Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 1, p. 27–42

Об асимптотике функции Грина и ядер Пуассона смешанной параболической задачи в конусе II[1])

В. А. Козлов

Es werden allgemeine Randwertaufgaben für $2b$-parabolische Gleichungen im mehrdimensionalen Kegel betrachtet. Für die Greenschen Funktionen und die Poissonschen Kerne werden punktweise Abschätzungen und asymptotische Darstellungen sowohl in der Nähe des Kegelscheitels als auch für $t \to \infty$ hergeleitet.

Рассматриваются общие краевые задачи для $2b$-параболических уравнений в многомерном конусе. Получены точечные оценки, а также асимптотики вблизи вершины конуса и при $t \to \infty$ для функций Грина и ядер Пуассона.

General boundary value problems for $2b$-parabolic equations in a multidimensional cone are considered. Pointwise estimates as well as asymptotics near the vertex of the cone and as $t \to \infty$ are obtained for the Green functions and the Poisson kernels.

Настоящая статья является продолжением работы [4], посвященной изучению асимптотического поведения решений $2b$-параболической задачи в конусе. Здесь найдены полные асимптотические разложения функции Грина $G(x, y, t)$ и ядер Пуассона $P_q(x, y', t)$ соответственно в зонах $t^{1/2b} \gg \min(|x|, |y|)$, $t^{1/2b} \gg \min(|x|, |y'|)$. Из них, в частности, вытекают асимптотики при $t \to \infty$ или вблизи конической точки при фиксированном t. Как следствие получаются точечные оценки для G и P_q. Эти оценки и асимптотики вместе с представлением решения начально-краевой параболической задачи, найденным в пункте 4.9, могут быть использованы, например, при исследовании разрешимости в классах L_p^1 и Гёльдера и асимптотических свойств решений этой задачи.

Остановимся кратко на структуре работы. В пункте 4.1 даются определения функции Грина и ядер Пуассона. Их существование устанавливается в пункте 4.2. В пункте 4.3 приводятся основные результаты работы (теоремы 4.1 и 4.2), которые доказываются в пунктах 4.4—4.7. Следствием этих теорем являются оценки функций G и P_q, полученные в пункте 4.8. В заключительном пункте 4.9 для начально-краевой параболической задачи в конусе находится представление решения через правые части в виде интегральных операторов. Ядра этих операторов явно выражаются через функцию Грина и ядра Пуассона.

Отметим в заключение, что в статье существенно используются результаты и обозначения работы [4].

§ 4. Асимптотика функции Грина и ядер Пуассона

4.1. Определение функции Грина и ядер Пуассона. Пусть K — конус в пространстве $\mathbb{R}^n$, вырезающий на единичной сфере область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, (r, ω) — сферические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$. Точки границ $\partial K \setminus \{0\}$, $\partial\Omega$ будем обозначать через x', ω'. Пусть ещё $Q = K \times \mathbb{R}_+$, $\Gamma = (\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+$.

[1]) Teil I der Arbeit erschien in Band 8, Heft 2 (1989) dieser Zeitschrift.

Рассмотрим смешанную параболическую задачу

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(x, D_x, \partial_t)\, u = f \quad \text{на} \quad K \times \mathbb{R}, \\
&\mathcal{B}_j(x', D_x, \partial_t)\, u = g_j \quad \text{на} \quad (\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \qquad (j = 1, \ldots, bm),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где операторы $\mathcal{A}(x, D_x, p)$, $\mathcal{B}_j(x, D_x, p)$, $p \in \mathbb{C}$, удовлетворяют условиям I и II из [4: § 1] (здесь и далее предполагается, что функции f, g_j, u равны нулю при $t < 0$, поэтому начальные условия не ставятся).

В работе [4] была введена сопряженная краевая задача

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^*(x, D_x, \partial_t)\, v = f^* \qquad \text{на} \quad K \times \mathbb{R}, \\
&\mathcal{A}_k^*(x', D_x, \partial_t)\, v + \sum_{1 \le j \le bm} \mathcal{B}_{jk}^*(x', D_x, \partial_t)\, v_j = g_k^* \quad \text{на} \quad (\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

($k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1$). Подобные и более общие эллиптические краевые задачи в области с гладкой границей исследовались в работах [1, 2, 5] (по поводу параболических задач см. [5: стр. 528]). Из определения операторов краевой задачи (4.2) (см. [4: § 1]) вытекает формула Грина

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \big(\mathcal{A}(\partial_\tau)\, u(\tau), v(t - \tau)\big)_K \, d\tau + \sum_{1 \le j \le bm} \int_{\mathbb{R}} \big(\mathcal{B}_j(\partial_\tau)\, u(\tau), v_j(t - \tau)\big)_{\partial K} \, d\tau \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} \big(u(\tau), \mathcal{A}^*(\partial_t)\, v(t - \tau)\big)_K \, d\tau \\
&\qquad + \sum_{0 \le k \le 2bm-1} \int_{\mathbb{R}} \Big(D_\nu^k u(\tau), \mathcal{A}_k^*(\partial_t)\, v(t - \tau) + \sum_{1 \le j \le bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\partial_t)\, v_j(t - \tau)\Big)_{\partial K} \, d\tau,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

справедливая для функций $u, v \in C_0^\infty\big((\bar{K} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\big)$ и $v_j \in C_0^\infty\big((\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\big)$, равных нулю при $t < 0$.

С помощью операции „замыкания" эту формулу можно распространить на следующие классы функций.

а) Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $u \in \mathring{W}_\beta^{2bm,m}(Q)$, $v \in \mathring{W}_{-\beta+2bm}^{2bm,m}(Q)$, $v_j \in \mathring{W}_{-\beta+2bm}^{2bs_j,s_j}(\Gamma)$, где $s_j = m_j/2b + 1/4b$. Тогда справедлива формула (4.3).

б) Предположим, что для некоторых функций $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$, таких, что $\varphi\psi = 0$ имеют место включения $(1 - \varphi)\, u \in \mathring{W}_\beta^{2bm,m}(Q)$, $(1 - \psi)\, v \in \mathring{W}_{-\beta+2bm}^{2bm,m}(Q)$, $v_j \in \mathring{W}_{-\beta+2bm}^{2bs_j,s_j}(\Gamma)$ (здесь s_j те же числа, что и в пункте а)). Пусть ещё $u, v \in \mathcal{D}'((\bar{K} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R})$ и $u = v = 0$ при $t < 0$. Тогда справедлива формула (4.3). При этом класс функций $\mathcal{D}'((\bar{K} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ определяется следующим образом. Пусть $\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial K)/|x|$, x' — ближайшая к x точка границы $\partial K \setminus \{0\}$. Если ε — малое положительное число, то (ϱ, x') — гладкие координаты в $\mathcal{O}_\varepsilon = \{x \in \bar{K} \setminus \{0\} : \varrho < \varepsilon\}$. Функция u принадлежит $\mathcal{D}'((\bar{K} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R})$, если $u \in \mathcal{D}'(K \times \mathbb{R})$ и при некотором ε, $\varepsilon > 0$, сужение функции u на $\mathcal{O}_\varepsilon$ принадлежит пространству $C^\infty([0, \varepsilon); \mathcal{D}'((\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}))$, где $[0, \varepsilon)$ — отрезок изменения координаты ϱ.

Определение 4.1: *Функцией Грина задачи* (4.1) называется функция $G = G(x, y, t)$, принадлежащая при фиксированном $y \in K$ пространству $\mathcal{D}'(K \times \mathbb{R})$, равная нулю при $t < 0$. Существует функция $\varphi \in C_0^\infty(K \times \mathbb{R})$, равная единице в окрестности точки $x = y, t = 0$, такая, что $(1 - \varphi)\, G(\cdot, y, \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2bm,m}(Q)$, $k_- < \beta + n/2 - 2bm < k_+$. Кроме того, функция $G(\cdot, y, \cdot)$ удовлетворяет задаче (4.1) при $f = \delta(x - y)\, \delta(t)$ и $g_j = 0$.

Определение 4.2: *Ядром Пуассона задачи* (4.1) называется функция $P_q = P_q(x, y', t)$, $q = 1, \ldots, bm$, принадлежащая при фиксированном $y' \in \partial K \setminus \{0\}$ пространству $\mathcal{D}'\big((\bar{K} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\big)$, равная нулю при $t < 0$. Существует функция

$\psi \in C_0^\infty\big((\bar K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}\big)$, равная единице в окрестности точки $x = y'$, $t = 0$, такая, что $(1 - \psi)\, P_q(\cdot, y', \cdot) \in W_\beta^{2bm,m}(Q)$, $k_- < \beta + n/2 - 2bm < k_+$. Кроме того, функция $P_q(\cdot, y', \cdot)$ удовлетворяет задаче (4.1) при $f = 0$ и $g_j = \delta_j^q \delta(x' - y')\, \delta(t)$.

