элементов и некоторые приложения. В сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными (ред.: С. Г. Годунов и Ю. Г. Решетняк). Новосибирск: Изд-во Наука 1986, 160—167.
[15] Arnold, D., and W. L. Wendland: The convergence of spline collocation for strongly elliptic equations on curves. Numer. Math. 47 (1985), 317—341.
[16] Elschner, J.: Singular ordinary differential operators and pseudodifferential equations. Berlin: Akademie-Verlag 1985.
[17] Hsiao, G. C., and W. L. Wendland: The Aubin-Nitshe lemma for integral equations. J. Int. Equ. 3 (1981), 299—315.
[18] Lamp, U., Schleicher, K.-T., and W. L. Wendland: The fast Fourier transform and the numerical solution of one-dimensional boundary integral equations. Numer. Math. 47 (1985), 15—38.
[19] Prössdorf, S., and B. Silbermann: Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. 12). Leipzig: Teubner Verlagsges. 1977.
[20] Rathsfeld, A.: Quadraturformelverfahren für eindimensionale singuläre Integralgleichungen. In: Seminar Analysis — Operator equat. and numer. anal. 1985/86 (Eds.: S. Prößdorf and B. Silbermann). Berlin: Karl-Weierstraß-Institut für Math., Akad. Wiss. DDR 1986, 147—186.
[21] Saranen, J., and W. L. Wendland: On the asymptotic convergence of collocation methods with spline functions of even degree. Math. Comput. 45 (1985), 91—108.
[22] Schmidt, G.: On ε-collocation for pseudodifferential equations on a closed curve. Math. Nachr. 126 (1986), 183—196.

Manuskripteingang: 19. 10. 1988

VERFASSER:

Д-р Борис Авенирович Амосов
Московский институт электронного машиностроения
Б. Вузовский пер. 3/12
СССР — 109028 Москва