Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 1, p. 49–61

Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf offenen Mengen II[1])

U. Hamann

Herrn Prof. Dr. L. Berg zum 60. Geburtstag gewidmet

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes, glattes Gebiet, $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ ein beliebiges Gebiet und L ein elliptischer Differentialoperator auf Ω. Es wird gezeigt, daß jede Funktion $v \in C^k(\bar{\Omega}_1)$ $(0 \leqq k < \infty)$ mit $Lv = 0$ in Ω_1 durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme bezüglich Ω in der $C^k(\bar{\Omega}_1)$-Norm approximiert werden kann, wenn Ω_1 die eingeschränkte Kegeleigenschaft besitzt.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ограниченная, гладкая область, $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ любая область и L эллиптический дифференциальный оператор на Ω. Доказывается что каждое решение уравнения $Lv = 0$ в Ω_1 из пространства $C^k(\bar{\Omega}_1)$ $(0 \leqq k < \infty)$ можно аппроксимировать в $C^k(\bar{\Omega}_1)$-норме решениями эллиптических краевых задач относительно Ω, если Ω_1 имеет ограниченное коническое свойство.

Let $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded, smooth domain, $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ an arbitrary domain and L an elliptic differential operator on Ω. It is proved that every function $v \in C^k(\bar{\Omega}_1)$ $(0 \leqq k < \infty)$ with $Lv = 0$ in Ω_1 can be approximated in the $C^k(\bar{\Omega}_1)$-norm by solutions of elliptic boundary value problems with respect to Ω if Ω_1 has the restricted cone property.

Gegeben sei ein elliptisches Randwertproblem in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ mit dem Differentialoperator L sowie ein Gebiet $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Wir lassen die rechte Seite der Differentialgleichung lediglich auf einer vorgegebenen offenen Menge $U \subset\subset \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ variieren – auf $\Omega \setminus U$ soll sie stets Null sein; ebenso sollen die Randvorgaben auf $\partial\Omega$ Null sein. $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ sei die Menge der Lösungen der so entstehenden Randwertprobleme. Insbesondere genügen dann alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$ der homogenen Differentialgleichung $Lu = 0$ in der Umgebung $\Omega \setminus \bar{U}$ von $\bar{\Omega}_1$. Mittels dieser Funktionen aus $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ sollen nun Funktionen v aus $C^k(\bar{\Omega}_1)$, die in $\Omega_1 \subset\subset \Omega \setminus \bar{U}$ Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lv = 0$ sind, in der $C^k(\bar{\Omega}_1)$-Norm approximiert werden. Ob sämtliche solche Funktionen v in dieser Weise approximierbar sind, hängt von der Struktur des Randes $\partial\Omega_1$ ab. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß dies für alle $k \geqq 0$ möglich ist, sofern Ω_1 die sogenannte eingeschränkte Kegeleigenschaft besitzt.

In der Literatur liegen für den Cauchy-Riemann-Operator und für den Laplace-Operator zu einer ähnlichen Approximationsproblematik zahlreiche tiefliegende Ergebnisse vor. Diese Resultate beschränken sich aber auf den Fall $k = 0$. Die dort verwendeten Beweismethoden sind speziell für diese Differentialoperatoren und für $k = 0$ zugeschnitten. Daher müssen für die oben beschriebene allgemeinere Situation andere Beweiswege beschritten werden.

Während es also in diesem vorliegenden Teil II der Arbeit um die $C^k(\bar{\Omega}_1)$-Approximation von Lösungen der homogenen Differentialgleichung in Ω_1 geht, wurde im Teil I [6] die gleiche Problematik für die Approximation in Sobolev-Räumen behandelt.

---

[1]) Teil I der Arbeit erschien in Band 9, Heft 3 (1990) dieser Zeitschrift.

1. Voraussetzungen und Definitionen

1.1. Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit einem C^∞-glatten Rand $\partial\Omega$. Vom Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad \left(a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})\right)$$

und vom System

$$B = \{B_j\}_1^m \qquad \left(B_j = \sum_{|\alpha| \leq m_j} B_{j,\alpha}(x) D^\alpha, B_{j,\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega)\right)$$

von Randoperatoren auf $\partial\Omega$ fordern wir folgendes:

1. L ist auf $\bar{\Omega}$ eigentlich elliptisch (s. z. B. [14: S. 146]).
2. B ist normal (s. z. B. [14: S. 214]).
3. $m_j \leq 2m - 1$ für $j = 1, \ldots, m$.
4. B überdeckt L auf $\partial\Omega$ (s. z. B. [11: S. 162]).