Определение 4.3: *Функцией Грина задачи* (4.2) называется набор функций $\mathcal{U}^* = \{G^*(x, y, t);\, P_q^*(x', y, t), q = 1, \ldots, bm\}$ равных нулю при $t < 0$. При фиксированном $y \in K$ функция $G^*(\cdot, y, \cdot)$ принадлежит $\mathcal{D}'(K \times \mathbb{R})$. Существует функция $\varphi \in C_0^\infty(K \times \mathbb{R})$, равная единице в окрестности точки $x = y$, $t = 0$, такая, что $(1 - \varphi)\, G^*(\cdot, y, \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2bm,m}(Q)$, $P_q^*(\cdot, y, \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2bs_q, s_q}(\Gamma)$, $s_q = m_q/2b + 1/4b$, где $k_-^* < \beta + n/2 - 2bm < k_+^*$. Кроме того, набор функций $\mathcal{U}^*$ удовлетворяет задаче (4.2) при $f^* = \delta(x - y)\, \delta(t)$ и $g_k^* = 0$.

Из известных результатов о локальном повышении гладкости решений параболических уравнений внутри области и в окрестности гладкой части границы и из предложений 3.5, 3.6 работы [4] вытекает единственность функций Грина и ядер Пуассона и их независимость от функций φ и ψ.

4.2. Существование функций Грина и ядер Пуассона и некоторые их свойства. Получим представления функций Грина и ядер Пуассона, из которых, в частности, будет вытекать их существование. Введем для этого вспомогательную параболическую задачу в области с гладкой границей.

Заморозим коэффициенты у операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_j$ по переменной r при $r = 1$, получим операторы $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(\omega, D_\omega, D_r, \partial_t)$, $\mathfrak{B}_{j0} = \mathfrak{B}_{j0}(\omega', D_\omega, D_r, \partial_t)$, коэффициенты которых не зависят от r. Пусть ε_0 — малое положительное число, $\eta = \eta(r)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|r - 1| \leq 2\varepsilon_0$ и нулю при $|r - 1| \geq 3\varepsilon_0$. Положим $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \eta(\mathcal{A} - \mathfrak{A}_0)$, $\mathfrak{B}_j = \mathfrak{B}_{j0} + \eta(\mathcal{B}_j - \mathfrak{B}_{j0})$. Пусть еще S_1 — одномерная окружность, получающаяся из отрезка $[1/2, 3/2]$ отождествлением его концов, $\mathcal{S} = S_1 \times \Omega$. Тогда $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_j$ можно рассматривать как операторы с гладкими коэффициентами на $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$. Если ε_0 — достаточно малое число, то краевая задача

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}u &= f \quad \text{на } \mathcal{S} \times \mathbb{R}, \\ \mathfrak{B}_j u &= g_j \quad \text{на } \partial\mathcal{S} \times \mathbb{R} \quad (j = 1, \ldots, bm) \end{aligned} \tag{4.4}$$

является параболической. Обозначим через $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, t)$, $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(x, y', t)$ функцию Грина и ядра Пуассона этой задачи. Их исследование для ограниченных областей с гладкой границей проведено в работах [3, 6, 7]. Сформулируем необходимые нам результаты.

Функция Грина задачи (4.4) существует, является бесконечно дифференцируемой на множестве $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathbb{R} \setminus \{(x, y, 0)\colon x = y, y \in \mathcal{S}\}$ функцией и для неё справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|D_x^\alpha D_y^\gamma\, \partial_t^k \mathcal{G}(x, y, t)| \\ &\leq c t^{m-1-k-(n+|\alpha|+|\gamma|)/2b} \exp\left(c_1 t - a_0\, |x - y|^{2b/(2b-1)}\, t^{-1/(2b-1)}\right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где c, c_1, a_0 — положительные константы.

Ядра Пуассона задачи (4.4) существуют, являются бесконечно дифференцируемыми на множестве $\mathcal{S} \times \partial\mathcal{S} \times \mathbb{R} \setminus \{(x, y', 0)\|\colon x = y', y' \in \partial\mathcal{S}\}$ функциями и для них справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|D_x^\alpha D_{y'}^{\gamma'}\, \partial_t^k \mathcal{P}_q(x, y', t)| \\ &\leq c t^{-1-k+(m_j-|\alpha|-|\gamma'|-n+1)/2b} \exp\left(c_1 t - a_0\, |x - y'|^{2b/(2b-1)}\, t^{-1/(2b-1)}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Сопоставим краевой задаче (4.4) сопряженную параболическую задачу

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}^*(x, D_x, \partial_t)\, v = f^* && \text{на } \mathscr{S}\times\mathbb{R}; \\ &\mathfrak{A}_k^*(x', D_x, \partial_t)\, v + \sum_{1\le j\le bm} \mathfrak{B}_{jk}^*(x', D_{x'}, \partial_t)\, v_j = g_k^* && \text{на } \partial\mathscr{S}\times\mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.7}$$

($k = 0, 1, \ldots, 2bm - 1$). Операторы $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}_k^*$, $\mathfrak{B}_{jk}^*$ определяются следующим образом (ср. [4: пункт 1.3]). Оператор $\mathfrak{A}^*(x, D_x, \overline{p})$ — формально сопряжён с оператором $\mathfrak{A}(x, D_x, \overline{p})$. Операторы $\mathfrak{A}_k^*(\overline{p}) = \mathfrak{A}_k^*(x', D_x, \overline{p})$ определяются исходя из равенства

$$\mathfrak{A}^*(\overline{p})\, \chi_{\mathscr{S}} v - \chi_{\mathscr{S}}\mathfrak{A}^*(\overline{p})\, v = \sum_{0\le k\le 2bm-1} \mathfrak{A}_k^*(\overline{p})\, v \otimes \delta_{\partial\mathscr{S}}^{(k)},$$

где, напомним, $\chi_{\mathscr{S}}$ — характеристическая функция области $\mathscr{S}$, $\delta_{\partial\mathscr{S}}^{(k)} = D_\nu^k \delta_{\partial\mathscr{S}}$ (ν — внешняя нормаль к $\partial\mathscr{S}$). Далее, продолжим гладко коэффициенты оператора $\mathfrak{B}_j$ вне $\partial\mathscr{S}$ и пусть $\mathfrak{B}_j^*(x, D_x, \overline{p})$ — оператор формально сопряженный с $\mathfrak{B}_j(p)$. Тогда операторы $\mathfrak{B}_{jk}^*(\overline{p}) = \mathfrak{B}_{jk}^*(x', D_{x'}, \overline{p})$ определяются исходя из соотношения

$$\mathfrak{B}_j^*(\overline{p})\, (v_j \otimes \delta_{\partial\mathscr{S}}) = \sum_{1\le k\le m_j} \mathfrak{B}_{jk}^*(\overline{p})\, v_j \otimes \delta\delta_{\partial\mathscr{S}}^{(k)}.$$

Если $k > m_j$, то полагаем $\mathfrak{B}_{jk}^* = 0$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{A}^* = \mathscr{A}^*$, $\mathfrak{A}_k^* = \mathscr{A}_k^*$, $\mathfrak{B}_{jk}^* = \mathscr{B}_{jk}^*$ при $|r - 1| < 2\varepsilon_0$. Для операторов задач (4.4), (4.7) справедлива формула Грина

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \big(\mathfrak{A}(\partial_\tau)\, u(\tau), v(t-\tau)\big)_{\mathscr{S}}\, d\tau + \sum_{1\le j\le bm} \int_{\mathbb{R}} \big(\mathfrak{B}_j(\partial_\tau)\, u(\tau), v_j(t-\tau)\big)_{\partial\mathscr{S}}\, d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(u(\tau), \mathfrak{A}^*(\partial_t)\, v(t-\tau)\big)_{\mathscr{S}}\, d\tau \\ &+ \sum_{0\le k\le 2bm-1} \int_{\mathbb{R}} \Big(D_\nu^k u(\tau), \mathfrak{A}_k^*(\partial_t)\, v(t-\tau) + \sum_{1\le j\le bm} \mathfrak{B}_{jk}^*(\partial_t)\, v_j(t-\tau)\Big)_{\partial\mathscr{S}}\, d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим $\{\mathscr{G}^*(x, y, t), \mathscr{P}_j^*(x', y, t), j = 1, \ldots, bm\}$ — функцию Грина задачи (4.7), т.е. решение задачи (4.7) с правыми частями $f^* = \delta(x-y)\,\delta(t)$ и $g_k^* = 0$. Применяя формулу Грина к функциям $u = \mathscr{G}_q(x, y, \tau)$, $v = \mathscr{G}^*(x, z, \tau)$, $v_j = \mathscr{P}_j^*(x', z, \tau)$ получаем формулу

$$\mathscr{G}^*(y, z, t) = \overline{\mathscr{G}(z, y, t)}. \tag{4.8}$$

Применяя формулу Грина к функциям $u = \mathscr{P}_q(x, y', \tau)$, $v = \mathscr{G}^*(x, z, \tau)$, $v_j = \mathscr{P}_j^*(x', z, \tau)$ приходим к равенству

$$\mathscr{P}_q^*(y', z, t) = \overline{\mathscr{P}_q(z, y', t)}. \tag{4.8'}$$

Зафиксируем функцию $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ равную единице при $|t| < 1$ и нулю при $|t| > 2$. Пусть $|y| \in (1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$. Будем искать функцию Грина и ядра Пуассона задачи (4.1) в виде

$$G(x, y, t) = h(t)\,\eta(|x|)\,\mathscr{G}(x, y, t) + G_1(x, y, t), \tag{4.9}$$

$$P_q(x, y', t) = h(t)\,\eta(|x|)\,\mathscr{P}_q(x, y', t) + P_{q1}(x, y', t). \tag{4.10}$$

