Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 9 (6) 1990, S. 579–583

Die Gleichgewichtsform eines Ferrofluid-Tropfens in zweiter Näherung

K. Beyer

Herrn Prof. Dr. Lothar Berg zum 60. Geburtstag gewidmet

Die Arbeit enthält die Herleitung einer in zweiter Ordnung gültigen Näherungsformel für die Form eines Ferrofluid-Tropfens in einem homogenen Magnetfeld.

В работе содержится вывод приближенной формулы второго порядка описывающей форму капли ферромагнитной жидкости в однородном магнитном поле.

The paper contains the deduction of a second-order approximate formula for the shape of a ferrofluid drop in a homogeneous magnetic field.

1. In dieser Arbeit leiten wir als Ergänzung zu den Überlegungen in [1] eine in zweiter Ordnung gültige Näherungsformel für die Form eines Ferrofluid-Tropfens in einem homogenen Magnetfeld her. Die freie Oberfläche S des (inkompressiblen) Tropfens ist durch das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\alpha S' + E_{\mathrm{m}}' - \lambda \Omega' = 0 \tag{1}$$

bestimmt, wobei $\alpha > 0$ die Oberflächenspannung, S die Oberfläche und Ω das Volumen des Tropfens sowie E_{m} die freie magnetische Energie bezeichnen. Bei linearem Zusammenhang zwischen Feldstärke und Magnetisierung $\vec{M}$ ist E_{m} gemäß

$$E_{\mathrm{m}} = -(H/2) \int_{\Omega} \vec{M}\, \nabla z \, dx \tag{2}$$

zu berechnen [2]; $H\, \nabla z$ beschreibt das freie Parallelfeld. Die Einführung des Lagrangeschen Multiplikators λ in (1) trägt der Volumenkonstanz der tatsächlichen Vergleichskonfigurationen Rechnung. Im folgenden schreiben wir die Volumina mit $\Omega = 4\pi/3$ vor. Wie in (1) und (2) werden S und Ω in diesem Text sowohl zur Bezeichnung einer Menge als auch ihres Maßes benutzt.

Nach Satz 1 [1] lassen sich die (bis auf Translationen) eindeutig bestimmten Lösungen von (1) nach dem voraussetzungsgemäß kleinen Quotienten $\varepsilon = H^2/4\pi\alpha$ analytisch entwickeln. Genauer: Parametrisiert man die zur Konkurrenz gelangenden Flächen durch

$$S = \{(1 + u(x))\, x : x = (x, y, z) \in S^2\}, \tag{3}$$

dann gilt $u = \sum \varepsilon^n u_n$. Unter der Voraussetzung $s > 2$ konvergiert die Reihe bezüglich der Sobolev-Metrik $\|u; H^s(S^2)\| = (\|\Lambda^s u; L^2(S^2)\|^2 + \|u; L^2(S^2)\|^2)^{1/2}$. In dieser Vorschrift bedeutet $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ und

$$\Delta = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

den Laplace-Operator der Sphäre S^2, bezogen auf die Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

Die Lösungsflächen besitzen neben einer horizontalen Symmetrieebene Rotationssymmetrie bezüglich der z-Achse.

Wir berechnen hier neben dem schon in [1] angegebenen u_1 (dort mit einem fehlerhaften Faktor) auch den zweiten Koeffizienten u_2 der obigen Reihenentwicklung.

2. Wir beginnen mit den Entwicklungen für Oberfläche

$$\begin{aligned} S = S(u) &= \int_{S^2} (1+u)^2 \left(1 + |\nabla u|^2/(1+u)^2\right)^{1/2} dS^2 \\ &= 4\pi + \int_{S^2} (2u + u^2 + 2^{-1} |\nabla u|^2)\, dS^2 + O(u^4) \end{aligned}$$

(der Gradient bezieht sich hier sowie später an entsprechender Stelle auf die Sphäre S^2) und Volumen $\Omega = \int_{S^2} (1+u)^3\, dS^2/3$ der Figur (3).