Zur Abkürzung setzen wir $Bu = \{B_j u|_{\partial\Omega}\}_1^m$.

1.2. Es sei $U \subset\subset \Omega$ eine beliebige, dann aber fest gewählte offene Teilmenge von Ω. Wir definieren $\mathfrak{M}_U(\Omega) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega})\colon \operatorname{supp} Lu \subset U, Bu = 0\}$. $\mathfrak{M}_U(\Omega)$ besteht gerade aus den Lösungen von Randwertproblemen der Gestalt $Lu = f$ in Ω, $Bu = 0$, wobei f in $C_0^\infty(U)$ variiert.

1.3. Es sei $L^* := \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\left(a_\alpha(x) \cdot\right)$ der im Sinne der Distributionentheorie formal duale Operator zu L. Wir formulieren für ihn in einem Gebiet $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ die folgende *Eindeutigkeitseigenschaft des Cauchy-Problems im Kleinen*, wobei $\omega \subset \tilde{\Omega}$ irgendeine nichtleere offene Teilmenge ist:

(U_s) $\quad L^*u = 0$ in $\tilde{\Omega}$, $u \equiv 0$ auf $\omega \subset \tilde{\Omega} \Rightarrow u \equiv 0$ auf $\tilde{\Omega}$.

Diese Eigenschaft ist beispielsweise erfüllt, wenn die Koeffizienten von L^* auf $\tilde{\Omega}$ reell analytisch sind.

1.4. Ist X ein normierter Raum, so wird mit X' sein Dualraum und mit $\langle F, f\rangle$ die Anwendung eines Funktionals $F \in X'$ auf ein Element $f \in X$ bezeichnet. Sind X und Y normierte Räume, so sei $L(X, Y)$ die Menge aller stetigen und linearen Operatoren von X in Y. Für $A \in L(X, Y)$ sei $A' \in L(Y', X')$ der duale Operator.

1.5. Wir definieren $\mathring{C}^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, wobei die Abschließung in der $C^s(\bar{\Omega})$-Norm erfolgen soll. Die Elemente von $\left(\mathring{C}^s(\Omega)\right)'$ können als Distributionen der Ordnung s aufgefaßt werden. Für kompakte Mengen $K \subset \Omega$ sei

$$\left(C^s(\bar{\Omega})\right)_K' = \left\{T \in \left(C^s(\bar{\Omega})\right)'\colon \operatorname{supp} T \subseteq K\right\},$$

$$\left(\mathring{C}^s(\Omega)\right)_K' = \left\{F \in \left(\mathring{C}^s(\Omega)\right)'\colon \operatorname{supp} F \subseteq K\right\}.$$

Jedes Element aus $\left(\mathring{C}^s(\Omega)\right)_K'$ kann eindeutig zu einem Element aus $\left(C^s(\bar{\Omega})\right)_K'$ fortgesetzt werden. In diesem Sinne soll $\left(\mathring{C}^s(\Omega)\right)_K' = \left(C^s(\bar{\Omega})\right)_K'$ verstanden werden. $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ $(s \geq 0, 1 < p < \infty)$ sei die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm des Sobolev-Raumes $W_p^s(\Omega)$ und

$$\left(W_p^s(\Omega)\right)_K = \left(\mathring{W}_p^s(\Omega)\right)_K := \{f \in W_p^s(\Omega)\colon \operatorname{supp} f \subseteq K\}.$$

$W_{p'}^{-s}(\Omega) := \big(\mathring{W}_p^s(\Omega)\big)'$ ($s \geqq 0$; $1/p + 1/p' = 1$) soll der Dualraum von $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ sein. Weiterhin sei $\big(W_{p'}^{-s}(\Omega)\big)_K := \{F \in W_{p'}^{-s}(\Omega) : \operatorname{supp} F \subseteqq K\}$.