Для определения функций G_1, P_{q1} получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}G_1 = \delta(x-y)\,\delta(t) - \mathscr{A}h\eta\mathscr{G} = f_1 && \text{на } K\times\mathbb{R}, \\ &\mathscr{B}_j G_1 = -\mathscr{B}_j h\eta\mathscr{G} = G_{j1} && \text{на } (\partial K \setminus \{0\})\times\mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.10'}$$

и

$$\mathcal{A}P_q = -\mathcal{A}h\eta\mathcal{P}_q = f_{q1} \quad \text{на} \quad K\times\mathbb{R},$$
$$\mathcal{B}_jP_q = \delta_j{}^q\delta(x'-y')\,\delta(t) - \mathcal{B}_jh\eta\mathcal{P}_q = g_{jq1} \quad \text{на} \quad (\partial K\setminus\{0\})\times\mathbb{R} \tag{4.11}$$

$(j = 1, \ldots, bm)$. Так как операторы $\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{B}_j$, $\mathfrak{B}_j$ совпадают при $|r-1| < 2\varepsilon_0$, то функции f_1, f_{q1} являются бесконечно гладкими на $\bar{K}\times\mathbb{R}$ с носителями в множестве $\{(x,t): |r-1| \leqq 3\varepsilon_0, \omega\in\bar{\Omega}, 0\leqq t\leqq 2\}$, а функции g_{j1}, g_{jq1} — бесконечно гладкие на множестве $\partial K\times\mathbb{R}$ с носителями, содержащимися в множестве $\{(x',t)\|\,|r-1| \leqq 3\varepsilon_0, \omega'\in\partial\Omega, 0\leqq t\leqq 2\}$. Из неравенств (4.5), (4.6) вытекают оценки

$$|D_x{}^\alpha D_y{}^\gamma\partial_t{}^k f_1(x,y,t)| + \sum_{1\leq q\leq bm}|D_x{}^\alpha D_{y'}^{\gamma'}\partial_t{}^k f_{q1}(x,y',t)|$$
$$+\sum_{1\leq j\leq bm}|D_{x'}^{\alpha'}D_y{}^\gamma\partial_t{}^k g_{j1}(x',y,t)| + \sum_{1\leq j,q\leq bm}|D_{x'}^{\alpha'}D_{y'}^{\gamma'}\partial_t{}^k g_{jq1}(x',y',t)|$$
$$\leqq c\exp\left(-c_1t^{-1/(2b-1)}\right) \tag{4.12}$$

при $t\in\mathbb{R}, x\in\bar{K}, x'\in\partial K, |y|, |y'|\in(1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$.

Применяя к задачам (4.10′), (4.11) предложение 3.5 из [4], получаем, что $G_1(\cdot,y,\cdot), P_{q1}(\cdot,y',\cdot)\in\mathring{W}_\beta{}^{2b(m+l),m+l}(Q)$ для любых $\beta\in\mathbb{R}$ и $l\in\mathbb{N}_0$ таких, что $k_- < \beta + n/2 - 2b(m+l) < k_+$. Дифференцируя краевые задачи (4.10′), (4.11) по переменным y, y' и снова используя предложение 3.5 из [4], находим, что

$$D_y{}^\gamma G_1(\cdot,y,\cdot), D_{y'}^{\gamma'}P_{q1}(\cdot,y',\cdot)\in\mathring{W}_\beta{}^{2b(m+l),m+l}(Q)$$

при $|y|, |y'|\in(1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$, $k_- < \beta+n/2-2b(m+l) < k_+$. В силу однородности операторов краевой задачи (4.1) отсюда вытекает существование функции Грина и ядер Пуассона этой задачи при всех $y\in K, y'\in\partial K\setminus\{0\}$.

Получим представления для функций $G^*, P_q{}^*, q = 1, \ldots, bm$. Будем их искать в виде

$$G^*(x,y,t) = h(t)\,\eta(|x|)\,\mathcal{G}^*(x,y,t) + G_1{}^*(x,y,t), \tag{4.13}$$
$$P_q{}^*(x',y,t) = h(t)\,\eta(|x'|)\,\mathcal{P}_q{}^*(x',y,t) + P_{q1}^*(x',y,t), \tag{4.14}$$

где $|y|, |y'|\in(1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$. Функции $G_1{}^*, P_{q1}^*$ удовлетворяют краевой задаче

$$\mathcal{A}^*G_1{}^* = \delta(t)\,\delta(x-y) - \mathcal{A}^*h\eta\mathcal{G}^* = f_1{}^* \quad \text{на} \quad K\times\mathbb{R}$$
$$\mathcal{A}_k{}^*G_1{}^* + \sum_{1\leq j\leq bm}\mathcal{B}_{jk}^*P_{j1} = -\mathcal{A}_k{}^*h\eta\mathcal{G}^* - \sum_{1\leq j\leq bm}\mathcal{B}_{jk}^*h\eta\mathcal{P}_j{}^* = g_{k1}^* \quad \text{на} \quad (\partial K\setminus\{0\})\times\mathbb{R}, \tag{4.15}$$

причем для её правых частей справедливы оценки $|D_x{}^\alpha D_y{}^\gamma\partial_t{}^s f_1{}^*(x,y,t)| + \sum_{0\leq k\leq 2bm-1}|D_{x'}^{\alpha'}D_y{}^\gamma\partial_t{}^s g_{k1}^*(x',y,t)| \leqq c\exp\left(-c_1t^{-1/(2b-1)}\right)$.
Применяя к задаче (4.15) предложение 3.6 из [4], получаем, что при $|y|\in(1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$, для любых $\beta\in\mathbb{R}$ и $l\in\mathbb{N}_0$ подчиненных условию $k_-{}^* < \beta+n/2-2b(m+l) < k_+{}^*$, справедливы включения

$$G_1{}^*(\cdot,y,\cdot)\in\mathring{W}_\beta{}^{2b(m+l),m+l}(Q), \qquad P_{q1}^*(\cdot,y,\cdot)\in\mathring{W}^{2bs_q,s_q}(\Gamma),$$

где $s_q = l + m_q/2b + 1/4b$. Отсюда следует существование функции Грина задачи (4.2).

В силу единственности функции Грина и ядер Пуассона и в силу однородности операторов задачи (4.1) справедливы соотношения

$$G(ax, ay, a^{2b}t) = a^{2b(m-1)-n}\,G(x,y,t),$$
$$P_q(ax, ay', a^{2b}t) = a^{m_q-n+1-2b}\,P_q(x,y',t),$$

где a — любое положительное число.

Применяя формулу Грина (4.3) к функциям $u = G(x, y, \tau), v = G^*(x, z, \tau)$, $v_j = P_j^*(x', z, \tau)$, получаем равенство

$$G^*(y, z, t) = \overline{G(z, y, t)}, \qquad (z, y \in \bar{K} \setminus \{0\}, z \neq y). \tag{4.16}$$

Применяя формулу (4.3) к функциям $u = P_q(x, y', \tau), v = G^*(x, z, \tau), v_j = P_j^*(x', z, \tau)$, приходим к соотношению

$$P_q^*(y', z, t) = \overline{P_q(z, y', t)} \qquad (z \in \bar{K} \setminus \{0\}, y' \in \partial K \setminus \{0\}, z \neq y'). \tag{4.17}$$

И, наконец, подставляя в (4.3) в качестве v, v_j, функции $G^*(x, y, \tau), P_j^*(x', y, \tau)$ и используя равенства (4.16) и (4.17), получаем следующее представление решения задачи (4.1) через правые части:

$$u(y, t) = \int_0^t \big(\mathcal{A}(\partial_\tau)\, u(\cdot, \tau), \overline{G(y, \cdot, t-\tau)}\big)_K\, d\tau + \sum_{1 \le j \le bm} \int_0^t \big(\mathcal{B}_j(\partial_\tau)\, u(\cdot, \tau), \overline{P_j(y, \cdot, t-\tau)}\big)_{\partial K}\, d\tau. \tag{4.18}$$

Аналогично приходим к формулам

$$v(y, t) = \int_0^t \big(\mathcal{A}^*(\partial_\tau)\, v(\cdot, \tau), \overline{G^*(y, \cdot, t-\tau)}\big)_K\, d\tau + \sum_{0 \le k \le 2bm-1} \int_0^t \Big(\mathcal{A}_k^*(\partial_\tau)\, v(\cdot, \tau) + \sum_{1 \le j \le bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\partial_\tau)\, v_j(\cdot, \tau), D_\nu^k \overline{G^*(y, \cdot, t-\tau)}\Big)_{\partial K} d\tau,$$

$$v_q(y', t) = \int_0^t \big(\mathcal{A}^*(\partial_\tau)\, v(\cdot, \tau), \overline{P_q^*(y', \cdot, t-\tau)}\big)_K\, d\tau + \sum_{0 \le k \le 2bm-1} \int_0^t \Big(\mathcal{A}_k^*(\partial_\tau)\, v(\cdot, \tau) + \sum_{1 \le j \le bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\partial_\tau)\, v_j(\cdot, \tau), D_\nu^k \overline{P_q^*(y', \cdot, t-\tau)}\Big)_{\partial K} d\tau,$$

которые выражают решение задачи (4.2) через функции f^* и g_k^*.