Die magnetische Energie (2) läßt sich durch den Minimalwert E des (bei fixiertem u) quadratischen Variationsproblems

$$2^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \mu\, |\nabla\psi|^2\, dx + (\mu - 1) \int_{\Omega} \partial\psi/\partial z\, dx \to \mathrm{Min} \tag{4}$$

wie folgt ausdrücken (s. [1]):

$$E_m = -H^2(\chi\Omega/2 + E/4\pi) \quad \text{mit} \quad E = -2^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} \mu\, |\nabla\psi|^2\, dx. \tag{5}$$

$\chi = (\mu - 1)/4\pi$ ist die nach Voraussetzung konstante magnetische Suszeptibilität des Ferrofluids. Vereinbarungsgemäß ist bei der Integration über das (nichtmagnetische) Komplementärgebiet $\complement\bar{\Omega}$ stets μ gleich eins zu setzen. Zur Entwicklung von E: $E = E(0) + \langle E'(0), u\rangle + 2^{-1}E''(0)\,\{u^2\} + O(u^3)$ ist neben der Konfiguration u (bzw. $S = S(u)$) eine zu $u + tv$ gehörige Schar $S_t = S(u + tv)$ von Nachbarflächen einzuführen. Das nach (4) zu konstruierende Magnetfeld zu S_t sei $\psi(t, x)$. Seine partiellen Ableitungen $\partial\psi/\partial t$ nach der Variablen t bezeichnen wir abkürzend mit $\dot\psi$: $\dot\psi(x) = \partial\psi(0, x)/\partial t$. Wie die Felder ψ hängen die Funktionen $\dot\psi$ von der Konfiguration u ab, dazu tritt zusätzlich die (lineare) Abhängigkeit von ihrer Variation v. Im Text sind diese Variablen dem jeweiligen Zusammenhang zu entnehmen. Mit oberen Signaturen kennzeichnen wir schließlich die Einschränkungen $\psi^- = \psi_{|\Omega}$, $\psi^+ = \psi_{|\complement\bar{\Omega}}$ auf Ω bzw. $\complement\bar{\Omega}$ und ihre Grenzwerte längs S.

Die erste Variation des Minimalwertes E ist durch Differentiation des Integrals $E(u + tv)$ zu bestimmen:

$$\langle E'(u), v\rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} \mu\, \nabla\psi\, \nabla\dot\psi\, dx - 2^{-1} \int_S (\mu\, |\nabla\psi^-|^2 - |\nabla\psi^+|^2)\,(1+u)^2\, v\, dS^2. \tag{6}$$

Ähnlich folgt aus den Variationsgleichungen

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu\, \nabla\psi\, \nabla\varphi\, dx + (\mu - 1) \int_{\Omega} \partial\varphi/\partial z\, dx = 0 \tag{7}$$

zu (4) durch Differentiation

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mu\, \nabla\dot\psi\, \nabla\varphi\, dx + \int_S (\mu\, \nabla\psi^- - \nabla\psi^+ + (\mu - 1)\, \nabla z)\, \nabla\varphi (1+u)^2\, v\, dS^2 = 0. \tag{8}$$

Zu (7) gehören die Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus S, \\ &\psi^- - \psi^+ = 0, \qquad \mu\, \partial\psi^-/\partial n - \partial\psi^+/\partial n + (\mu - 1)\, \partial z/\partial n = 0 \quad \text{längs } S, \end{aligned} \tag{9}$$

aus denen im Spezialfall $u = 0$

$$\psi^- = Ar\cos\vartheta, \qquad \psi^+ = (A/r^2)\cos\vartheta \qquad \text{mit } A = (1-\mu)/(2+\mu) \tag{10}$$

folgt. Allgemein gilt wegen der Sprungrelationen: In (8) ist die Linearform

$$\varphi \to \int_S \nabla\big(\mu\psi^- - \psi^+ + (\mu - 1)\, z\big)\, \nabla\varphi (1 + u)^2\, v\, dS^2$$

nur von den Randwerten $\varphi_{|S}$ abhängig. Das impliziert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mu\, \nabla\dot\psi\, \nabla\psi\, dx = -2^{-1} \int_S \nabla\big(\mu\psi^- - \psi^+ + (\mu - 1)\, z\big) \\ \times \nabla(\psi^- + \psi^+)\, (1 + u)^2\, v\, dS^2, \end{aligned}$$

wonach (6) in der Form

$$\langle E'(u), v\rangle = 2^{-1}(\mu - 1) \int_S (\nabla\psi^-\, \nabla\psi^+ + \psi_z^- + \psi_z^+)\, (1 + u)^2\, v\, dS^2 \tag{11}$$

geschrieben werden kann.