1.6. Wir wollen jetzt die eingeschränkte Kegeleigenschaft definieren. Dazu zunächst die Definition eines Kegels:

Definition 1: Der *Kegel* $K(x, v, h, c)$ mit der Spitze in $x \in \mathbf{R}^n$, der Höhe h und der durch den Einheitsvektor v gegebenen Achsenrichtung soll die Menge aller Punkte $z = x + t(v + sn)$ sein. Dabei gelte $0 < t < h$ und $0 \leqq s < c$, und der Vektor n durchlaufe alle zu v senkrechten Einheitsvektoren. Mittels der positiven Zahl c wird die Größe des Öffnungswinkels ausgedrückt.

Definition 2: Das Gebiet $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ besitzt die *eingeschränkte Kegeleigenschaft*, falls zu jedem $x \in \partial\Omega_1$ eine offene Umgebung U_x und ein Kegel $K(0, v_x, h_x, c_x)$ existiert, so daß $K(z, v_x, h_x, c_x) \subset \Omega_1$ für alle $z \in \bar{\Omega}_1 \cap U_x$ gilt.

2. Hauptergebnis und Literaturüberblick

Es sei $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ ein beliebiges Gebiet. Für ganze Zahlen k mit $0 \leqq k < \infty$ definieren wir

$$S^k(\Omega_1) = \{v \in C^k(\bar{\Omega}_1) : Lv = 0 \text{ in } \Omega_1\}.$$

Wir kommen nun zur Formulierung des Hauptergebnisses der vorliegenden Arbeit.

Satz: *L^* besitze in jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ die Eigenschaft $(U)_s$. Weiterhin liege in jeder Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ eine nichtleere offene Teilmenge von $U \subset\subset \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$. Besitzt dann Ω_1 die eingeschränkte Kegeleigenschaft, so gilt $S^k(\Omega_1) \subseteqq \overline{\mathfrak{N}_U(\Omega)|_{\Omega_1}}$ (Abschließung in der $C^k(\bar{\Omega}_1)$-Norm) für alle k mit $0 \leqq k < \infty$.*

Zu jeder Funktion $v \in C^k(\bar{\Omega}_1)$ mit $Lv = 0$ in Ω_1 existiert unter diesen Voraussetzungen also eine Folge $(u_l)_1^\infty \subseteqq \mathfrak{N}_U(\Omega)$ mit $\|u_l|_{\Omega_1} - v\|_{C^k(\bar{\Omega}_1)} \to 0$. Dabei ist zu beachten, daß, für alle l, $Lu_l = 0$ in der festen Umgebung $\Omega \setminus \bar{U}$ von $\bar{\Omega}_1$ gilt.
Der Beweis des Satzes beruht auf den folgenden beiden Lemmata.

Lemma 1: *Es sei $P_1 = \sum_{|\alpha| \leqq r} b_{1,\alpha}(x) D^\alpha$ ein beliebiger Differentialoperator mit $b_{1,\alpha} \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ für $|\alpha| = r$ und $b_{1,\alpha} \in C^k(\bar{\Omega})$ für $|\alpha| \leqq r - 1$. $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ besitze die eingeschränkte Kegeleigenschaft. Dann gibt es zu jedem Element $F_1 \in \big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)'_{\bar{\Omega}_1}$ mit $D^\alpha F_1 \in \big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)'$ für $|\alpha| \leqq r - 1$ und $P_1F_1 \in \big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)'$ eine Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ mit $\langle P_1\varphi_l, f\rangle \to \langle P_1F_1, f\rangle$ für alle $f \in C_0^k(\Omega)$.*

Die Folge $(\varphi_l)_1^\infty$ nimmt eine Schlüsselstellung für den Beweis des Satzes ein. Der Konstruktion dieser Folge dienen dann auch die meisten Anstrengungen der vorliegenden Arbeit. Die Existenz solch einer Folge ist der Ersatz für die (m, p)-Stabilität bei der Approximation in Sobolev-Räumen [6]. Weiterhin ist zu beachten, daß die Existenz der Folge $(\varphi_l)_1^\infty$ nicht an die Elliptizität des Differentialoperators gebunden ist. Vom Differentialoperator muß lediglich eine genügende Glattheit der Koeffizienten gefordert werden.

Lemma 2: *Besitzt das beschränkte Gebiet $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ die eingeschränkte Kegeleigenschaft, so ist jede Funktion aus $C^k(\bar{\Omega}_1)$ $(0 \leqq k < \infty)$ in $\mathbf{R}^n$ zu einer Funktion aus $C_0^k(\mathbf{R}^n)$ fortsetzbar.*

Dieses Lemma wird in [7] bewiesen. Der Beweis erfolgt dabei durch Zurückführung auf den Satz 5 in [11: S. 219].