4.3. Формулировка основных результатов. Пусть σ, σ^* — вещественные числа, такие, что на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \sigma$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$, а на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \sigma^*$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}^*(\lambda)$. Пусть ещё $\sigma < k_+$ и $\sigma^* < k_+^*$. Обозначим через $M+1, M = -1, 0, \ldots$, число собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$, находящихся в полосе $\sigma < \operatorname{Im} \lambda < k_+$, а через M^* — число собственных значений пучка $\mathcal{P}^*$, лежащих в полосе $\sigma^* < \operatorname{Im} \lambda < k_+^*$. Положим

$$\begin{gathered} G_\sigma(x, y, t) = \sum_{0 \le \mu \le M} U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, \overline{v_\mu^*(y, t)}, \\ G_{j\sigma}(x, y', t) = \sum_{0 \le \mu \le M} U_\mu^{(N_\mu)}(x, \partial_t)\, \overline{v_{j\mu}^*(y', t)} \\ (j = 1, \ldots, bm), \quad \text{где} \quad N_\mu = [(\operatorname{Im} \lambda_\mu - \sigma)/2b)], \quad \text{и} \\ G_{\sigma *}^*(x, y, t) = -\sum_{-M^* \le \mu \le -1} u_\mu^{*(N_\mu^*)}(x, \partial_t)\, \overline{V_\mu(y, t)}, \\ G_{j\sigma *}^*(x', y, t) = -\sum_{-M^* \le \mu \le -1} u_{j\mu}^{*(N_\mu^*)}(x', \partial_t)\, \overline{V_\mu(y, t)} \end{gathered} \tag{4.19}$$

($j = 1, \ldots, bm$), где $N_\mu^* = [(\mathrm{Im}\,\lambda_\mu^* - \sigma^*)/2b]$. Функции, фигурирующие в правых частях приведенных соотношений, введены и исследованы в [4]. В частности, для любого положительного числа a справедливы формулы

$$G_\sigma(ax, ay, a^{2b}t) = a^{2b(m-1)-n}\, G_\sigma(x, y, t),$$

$$G_{j\sigma}(ax, ay', a^{2b}t) = a^{m_j-n-2b+1}\, G_{j\sigma}(x, y', t),$$

$$G^*_{\sigma*}(ax, ay, a^{2b}t) = a^{2b(m-1)-n}\, G^*_{\sigma*}(x, y, t),$$

$$G^*_{j\sigma*}(ax', ay, a^{2b}t) = a^{m_j-n-2b+1}\, G^*_{j\sigma*}(x', y, t).$$

Первые два соотношения доказаны в [4: лемма 3.3]. Доказательство оставшихся двух равенств по существу ничем не отличается.

Основной результат работы — следующие две теоремы.

Теорема 4.1: *Существует положительное число $\varkappa$ такое, что для функции Грина G задачи (4.1) справедливы следующие соотношения:*

а) *если $|x| \leqq 2\,|y|$, то*

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k (G(x, y, t) - G_\sigma(x, y, t))| \leqq ct^{m-1-k-(n+|\alpha|+|\gamma|)/2b}$$
$$\times \left(\frac{|x|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma-|\alpha|} \left(\frac{|y|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{-k_-^*-\varepsilon-|\gamma|} \Xi\left(\frac{|x-y|}{t^{1/2b}}\right), \tag{4.20}$$

где $\Xi(\tau) = \exp(-\varkappa\tau^{2b/(2b-1)})$;

б) *если $|y| \leqq 2\,|x|$, то*

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k (G(x, y, t) - \overline{G^*_{\sigma*}(y, x, t)})| \leqq ct^{m-1-k-(n+|\alpha|+|\gamma|)/2b}$$
$$\times \left(\frac{|x|}{|x| + t^{1/2b}}\right)^{-k_--\varepsilon-|\alpha|} \left(\frac{|y|}{|x| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma^*-|\gamma|} \Xi\left(\frac{|x-y|}{t^{1/2b}}\right), \tag{4.21}$$

где ε — любое положительное число.

Теорема 4.2: *Существует положительное число $\varkappa$ такое, что для ядер Пуассона P_j задачи (4.1) справедливы следующие соотношения:*

а) *если $|x| \leqq 2\,|y'|$, то*

$$|D_x^\alpha D_{y'}^{\gamma'} \partial_t^k (P_j(x, y', t) - G_{j\sigma}(x, y', t))|$$
$$\leqq ct^{-1-k+(m_j-n+1-|\alpha|-|\gamma'|)/2b} \left(\frac{|x|}{|y'| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma-|\alpha|}$$
$$\times \left(\frac{|y'|}{|y'| + t^{1/2b}}\right)^{-k_-^*+m_j+1-2bm-\varepsilon-|\gamma'|} \Xi\left(\frac{|x-y'|}{t^{1/2b}}\right); \tag{4.22}$$

б) *если $|y'| \leqq 2\,|x|$, то*

$$|D_x^\alpha D_{y'}^{\gamma'} \partial_t^k (P_j(x, y', t) - \overline{G^*_{j\sigma*}(y', x, t)})|$$
$$\leqq ct^{-1-k+(m_j-n+1-|\alpha|-|\gamma'|)/2b} \left(\frac{|x|}{|x| + t^{1/2b}}\right)^{-k_--\varepsilon-|\alpha|}$$
$$\times \left(\frac{|y'|}{|x| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma^*+m_j+1-2bm-|\gamma'|} \Xi\left(\frac{|x-y'|}{t^{1/2b}}\right). \tag{4.23}$$

Здесь Ξ — та же функция, что и в теореме 4.1.

Замечание 4.1: В силу соотношений (4.16), (4.17) вместо неравенств (4.21), (4.23) достаточно доказать при $|x|$, $|x'| \leqq 2\,|y|$ оценки

$$
\begin{aligned}
&|D_x{}^\alpha D_y{}^\gamma \partial_t{}^k (G^*(x, y, t) - G^*_{\sigma^*}(x, y, t))| \\
&\leqq c t^{m-1-k-(n+|\alpha|+|\gamma|)/2b} \left(\frac{|x|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma^* - |\alpha|} \left(\frac{|y|}{|x| + t^{1/2b}}\right)^{-k_- - \varepsilon - |\gamma|} \Xi\left(\frac{|x-y|}{t^{1/2b}}\right)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&|D_{x'}^{\alpha'} D_y{}^\gamma \partial_t{}^k (P_j{}^*(x', y, t) - G^*_{j\sigma^*}(x', y, t))| \\
&\leqq c t^{-1-k+(m_j-n+1-|\alpha'|-|\gamma|)/2b} \left(\frac{|x'|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{-\sigma^* + m_j + 1 - 2bm - |\alpha'|} \\
&\quad \times \left(\frac{|y|}{|y| + t^{1/2b}}\right)^{-k_- - \varepsilon - |\gamma|} \Xi\left(\frac{|x' - y|}{t^{1/2b}}\right).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

4.4. Некоторые оценки оператора продолжения. Рассмотрим оператор продолжения $\mathscr{K}$, введенный в [4: § 3]:

$$
(\mathscr{K}\varphi)(r, t) = \int_0^t T\left(\frac{t - \tau}{r^{2b}}\right) \varphi(\tau) \frac{d\tau}{r^{2b}},
$$

где, напомним, $T = T(\varrho)$ — гладкая функция, удовлетворяющая при всех s, M оценкам $|\partial_\varrho{}^s T(\varrho)| \leqq c_{sM} \varrho^{-M} \exp(-c\varrho^{-1/(2b-1)})$. Кроме того, $\int_0^\infty T(\varrho)\, d\varrho = 1$, $\int_0^\infty T(\varrho)\, \varrho^s\, d\varrho = 0$ при $s \geqq 1$.

Предложение 4.1: *Пусть $\varphi = \varphi(\tau)$ — гладкая функция. Предположим, что $\int_0^t |\varphi(\tau)|\, d\tau < \infty$ для всех $t > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если $t \leqq r^{2b}$, то для всех k, s, верно неравенство*

$$
|\partial_t{}^s D_r{}^k (\mathscr{K}\varphi)(r, t)| \leqq c_{ks} r^{-k-2bs} \exp\left(-c \left(\frac{r^{2b}}{t}\right)^{1/(2b-1)}\right) \int_0^t |\varphi(\tau)| \frac{d\tau}{r^{2b}}; \tag{4.26}
$$

б) *если $r^{2b} \leqq t$, то имеет место формула*

$$
(\mathscr{K}\varphi)(r, t) = \varphi(t) + L(r, t),
$$

где функция L удовлетворяет оценкам

$$
\begin{aligned}
|\partial_t{}^s D_t{}^k L(r, t)| \leqq c^{(M)}_{Nsk} \Bigg\{ & r^{-k-2bs} (r^{2b}/t)^M \Bigg(\int_0^{t/2} |\varphi(\tau)| \frac{d\tau}{r^{2b}} \\
& + \sum_{0 \leqq \mu \leqq s-1} r^{2b\mu} |\varphi^{(\mu)}(t/2)| + \sum_{0 \leqq \mu \leqq N+s-1} r^{2b\mu} |\varphi^{(\mu)}(t)| \Bigg) \\
& + r^{2bN-k-2bs} \sup_{t/2 \leqq \tau \leqq t} |\varphi^{(N)}(\tau)| \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

где s, k, M, N — любые целые неотрицательные числа, связанные неравенством $k + 2bs < N$; $\varphi^{(\mu)}(\tau) = \partial_\tau^\mu \varphi(\tau)$.