Erneute Differentiation führt zur zweiten Variation, deren Werte wir hier nur für $u = 0$ notieren:

$$\begin{aligned} E''(0)\, \{v, w\} = 2^{-1}(\mu - 1) \int_{S^2} \big(&\nabla\dot\psi^-\, \nabla\psi^+ + \nabla\psi^-\, \nabla\dot\psi^+ + \dot\psi_z^- + \dot\psi_z^+ \\ &+ w\, \partial/\partial r(\nabla\psi^-\, \nabla\psi^+ + \psi_z^- + \psi_z^+) \\ &+ 2w(\nabla\psi^-\, \nabla\psi^+ + \psi_z^- + \psi_z^+)\big)\, v\, dS^2. \end{aligned} \tag{12}$$

In dieser Formel ist $\dot\psi$ zur Variation w zu bilden; im Hinblick auf (8), (9) ist dazu das Kopplungsproblem

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus S^2, \\ &\mu\, \partial\dot\psi^-/\partial n - \partial\dot\psi^+/\partial n = \operatorname{div}\big(w\, \nabla(\mu\psi^- - \psi^+ + (\mu - 1)\, z)\big), \\ &\dot\psi^- - \dot\psi^+ = w(\partial\psi^+/\partial n - \partial\psi^-/\partial n) \quad \text{längs } S^2 \end{aligned} \tag{13}$$

zu lösen (div und ∇ beziehen sich auf die Sphäre S^2).

Die Nebenbedingung $\Omega(u) = 4\pi/3$ ist (lokal) äquivalent zu

$$u = v + f(v)\, 1_{|S^2}, \qquad v \in 1_{|S^2}^{\perp} \tag{14}$$

mit $f(v) = -\int_{S^2} (v^2 + v^3/3)\, dS^2/4\pi + O(v^4)$. Führen wir (14) in unsere Entwicklungen ein

$$\tilde S(v) = S\big(v + f(v)\, 1\big) = 4\pi + \int_{S^2} \big(2^{-1}\, |\nabla v|^2 - v^2 - (2/3)\, v^3\big)\, dS^2 + O(v^4),$$

$$\begin{aligned} \tilde E(v) &= E\big(v + f(v)\, 1\big) \\ &= E(0) + \langle E'(0), v\rangle \\ &\quad - (4\pi)^{-1}\, \langle E'(0), 1\rangle \int_{S^2} v^2\, dS^2 + 2^{-1} E''(0)\, \{v^2\} + O(v^3), \end{aligned}$$

dann geht die Gleichgewichtsbedingung (1) in

$$\tilde{S}'(v) - \varepsilon \tilde{E}'(v) = 0, \qquad \varepsilon = H^2/4\pi\alpha, \tag{15}$$

über; man beachte (5).

Bemerkung: (15) kann durch die Gleichungen

$$\langle \tilde{S}'(v) - \varepsilon E'(v), w \rangle = 0 \qquad \text{für alle} \quad w \in 1^\perp \cap L^\perp \tag{16}$$

ersetzt werden, wobei L die lineare Hülle der Funktionen $x_{i|S^2}$ $(i = 1, 2, 3)$ bereichnet.

Beweis: Mit der Abkürzung $F = S - \varepsilon E$ folgt aus (15)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle F'(u), w + f'(v)\{w\}\, 1 \rangle = \langle F'(u), w \rangle + f'(v)\{w\} \langle F'(u), 1 \rangle \\ &= \langle F'(u), w \rangle - \lambda \langle \Omega'(u), w \rangle \qquad \text{für} \quad w \in L^\perp \end{aligned}$$

und $\lambda = F'(u)\, 1/\Omega'(u)\, 1$. Die restlichen Gleichgewichtsbedingungen

$$\langle F'(u) - \varepsilon \Omega'(u), x_{i|S^2} \rangle = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sind wegen der Translationsinvarianz der beteiligten Funktionale automatisch erfüllt. In der Tat gilt für translationsinvariantes J

$$\langle J'(u), x_i - \nabla x_i \nabla u/(1 + u) \rangle = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

identisch in u, woraus $\langle J'(u), x_i \rangle = 0$ folgt, sofern $\langle J'(u), w \rangle = 0$ für $w \in L^\perp$ zutrifft ∎