In der Literatur wurde folgende Fragestellung häufig untersucht: Für welche kompakten Mengen K mit nichtleerem Innern sind beliebige im Innern von K harmonische oder holomorphe Funktionen aus $C(K)$ durch in einer Umgebung von K harmonische bzw. holomorphe Funktionen approximierbar? Die Theorie der gleichmäßigen Approximation durch holomorphe Funktionen hat eine lange Geschichte. Bereits im Jahre 1885 erzielte C. RUNGE [10] dazu erste Resultate. Weiterhin sind die Untersuchungen von S. N. MERGELJAN [9] aus dem Jahre 1952 zu erwähnen. Ihren Höhepunkt fand diese Entwicklung 1967 in den Ergebnissen von A. G. VITUSHKIN [12]. Mit Hilfe der analytischen Kapazität hat er an K äquivalente Bedingungen dafür angegeben, daß die obige Approximation möglich ist. Für den Laplace-Operator sind von M. V. KELDYSH [8], M. BRELOT [1] und J. DENY [4] derartige äquivalente Bedingungen an K angegeben worden.

In den bisher erwähnten Arbeiten ist es zugelassen, daß für die approximierenden Funktionen u_l für $l \to \infty$ die Gleichung $Lu_l = 0$ nur in immer kleiner werdenden Umgebungen von K gilt. Mit Lösungen von $Lu = 0$ in ganz $\Omega \supset\supset \Omega_1$ hat F. E. BROWDER [2, 3] approximiert. Für elliptische Differentialoperatoren auch höherer als zweiter Ordnung zeigte er $S^0(\Omega_1) \subseteq \overline{\{u|_{\Omega_1}: Lu = 0 \text{ in } \Omega\}}$. Vorausgesetzt wurde für Ω_1 die eingeschränkte Kegeleigenschaft. Einige der von ihm verwendeten Beweisgedanken werden in der vorliegenden Arbeit für die Approximation von Funktionen aus $S^k(\Omega_1)$ mit $k > 0$ verallgemeinert. Weiterhin zeigen wir, daß es ausreicht, für die approximierenden Funktionen u_l Lösungen von solchen Randwertproblemen zu nehmen, bei denen die rechte Seite der Differentialgleichung lediglich auf einer beliebig kleinen offenen Menge $U \subset \Omega$ variiert wird.

Mit Lösungen von Randwertproblemen hat auch G. WILDENHAIN [13: Theorem 4] approximiert. Er zeigte $S^{m-1}(\Omega_1) \subseteq \overline{\mathfrak{M}_U(\Omega)}|_{\Omega_1}$. Da der Beweis auf dem verallgemeinerten Maximumprinzip für das Dirichlet-Problem bezüglich Ω_1 beruht, mußte für $\partial\Omega_1$ allerdings Glattheit gefordert werden. Die Behauptung folgt dann aus der Approximation auf geschlossenen Flächen (vgl. [5: Satz 1]).

3. Vorbereitungen für die Beweise

3.1. Es sei $B^* = \{B_j^*\}_1^m$ ein entsprechend der Greenschen Formel zu $B = \{B_j\}_1^m$ adjungiertes System von Randoperatoren (vgl. [5: S. 287]). Wir definieren

$$N = \operatorname{Ker}(\{L, B\}) = \{u \in C^\infty(\bar{\Omega}): Lu = 0 \text{ in } \Omega, Bu = 0\}$$

und

$$N^* = \operatorname{Ker}(\{L^*, B^*\}) = \{w \in C^\infty(\bar{\Omega}): L^*w = 0 \text{ in } \Omega, B^*w = 0\}.$$

$f \perp N$ und $f \perp N^*$ soll $\int_\Omega fh\,dx = 0$ für alle $h \in N$ bzw. $h \in N^*$ bedeuten. Wie in [5] (s. auch [6]) wird dann der *Greensche Operator* G definiert. Im folgenden Lemma fassen wir seine wesentlichen Eigenschaften zusammen.