Доказательство: Оценка (4.26) очевидна. Будем доказывать неравенство (4.27). Представим функцию $\mathcal{K}\varphi$ в виде $\mathcal{K}\varphi = J_1 + J_2$, где

$$J_1(r, t) = \int_0^{t/2} T\left(\frac{t-\tau}{r^{2b}}\right) \varphi(\tau) \frac{d\tau}{r^{2b}}, \quad J_2(r, t) = \int_0^{t/2r^{2b}} T(\varrho)\, \varphi(t - \varrho r^{2b})\, d\varrho.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\partial_t^s D_r^k J_1(r, t)| \le c_{ksM} r^{-k-2bs} \left(\frac{r^{2b}}{t}\right)^M \left(\int_0^{t/2} |\varphi(\tau)| \frac{d\tau}{r^{2b}} + \sum_{0 \le \mu \le s-1} r^{2b\mu} \left|\varphi^{(\mu)}\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right).$$

Разлагая функцию $\varphi(t - \varrho r^{2b})$ в ряд Тейлора, находим

$$J_2(r, t) = \varphi(t) - \sum_{0 \le \mu \le N-1} \frac{(-r^{2b})^\mu}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(t) \int_{t/2r^{2b}}^{\infty} T(\varrho)\, \varrho^\mu\, d\varrho$$

$$- \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{t/2r^{2b}} T(\varrho) \int_{t-\varrho r^{2b}}^{t} \varphi^{(N)}(\tau)\, (t - \varrho r^{2b} - \tau)^{N-1}\, d\tau\, d\varrho.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для функции $J_2(r, t) - \varphi(t)$ ∎

4.5. Доказательство теорем 4.1 и 4.2 (*начало*). В силу однородности функций, фигурирующих в оценках (4.20), (4.22), (4.24), (4.25) и в силу справедливости представлений (4.9), (4.10), (4.13) (4.14), эти оценки достаточно установить для функций $G_1, P_{j1}, G_1^*, P_{j1}^*$ при $|y| = 1$ соответственно $|y'| = 1$.

Применяя [4: теорему 3.1] и используя равенство

$$\int_0^t \big(f_1(\cdot, y, \tau), v_\mu^*(\cdot, t - \tau)\big)_K\, d\tau + \sum_{1 \le j \le bm} \int_0^t \big(g_{j1}(\cdot, y, \tau), v_{j\mu}^*(\cdot, t - \tau)\big)_{\partial K}\, d\tau$$

$$= v_\mu^*(y, t) - \int_0^t \big(\mathcal{A} h\eta\mathcal{S}(\cdot, y, \tau), v_\mu^*(\cdot, t - \tau)\big)_K\, d\tau$$

$$- \sum_{1 \le j \le bm} \int_0^t \big(\mathcal{B}_j h\eta\mathcal{S}(\cdot, y, \tau), v_{j\mu}^*(\cdot, t - \tau)\big)_{\partial K}\, d\tau = v_\mu^*(y, t), \tag{4.28}$$

получаем

$$G_1(x, y, t) = \mathcal{K}(G_\sigma)\,(x, y, t) + w_\sigma(x, y, t), \tag{4.29}$$

где G_σ — функция, определенная формулой (4.19),

$$\mathcal{K}(G_\sigma)\,(x, y, t) = \int_0^t T\big((t - \tau)/|x|^{2b}\big)\, G_\sigma(x, y, \tau)\, d\tau/|x|^{2b}.$$

Для w_σ в правой части равенства (4.29) справедливы включения

$$D_y^\gamma w_\sigma(\cdot, y, \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2b(m+l), m+l}(Q), \quad \beta + n/2 - 2b(m + l) = \sigma. \tag{4.30}$$

Аналогично устанавливаются соотношения (см. [4: теоремы 3.1 и 3.2])

$$P_{j1}(x, y', t) = \mathcal{K}(G_{j\sigma})(x, y', t) + w_{j\sigma}(x, y', t), \tag{4.31}$$

$$G_1^*(x, y, t) = \mathcal{K}(G^*_{\sigma *})(x, y, t) + w^*_{\sigma *}(x, y, t), \tag{4.32}$$

$$P^*_{j1}(x', y, t) = \mathcal{K}(G^*_{j\sigma *})(x', y, t) + w^*_{j\sigma *}(x', y, t), \tag{4.33}$$

в которых

$$D_{y'}^{\gamma'} w_{j\sigma}(\cdot, y', \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q), \qquad \beta + n/2 - 2b(m+l) = \sigma,$$

$$D_y^\gamma w^*_{\sigma *}(\cdot, y, \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q), \qquad \beta + n/2 - 2b(m+l) = \sigma^*,$$

$$D_y^\gamma w^*_{j\sigma *}(\cdot, y, \cdot) \in \mathring{W}_\beta^{2bs_j,s_j}(\Gamma), \qquad \beta + n/2 - 2b(m+l) = \sigma^*,$$

$s_j = l + m_j/2b + 1/4b$, $j = 1, \ldots, bm$. Эти формулы справедливы при $|y|$, $|y'| \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$.

Основной шаг в доказательстве теорем 4.1, 4.2 залкючён в следующих двух утверждениях.

Лемма 4.1: *Пусть $|y| \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$. Тогда при всех x, $|x| \leqq 2$, и при любых $t, t > 0$, справедливы оценки*

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k w_\sigma(x, y, t)| \leqq c\,|x|^{-\sigma-|\alpha|} t^{-1-(k_+-\sigma)2b-k+\varepsilon} \left(\frac{t}{1+t}\right)^N, \tag{4.34}$$

где ε, N — любые положительные числа. Константа c зависит от $k, \alpha, \gamma, \sigma, \varepsilon_0, N$, но не зависит от x, y, t.

Лемма 4.2: *Пусть $|y|, |y'| \in (1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$. Тогда при всех $x, x'(|x|, |x'| \leqq 2)$ и для любых $t, t > 0$, справедливы оценки*

$$|D_x^\alpha D_{y'}^{\gamma'} \partial_t^k w_{j\sigma}(x, y', t)| \leqq c\,|x|^{-\sigma-|\alpha|} t^{-1-(k_+-\sigma)/2b-k+\varepsilon} \left(\frac{t}{1+t}\right)^N,$$

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k w^*_{\sigma *}(x, y, t)| \leqq c\,|x|^{-\sigma^*-|\alpha|} t^{-1-(k_+^*-\sigma^*)/2b-k+\varepsilon} \left(\frac{t}{1+t}\right)^N,$$

$$|D_{x'}^{\alpha'} D_y^\gamma \partial_t^k w^*_{j\sigma *}(x', y, t)| \leqq c\,|x'|^{-\sigma^*-2bm+m_j+1-|\alpha'|} t^{-1-(k_+^*-\sigma^*)/2b-k+\varepsilon} \left(\frac{t}{1+t}\right)^N,$$

где ε, N — любые положительные числа.

Мы ограничимся доказательством леммы 4.1. Неравенства из леммы 4.2 доказываются аналогично.

Доказательство леммы 4.1: Предположим, что доказаны неравенства

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k w_\sigma(x, y, t)| \leqq c\,|x|^{-\sigma-2b(k+1)-|\alpha|} (t\,|x|^{-2b})^N \quad \text{при} \quad t \leqq 1, \tag{4.35}$$

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k w_\sigma(x, y, t)| \leqq c\,|x|^{-\sigma-2b(k+1)-|\alpha|} t^{-d} \quad \text{при} \quad t \geqq 1, \tag{4.36}$$

где N — любое положительное число, d — наибольшее целое число, такое, что $\sigma + 2bd < k_+$. Выведем отсюда оценку (4.34). Пусть $\sigma_1 < \sigma$ и на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \sigma_1$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$. Справедливо равенство

$$w_\sigma = w_{\sigma 1} + \mathcal{K}(G_{\sigma 1} - G_\sigma). \tag{4.37}$$

Второе слагаемое состоит из членов вида

$$r^{i\lambda_\mu} \sum_{\sigma_1 \leqq \operatorname{Im} \lambda_\mu - 2bs < \sigma} Q_\mu^{(s)}(\omega, \log r)\,(r^{2b}\partial_t)^s \int_0^t T\left(\frac{t-\tau}{r^{2b}}\right) v_\mu^*(y, \tau)\,\frac{d\tau}{r^{2b}}, \tag{4.38}$$

где $Q_\mu^{(s)}(\omega, \log r)$ — многочлены от $\log r$ с гладкими по $\omega \in \bar{\Omega}$ коэффициентами. В силу [4: леммы 3.2], для функции v_μ^* верны при $|y| \in (1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$ оценки

$$|D_y^\gamma \partial_\tau^k v_\mu^*(y, \tau)| \leqq c\tau^{-1-(k_-^*-\operatorname{Im}\lambda_\mu^*)/2b-k+\varepsilon}\, e^{-\varkappa_1\tau^{-1/(2b-1)}} \tag{4.39}$$

при $\tau > 0$. Используя для оценки функции (4.38) предложение 4.1 и (4.39), получаем, что функция $\mathcal{K}(G_{\sigma_1} - G_\sigma)$ удовлетворяет неравенству (4.34) при всех α, γ, k. Применяя для оценки функции w_σ представление (4.37) и неравенства (4.35), (4.36) (при оценке слагаемого w_{σ_1} с достаточно большим значением $|\sigma_1|$), находим, что неравенство (4.34) имеет место и для функции w_σ.