Nach [1] besitzt (16) eine eindeutig bestimmte Lösung $v \in 1^\perp \cap L^\perp$ mit der Entwicklung $v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + O(\varepsilon^3)$, $v_i \in 1^\perp \cap L^\perp$. Einsetzen und Koeffizientenvergleich führt zu

$$\int_{S^2} (\nabla v_1 \nabla w - 2 v_1 w)\, dS^2 = \langle E'(0), w \rangle, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} (\nabla v_2 \nabla w - 2 v_2 w)\, dS^2 &= g(w) \\ &= \int_{S^2} \big(2 v_1^2 - (2\pi)^{-1} v_1 E'(0)\, 1\big)\, w\, dS^2 + E''(0)\{v_1, w\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Da nach (10), (11)

$$\langle E'(0), v \rangle = 2^{-1} A^2 \int_{S^2} \big(6 P_2(\cos\vartheta) - (\mu + 2)\big)\, v\, dS^2$$

gilt (P_i sind die Legendreschen Polynome), bedeutet (17), daß

$$-\Delta v_1 - 2 v_1 = 3 A^2 P_2(\cos\vartheta), \qquad \text{d. h.} \quad v_1 = (3/4)\, A^2 P_2(\cos\vartheta)$$

ist. v_2 ist in zwei Schritten zu berechnen:

1. Lösung des Kopplungsproblems (13)

$$\Delta \dot\psi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \setminus S^2,$$

$$\mu \frac{\partial \dot\psi^-}{\partial n} - \frac{\partial \dot\psi^+}{\partial n} = 3A \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (v_1 \sin^2\vartheta) = \frac{9}{20} A^3 (-2P_1 + 12 P_3),$$

$$\dot\psi^- - \dot\psi^+ = -3 v_1 \cos\vartheta = -(9/20)\, A^3 (2P_1 + 3P_3).$$

Die Lösung lautet

$$\dot\psi^- = -\frac{27}{10}\frac{A^3}{\mu+2} rP_1, \qquad \dot\psi^+ = -\frac{9}{10} A^3 \left(\frac{A}{r^2} P_1 - \frac{3}{2}\frac{P_3}{r^4}\right).$$

2. Einsetzen in (12) bzw. (18):

$$\begin{aligned} E''(0)\{v_1, w\} &= E''(0)\{w, v_1\} \\ &= 2^{-1}(\mu-1) \int_{S^2} \big(\dot\psi_z^-\psi_z^+ + \psi_z^-\dot\psi_z^+ + \dot\psi_z^- + \dot\psi_z^+ \\ &\quad + v_1(\partial/\partial z + 2)(\psi_z^-\psi_z^+ + \psi_z^- + \psi_z^+)\big)\, w\, dS^2 \\ &= 3A^4 \int_{S^2} \left(\frac{27}{10} P_4 - \frac{3}{4} P_2^2 - \left(\frac{2+\mu}{4} + \frac{9}{5} A\right) P_2\right) w\, dS^2, \end{aligned}$$

(für $w \in I^\perp$) bzw.

$$g(w) = 9A^4 \int_{S^2} \left(\frac{117}{140} P_4 - \left(\frac{1}{28} + \frac{3}{5} A\right) P_2\right) w\, dS^2.$$

Von (18) lesen wir jetzt

$$v_2 = \frac{9}{4} A^4 \left(\frac{13}{70} P_4 - \left(\frac{1}{28} + \frac{3}{5} A\right) P_2\right)$$

ab. Faßt man die Entwicklungen für v und u zusammen, so folgt endgültig

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{4} A^2 \varepsilon P_2(\cos\vartheta) \\ &\quad + \frac{9}{4} A^4 \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{20} - \left(\frac{1}{28} + \frac{3}{5} A\right) P_2(\cos\vartheta) + \frac{13}{70} P_4(\cos\vartheta)\right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

LITERATUR

[1] Beyer, K.: Gleichgewichtsfiguren magnetischer Flüssigkeiten. Z. Anal. Anw. 7 (1988), 67–76.

[2] Landau, L. D., und E. M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. VIII. Berlin: Akademie-Verlag 1974.

Manuskripteingang: 21. 04. 1989

VERFASSER:

Prof. Dr. Klaus Beyer
Fachbereich Mathematik der Universität
Augustusplatz 6
D-O-7010 Leipzig