Докажем сначала неравенство (4.35). Применяя к функции w_σ [4: предложение 3.3] и используя при этом включения (4.30), получаем $|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k w_\sigma(x, y, t)| \leqq cr^{-\sigma-2b(k+1)-|\alpha|}$. Так как функция w_σ и все её производные равны нулю при $t = 0$, то из последнего неравенства вытекает оценка (4.35).

При доказательстве неравенства (4.36) ограничимся случаем $\gamma = 0$. Общий случай отличается лишь более громоздкими обозначениями. Далее, последующие выкладки, по существу, не зависят от y, поэтому не будем указывать зависимость функций от аргумента y, она будет подразумеваться. И, наконец, не умаляя общности можно считать, что на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \sigma + 2bk$, $(k = 0, 1, \ldots, d)$ нет собственных чисел пучка $\mathcal{P}(\lambda)$. Положим для $s = 0, 1, \ldots, d$

$$u_s = t^s w_{\sigma+2b(d-s)} = t^s\big(G_1 - \mathcal{K}(G_{\sigma+2b(d-s)})\big).$$

Пусть числа $\beta \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{N}_0$ таковы, что $\beta + n/2 - 2b(m+l) = \sigma, l \geqq d$. Предположим, что доказаны включения

$$u_s \in \mathring{W}_\beta^{2b(m+l+s-d), m+l+s-d}(Q). \tag{4.40}$$

Применяя к функции u_s [4: предложение 3.3] и используя при этом (4.40) при $s = d$, получаем, что $|D_x^\alpha \partial_t^k t^d \omega_\sigma(x, y, t)| \leqq cr^{-\sigma-2b(k+1)-|\alpha|}$, откуда вытекает оценка (4.36) при $\gamma = 0$.

Таким образом достаточно установить включения (4.40). Будем их доказывать индукцией по числу s. Если $s = 0$, то (4.40) следует из (4.30). Предположим, что формула (4.40) доказана для всех значений $s, s < k$. Докажем её для $s = k$. Пусть

$$\mathcal{A}^{(k)}(x, D_x, p) = \partial_p^k \mathcal{A}(x, D_x, p), \qquad \mathcal{B}_j^{(k)}(x, D_x, p) = \partial_p^k \mathcal{B}_j(x, D_x, p).$$

Непосредственно проверяются равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\partial_t)\, u_k = t^k f_1 &- \sum_{0 \leqq s \leqq k-1} C_k^s \mathcal{A}^{(k-s)}(\partial_t)\, u_s \\ &- \sum_{0 \leqq s \leqq k} C_k^s \mathcal{A}^{(k-s)}(\partial_t)\, t^s \mathcal{K}(G_{\sigma+2b(d-s)}) \quad \text{на} \quad K \times \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_j(\partial_t)\, u_k = t^k g_{j1} &- \sum_{0 \leqq s \leqq k-1} C_k^s \mathcal{B}_j^{(k-s)}(\partial_t)\, u_s \\ &- \sum_{0 \leqq s \leqq k} C_k^s \mathcal{B}_j^{(k-s)}(\partial_t)\, t^s \mathcal{K}(G_{\sigma+2b(d-s)}) \quad \text{на} \quad (\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.42}$$

$(j = 1, \ldots, bm)$. Покажем, что правые части этих уравнений принадлежат соответственно пространствам $\mathring{W}_\beta^{2b(l-d+k), l-d+k}(Q)$ и $\mathring{W}_\beta^{2bs_j, s_j}(\Gamma)$, $s_j = l - d + k - m_j/2b - 1/4b$. Отсюда, в силу (4.30) и [4: теоремы 3.1] вытекают включения (4.40). Принадлежность первых слагаемых в правых частях (4.41), (4.42) указанным пространствам очевидна (см. (4.12)), принадлежность вторых слагаемых вытекает из индукционного предположения. Обозначим через $F = F(x, t)$, $G_j = G_j(x, t)$ — третьи слагаемые в правых частях (4.41), (4.42). Преобразование

Лапласа функции F равно

$$\tilde{F}(x,p) = -\sum_{0\le s\le k} C_k^s \mathcal{A}^{(k-s)}(x, D_x, p)\, \partial_p^s\bigl(\zeta(pr^{2b})\, G_{\sigma+2b(d-s)}(x,p)\bigr), \tag{4.43}$$

где (см. [4: § 2])

$$G_{\sigma'}(x,p) = \sum_{0\le\mu\le M} U_\mu^{(N_\mu')}(x,p)\,\overline{v_\mu^*(\overline{p})}, \qquad N_\mu' = [(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma')/2b].$$

Пусть $\sigma + 2b(d-k) < \operatorname{Im}\lambda_\mu \le k_-$. Выберем число s_0 таким образом, чтобы

$$\sigma + 2b(d-s_0) < \operatorname{Im}\lambda_\mu < \sigma + 2b(d-s_0+1). \tag{4.44}$$

Рассмотрим слагаемые в правой части равенства (4.43), соответствующие фиксированному значению μ:

$$F_\mu(x,p) = -\sum_{s_0\le s\le k} C_k^s \mathcal{A}^{(k-s)}(x, D_x, p)\, \partial_p^s\bigl(\zeta(pr^{2b})\, U_\mu^{(N_{\mu,s})}(x,p)\,\overline{v_\mu^*(\overline{p})}\bigr), \tag{4.45}$$

где $N_{\mu,s} = \bigl[\bigl(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma - 2b(d-s)\bigr)/2b\bigr] = [(\operatorname{Im}\lambda_\mu - \sigma)/2b] - d + s = N_\mu - d + s$. Представим правую часть (4.45) в виде

$$\underbrace{-\sum_{0\le s\le k}(\ldots U_\mu^{(N_\mu-d+s)}\ldots)}_{=F_{\mu,1}} + \underbrace{\sum_{0\le s\le s_0-1}(\ldots U_\mu^{(N_\mu)}\ldots)}_{=F_{\mu,2}} + \underbrace{\sum_{s_0\le s\le k}(\ldots(U_\mu^{(N_\mu)} - U_\mu^{(N_\mu-d+s)})\ldots)}_{=F_{\mu,3}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$F_{\mu,1}(x,p) = -\partial_p^k\bigl(\mathcal{A}(x, D_x, p)\,\zeta(pr^{2b})\, U_\mu^{(N_\mu)}(x,p)\,\overline{v_\mu^*(\overline{p})}\bigr).$$

Функция $U_\mu^{(N_\mu)}$ удовлетворяет соотношению (см. [4: пункт 2.1])

$$\mathcal{A}(x, D_x, p)\, U_\mu^{(N_\mu)}(x,p) = r^{i\lambda_\mu - 2bm} \sum_{N_\mu<s} Q_s(\omega, \log r)\,(r^{2b}p)^s,$$

где Q_s — многочлены от $\log r$ с гладкими по $\omega \in \overline{\Omega}$ коэффициентами. Так как $\partial_z^s\zeta(z)\,|_{z=0} = 0$ при $s \ge 1$, то

$$|D_x^\alpha F_{\mu,1}(x,p)| = O(r^{-\operatorname{Im}\lambda_\mu - 2bm + 2b(N_\mu+1) - s - |\alpha|}) \tag{4.46}$$

при малых r. В силу [4: замечания 2.2], справедливы оценки

$$|\partial_p^s \overline{v_\mu^*(\overline{p})}| \le c\,|p|^{-s} \exp(-\varkappa_1 |p|^{1/2b}). \tag{4.47}$$

Используя (4.46), (4.47) и соображения однородности, получаем, что

$$\|F_{\mu,1}(\cdot,p);\, E_\beta^{2b(l-d+k)}(K), p\| \le c \exp(-\varkappa_1 |p|^{1/2b}). \tag{4.48}$$

Оператор $\mathcal{A}^{(k-s)}(x, D_x, p)$ имеет вид

$$\mathcal{A}^{(k-s)}(x, D_x, p) = r^{-2b(m-k+s)} \sum_{\nu+|\alpha|+2bh\le 2b(m-k+s)} a_{\nu\alpha h}(\omega)\,(rD_r)^\nu D_\omega^\alpha (r^{2b}/p)^h.$$

Поэтому $|D_x^\alpha F_{\mu,2}(x,p)| = O(r^{-2b(m-k+s_0-1) - \operatorname{Im}\lambda_\mu - |\alpha| - s})$ при малых r. Отсюда и из (4.47) в силу (4.44) следует, что

$$\|F_{\mu,2}(\cdot,p);\, E_\beta^{2b(l-d+k)}(K), p\| \le c \exp(-\varkappa_1 |p|^{1/2b}). \tag{4.49}$$

Нетрудно видеть, что функция $F_{\mu,3}$ удовлетворяет при малых r соотношению $|D_x^\alpha F_{\mu,3}(x,p)| = O(r^{-2bm + 2b(N_\mu+k-d+1) - \operatorname{Im}\lambda_\mu - s - |\alpha|})$. Аналогично предыдущему приходим к оценке

$$\|F_{\mu,3}(\cdot,p);\, E_\beta^{2b(l-d+k)}(K), p\| \le c \exp(-\varkappa_1 |p|^{1/2b}). \tag{4.50}$$

Из (4.48)—(4.50) следует, что $F \in \mathring{W}_\beta^{2b(l-d+k),l-d+k}(Q)$. Аналогично устанавливается включение $G_j \in W_\beta^{2bs_j,s_j}(\Gamma)$. Лемма 4.1 доказана ∎

4.6. Уточнение оценок из лемм 4.1 и 4.2. Оценки, доказанные в леммах 4.1 и 4.2, можно улучшить. А именно справедливо следующее

Предложение 4.2: *Пусть* $|y| = 1$. *Тогда при всех* x, $|x| \leqq 2$, *и при любых* t, $t > 0$, *справедливы неравенства*

$$|D^{x\alpha} D_y{}^\gamma \partial_t{}^k w_\sigma(x, y, t)| \leqq c\, |x|^{-\sigma-|\alpha|} t^{-1-(k_+-\sigma)/2b-k+\varepsilon}\, e^{-\varkappa_1 t^{-1/(2b-1)}}, \tag{4.51}$$

где ε *— любое положительное число.*

Доказательство: Достаточно ограничиться случаем $t < 1$. Пусть $\eta_1 = \eta_1(r)$ — гладкая функция, равная единице при $|r - 1| \leqq \varepsilon_0/4$ и равная нулю при $|r - 1| \geqq \varepsilon_0/2$. Тогда для функции Грина G можно написать, помимо (4.9), представление

$$G(x, y, t) = h(t)\, \eta_1(|x|)\, \mathcal{S}(x, y, t) + G_1'(x, y, t),$$

где функция G_1' является решением задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{A} G_1' &= \delta(x - y)\, \delta(t) - \mathcal{A} h \eta_1 \mathcal{S} = f_1' && \text{на} \quad K \times \mathbb{R} \\ \mathcal{B}_j G_1' &= -\mathcal{B}_j h \eta_1 \mathcal{S} = g_{j1}' \ (j = 1, \dots, bm) && \text{на} \quad (\partial K \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Правые части этой задачи удовлетворяют неравенствам (4.12) возможно с другой константой c_1. Для функции G_1' можно написать представление $G_1' = \mathcal{K}(G_\sigma) + w_\sigma'$ аналогичное представлению (4.29). Используя равенство (ср. (4.28))

$$\mathcal{K}(G_\sigma)\,(x, y, t) = \int_0^t \big(f_1'(\cdot, y, \tau), \overline{\mathcal{K}(G_\sigma)\,(x, \cdot, t - \tau)}\big)_K\, d\tau + \sum_{1 \leq j \leq bm} \int_0^t \big(g_{j1}'(\cdot, y, \tau), \overline{\mathcal{K}(G_{j\sigma})\,(x, \cdot, t - \tau)}\big)/_K\, d\tau$$

и формулу (4.18) для решения задачи (4.52), находим, что

$$w_\sigma'(x, y, t) = \int_0^t \big(f_1'(\cdot, y, \tau), \overline{G(x, \cdot, t - \tau) - \mathcal{K}(G_\sigma)\,(x, \cdot, t - \tau)}\big)_K\, d\tau + \sum_{1 \leq j \leq bm} \int_0^t \big(g_{j1}'(\cdot, y, \tau), \overline{P_j(x, \cdot, t - \tau) - \mathcal{K}(G_{j\sigma})\,(x, \cdot, t - \tau)}\big)_{\partial K}\, d\tau.$$

Заменим в последнем равенстве функцию $G - \mathcal{K}(G_\sigma)$ на $h\eta\mathcal{S} + w_\sigma$ и функцию $P_j - \mathcal{K}(G_{j\sigma})$ на $h\eta\mathcal{P}_j + w_{j\sigma}$, получим, что

$$\begin{aligned} w_\sigma'(x, y, t) &= \int_0^t \big(f_1'(\cdot, y, \tau), \overline{w_\sigma(x, \cdot, t - \tau)}\big)_K\, d\tau \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq bm} \int_0^t \big(g_{j1}'(\cdot, y, \tau), \overline{w_{j\sigma}(x, \cdot, t - \tau)}\big)_{\partial K}\, d\tau + h(t)\, \eta(|x|)\, \mathcal{S}(x, y, t) \\ &- \int_0^t \big(\mathcal{A} h \eta_1 \mathcal{S}(\cdot, y, \tau), \overline{h\eta\mathcal{S}(x, \cdot, t - \tau)}\big)_K\, d\tau \\ &- \sum_{1 \leq j \leq bm} \int_0^t \big(\mathcal{B}_j h \eta_1 \mathcal{P}_j(\cdot, y, \tau), \overline{h\eta\mathcal{P}_j(x, \cdot, t - \tau)}\big)_{\partial K}\, d\tau. \end{aligned}$$

Применяя к последним двум интегралам формулу Грина и используя соотношения (4.8), (4.8′), находим

$$w_\sigma'(x, y, t) = \int_0^t \left(f_1'(\cdot, y, \tau), \overline{w_\sigma(x, \cdot; t-\tau)}\right)_K d\tau$$

$$+ \sum_{1 \le j \le bm} \int_0^t \left(g_{j1}'(\cdot, y, \tau), \overline{w_{j\sigma}(x, \cdot, t-\tau)}\right)_{\partial K} d\tau$$

$$+ h(t) \left(\eta(|x|) - \eta_1(|x|)\right) \mathcal{S}(x, y, t). \tag{4.53}$$

Оценка (4.51) для последнего слагаемого в (4.53) очевидна. Неравенство (4.51) для первых двух слагаемых в правой части (4.53) вытекает из оценок (4.12) функций f_1', g_{j1}' и из оценок функций w_σ, $w_{j\sigma}$, установленных в леммах 4.1 и 4.2. Отсюда получаем, что неравенство (4.51) справедливо для функции w_σ'. Так как $w_\sigma = w_\sigma' + h(\eta_1 - \eta) \mathcal{S}$, то оценка (4.51) справедлива и для функции w_σ ∎

Аналогично доказывается следующее

Предложение 4.3: *Пусть $|y|, |y'| = 1$. Тогда при всех $x, x', |x|, |x'| \leqq 2$, и для любых $t, t > 0$, справедливы оценки из леммы 4.2, если в них заменить функцию $t \to \left(t/(1+t)\right)^N$ на функцию $t \to \exp\left(-\varkappa_2 t^{-1/(2b-1)}\right)$, где $\varkappa_2$ — положительное число.*

4.7. Доказательство теорем 4.1 и 4.2 (*окончание*). В силу однородности функций G и G_σ неравенство (4.20) достаточно доказать при $|y| = 1$. Из (4.29) находим, что $G_1 - G_\sigma = (\mathcal{K}(G_\sigma) - G_\sigma) + w_\sigma$. Оценка (4.20) для функции w_σ доказана в предложении 4.2. Оценим слагаемое $\mathcal{K}(G_\sigma) - G_\sigma$. Если $t \leqq |x|^{2b}$, то из (4.26) и (4.39) вытекает неравенство

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k \mathcal{K}(G_\sigma)(x, y, t)| \leqq c_1 \sum_{\sigma < \operatorname{Im}\lambda_\mu \le k_-} r^{-\operatorname{Im}\lambda_\mu - 2b(k+1) - |\alpha| - \varepsilon} \exp\left(-c\left(\frac{r^{2b}}{t}\right)^{1/(2b-1)}\right)$$

$$\times\, t^{(k_- - \operatorname{Im}\lambda_\mu^*)/2b + \varepsilon/2b} \exp\left(-\varkappa_1 t^{-1/(2b-1)}\right).$$

Аналогичное неравенство справедливо и для функции G_σ. Так как $\operatorname{Im}\lambda_\mu^* + \operatorname{Im}\lambda_\mu = 2bm - n$, то отсюда следует требуемая оценка функции $\mathcal{K}(G_\sigma) - G_\sigma$ в зоне $t \leqq |x|^{2b}$. Если $t \geqq |x|^{2b}$, то используя предложение 4.1/б) и оценку (4.39), устанавливаем при $|x| \leqq 2$ неравенство

$$\left|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k \left(\mathcal{K}(G_\sigma) - G_\sigma\right)(x, y, t)\right| \leqq c \sum_{\sigma < \operatorname{Im}\lambda_\mu \le k_-} r^{-\operatorname{Im}\lambda_\mu + 2b(N-k) - |\alpha| - \varepsilon}$$

$$\times\, t^{(k^- - \operatorname{Im}\lambda_\mu^*)/2b - N + \varepsilon/2b - 1} \exp\left(-\varkappa_1 t^{-1/(2b-1)}\right),$$

где N — любое положительное число, большее $|\alpha| + 2bk$. Отсюда приходим к оценке (4.20) для функции $\mathcal{K}(G_\sigma) - G_\sigma$ в зоне $t \geqq |x|^{2b}$. Неравенство (4.20) доказано.

Аналогично доказываются неравенства (4.22), (4.24) и (4.25). Теоремы 4.1 и 4.2 доказаны ∎

Замечание 4.2: Из приведенного выше доказательства видно, что теоремы 4.1 и 4.2 остаются в силе, если в соответствующих неравенствах заменить функции G_σ, $G_{j\sigma}$, $G_{\sigma*}^*$, $G_{j\sigma*}^*$ на функции $\mathcal{K}(G_\sigma)$, $\mathcal{K}(G_{j\sigma})$, $\mathcal{K}(G_{\sigma*}^*)$, $\mathcal{K}(G_{j\sigma*}^*)$.

4.8. Некоторые следствия. Пусть $\sigma = k_- + \varepsilon$, $\sigma^* = k_-^* + \varepsilon = -k_+ + n - 2bm + \varepsilon$. Тогда из теорем 4.1 и 4.2 вытекают следующие оценки функции Грина и ядер Пуассона задачи (4.1):

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma \partial_t^k G(x, y, t)| \leqq ct^{m-1-k-(n+|\alpha|+|\gamma|)/2b} \times \left(\frac{|x|}{|x| + |y| + t^{1/2b}}\right)^{-k_- - \varepsilon - |\alpha|} \left(\frac{|y|}{|x| + |y| + t^{1/2b}}\right)^{-k_-^* - \varepsilon - |\gamma|} \times \exp\left(-\varkappa\, |x - y|^{2b/(2b-1)}\, t^{-1/(2b-1)}\right)$$

и

$$|D_x^\alpha D_{y'}^\gamma \partial_t^k P_j(x, y', t)| \leqq ct^{-1-k+(m_j+1-n-|\alpha|-|\gamma'|)/2b} \left(\frac{|x|}{|x| + |y'| + t^{1/2b}}\right)^{-k_- - \varepsilon - |\alpha|} \times \left(\frac{|y'|}{|x| + |y'| + t^{1/2b}}\right)^{-k_-^* + m_j + 1 - 2bm - \varepsilon - |\gamma'|} \exp\left(-\varkappa\, |x - y'|^{2b/(2b-1)}\, t^{-1/(2b-1)}\right)$$

($j = 1, \ldots, bm$), где ε — любое положительное число. Если собственные функции, соответствующие собственным числам, пучка $\mathscr{P}(\lambda)$ лежащих на прямых $\operatorname{Im} \lambda = k_\pm$, не имеют присоединенных, то можно положить $\varepsilon = 0$.

4.9. Начально-краевая параболическая задача в конусе. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}(x, D_x, \partial_t)\, u = f && \text{на} \quad Q \\ &\mathscr{B}_j(x', D_x, \partial_t)\, u = g_j && \text{на} \quad \Gamma\ (j = 1, \ldots, bm) \\ &\partial_t^k u = \varphi_k && \text{при} \quad t = 0\ (k = 0, \ldots, m-1). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Справедлива следующая

Теорема 4.3: *Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}_0$, $k_- < \beta + n/2 - 2b(m + l) < k_+$. Пусть еще $f \in W_\beta^{2bl,l}(Q)$, $g_j \in W_\beta^{2bl_j,l_j}(\Gamma)$, $l_j = m + l - (m_j + 1/2)/2b$, $\varphi_k \in V_\beta^{2b(m+l-k)-b}(K)$, и для правых частей задачи (4.54) выполнены условия согласования порядка $m + l - 1$, т.е. для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, bm$, $2bk + m_j \leqq m + l - 1$ справедливы соотношения $\partial_t^k \mathscr{B}_j(x', D_x, \partial_t)\, u = \partial_t^k g_j$ на $\partial K \setminus \{0\}$ при $t = 0$ (в левой части равенства следует выразить производные $D_x^\alpha \partial_t^k u$ через функции φ_k и f). Тогда задача (4.54) имеет единственное решение $u \in W_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q)$.*

Доказательство: Пусть $\psi_k = \varphi_k$ при $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ и $\psi_k = \partial_t^k u\,|_{t=0}$ при $k = m, \ldots, m + l - 1$ (предполагается, что при $k \geqq m$ функция $\partial_t^k u\,|_{t=0}$ выражена, исходя из уравнения $\mathscr{A}u = f$, через функции $f, \varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}$ и их производные). Тогда $\psi_k \in V_\beta^{2b(m+l-k)-b}(K)$ (см. [4: предложение 3.1/б)]). В силу [4: предложения 3.1/г)] существует функция $U \in W_\beta^{2b(m+l),m+l}(Q)$ такая, что $\partial_t^k U\,|_{t=0} = \psi_k$. Если мы запишем параболическую задачу относительно функции $u - U$ то, в силу выполнения условий согласования, ее правые части будут принадлежать соответственно пространствам $\mathring{W}_\beta^{2bl,l}(Q)$ и $\mathring{W}_\beta^{2bl_j,l_j}(\Gamma)$. Применение [4: предложения 3.5] завершает доказательство ▮

Представим решение задачи (4.54) при помощи функции Грина и ядер Пуассона. Пусть $u, v \in C_0^\infty\big((\overline{K} \setminus \{0\}) \times \overline{\mathbb{R}}_+\big)$, $v_j \in C_0^\infty\big((\partial K \setminus \{0\}) \times \overline{\mathbb{R}}_+\big)$ $(j = 1, \ldots, bm)$. Продолжим функции u, v, v_j нулем при $t < 0$. Применим формулу Грина (4.3) к ним. Так как они имеют скачок при $t = 0$, то у нас возникнут интегралы по множествам $K_0, K_t, \partial K_0, \partial K_t$, где $K_t = K \times \{t\}$, $\partial K_t = \partial K \times \{t\}$. Нетрудно видеть, что в результате мы получаем формулу

$$\int_0^t \big(\mathcal{A}(\partial_\tau)u(\tau), v(t-\tau)\big)_K\,d\tau + \sum_{1\le j\le bm} \int_0^t \big(\mathcal{B}_j(\partial_\tau)\,u(\tau), v_j(t-\tau)\big)_{\partial K}\,d\tau$$
$$= \int_0^t \big(u(\tau), \mathcal{A}^*(\partial_t)\,v(t-\tau)\big)_K\,d\tau$$
$$+ \sum_{0\le k\le 2bm-1} \int_0^t \Big(D_\nu{}^k u(\tau), \mathcal{A}_k{}^*(\partial_t)\,v(t-\tau) + \sum_{1\le j\le bm} \mathcal{B}_{jk}^*(\partial_t)\,v_j(t-\tau)\Big)_{\partial K}\,d\tau$$
$$+ \sum_{k+2bs\le 2bm-b-1} \Big(D_\nu{}^k\partial_\tau{}^s u(\tau), M_{ks}(\partial_t)\,v(t-\tau) + \sum_{1\le j\le bm} \mathscr{C}_{jks}(\partial_t)\,v_j(t-\tau)\Big)_{\partial K}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$$
$$+ \sum_{0\le s\le m-1} \big(\partial_\tau{}^s u(\tau), L_s(\partial_t)\,v(t-\tau)\big)_K\,\Big|_{t=0}^{\tau=t}, \tag{4.55}$$

где $L_s(p) = L_s(x, D_x, p) \in \Lambda\big(2b(m-s-1)\big)$, $M_{ks}(p) = M_{ks}(x', D_x, p) \in \Lambda'\big(2b(m-s-1)-k-1\big)$, $\mathscr{C}_{jks}(p) = \mathscr{C}_{jks}(x', D_{x'}, p) \in \Lambda''\big(m_j - 2b(s+1) - k\big)$. Пространства Λ были введены в [4: § 1/пункт 1.1].

Полагая в (4.54) $v(\tau) = G^*(x, y, \tau)$, $v_j(\tau) = P_j{}^*(x', y, \tau)$ и используя равенства (4.16), (4.17), приходим к формуле

$$u(y,t) = \int_0^t \Big\{\big(f(\cdot,\tau), \overline{G(y,\cdot,t-\tau)}\big)_K + \sum_{1\le j\le bm} \big(g_j(\cdot,\tau), \overline{P_j(y,\cdot,t-\tau)}\big)_{\partial K}\Big\}\,d\tau$$
$$+ \sum_{0\le s\le m-1} \big(\varphi_s(\cdot), L_s(\partial_t)\,\overline{G(y,\cdot,t)}\big)_K + \sum_{k+2bs\le 2bm-2b-1} \Big(D_\nu{}^k\varphi_s(\cdot), M_{ks}(\partial_t)\,\overline{G(y,\cdot,t)}$$
$$+ \sum_{1\le j\le bm} \mathscr{C}_{jks}(\partial_t)\,\overline{P_j(y,\cdot,t)}\Big)_{\partial K}.$$

Полученное представление выражает решение задачи (4.54) через правые части с помощью исследованных выше функций G и P_j.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Boutet de Monvel, L.: Boundary problems for pseudodifferential operators. Acta Math. **126** (1971), 11–51.

[2] Grubb, G.: Singular Green operators and their spectral asymptotics. Duke Math. J. **51** (1984), 477–528.

[3] Ивасишен, С. Д.: Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида. Мат. сб. **114** (1981), 110–166 и 523–565.

[4] Козлов, В. А.: Об асимптотике функции Грина и ядер Пуассона смешанной параболической задачи в конусе I. Z. Anal. Anw. **8** (1989), 131–151.

[5] Ремпель, Ш., и Б.-В. Шульце: Теория индекса эллиптических краевых задач. Москва: Изд-во Мир 1986.

[6] Солонников, В. А.: О матрицах Грина для параболических краевых задач. Зап. науч. семинаров ЛОМИ **14** (1969), 256–287.

[7] Эйдельман, С. Д., и С. Д. Ивасишен: Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи. Тр. Моск. мат. об-а **80** (1970), 179–234.

Manuskripteingang: 10. 10. 1988

VERFASSER:

Д-р Владимир Аркадьевич Козлов
Ленинградский филиал института машиноведения
им. А. А. Благонравова АН СССР
Лаборатория математических моделей механики
Большой проспект 61
СССР-199178 Ленинград, В. О.