Lemma 3: *Für alle ganzen Zahlen $s \geqq 0$ und alle reellen Zahlen p mit $1 < p < \infty$ gilt*

(i) $G \in L\big(W_p^s(\Omega), W_p^{s+2m}(\Omega)\big)$,

(ii) $LGf = f$ *für alle* $f \in W_p^s(\Omega)$ *mit* $f \perp N^*$,

(iii) $GLu = u + u_0$ *für alle* $u \in W_p^{s+2m}(\Omega)$ *mit* $Bu = 0$ $(u_0 \in N)$.

3.2. Das folgende Lemma benötigen wir für den Beweis von Lemma 1. Mit $d(E_1, E_2)$ bezeichnen wir den euklidischen Abstand zwischen Mengen $E_1, E_2 \in \mathbf{R}^n$.

Lemma 4: *Es seien $\Omega_1, U_1 \subset \mathbf{R}^n$ offene Mengen mit $\Omega_1 \cap U_1 \neq \emptyset$. Weiterhin existiere ein Kegel $K(0, v, h, c)$ derart, daß $K(z, v, h, c) \subset \Omega_1$ für alle $z \in \Omega_1 \cap U_1$ gilt. Dann ist $d(\bar{\Omega}_1 \cap U_1 + tv, \partial\Omega_1) \geqq tc/\sqrt{c^2 + 1}$ für alle t mit $0 \leqq t \leqq h/2$.*

Beweis: Für $0 < t \leqq h/2$ ist wegen $\bar{\Omega}_1 \cap U_1 + tv \subset \Omega_1$

$$\begin{aligned} d(\bar{\Omega}_1 \cap U_1 + tv, \partial\Omega_1) &= d(\bar{\Omega}_1 \cap U_1 + tv, \mathbf{R}^n \setminus \Omega_1) \\ &= \inf \{|z + tv - x| : z \in \bar{\Omega}_1 \cap U_1, x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega_1\} \\ &\geqq \inf \{|z + tv - x| : z \in \bar{\Omega}_1 \cap U_1, x \in \mathbf{R}^n \setminus K(z, v, h, c)\} \\ &= \inf \{|tv - x| : x \in \mathbf{R}^n \setminus K(0, v, h, c)\} \\ &= d\big(tv, \mathbf{R}^n \setminus K(0, v, h, c)\big) = d\big(tv, \partial K(0, v, h, c)\big) \\ &= \min \{d(tv, M), h - t\} \\ &\geqq \min \{d(tv, M), h/2\}. \end{aligned}$$

Dabei ist M die Mantelfläche des Kegels $K(0, v, h, c)$ sowie $(h - t)$ der Abstand zwischen tv und der Grundfläche des Kegels. Wir berechnen jetzt $d(tv, M) = \inf \{|tv - x| : x \in M\}$. Zu jedem Punkt $x \in M$ existiert eine Zahl r mit $0 < r < h$ sowie ein zu v senkrechter Einheitsvektor n, so daß x die Darstellung $x = r(v + cn)$ hat. Es gilt

$$\begin{aligned} |tv - x|^2 = |tv - (rv + crn)|^2 &= |(t - r)\, v - crn|^2 = (t - r)^2 + c^2r^2 \\ &= (c^2 + 1) \left[\left(r - \frac{t}{c^2 + 1}\right)^2 + \frac{t^2c^2}{(c^2 + 1)^2}\right] \\ &\geqq t^2 \frac{c^2}{c^2 + 1}, \end{aligned}$$

also $d(tv, M) \geqq tc/\sqrt{c^2 + 1}$. Wegen $tc/(c^2 + 1) < h/2$ für $0 \leqq t \leqq h/2$ ist

$$\min \{d(tv, M), h/2\} \geqq tc/\sqrt{c^2 + 1} \ \blacksquare$$

3.3. Für den Beweis des Satzes benötigen wir die folgende Regularitätsaussage (s. [2: S. 211]).

Lemma 5: *Es sei s eine beliebige ganze Zahl, $1 < p < \infty$ sowie $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Aus $u \in \big(W_p^s(\Omega)\big)_K$ und $L^*u \in \big(W_p^s(\Omega)\big)_K$ folgt dann $u \in \big(W_p^{s+2m}(\Omega)\big)_K$.*

Die grundlegende Vorgehensweise beim Beweis des im 2. Abschnitt formulierten Satzes beruht auf der folgenden Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach.

Lemma 6: *Es sei X ein normierter Raum, und X_0, X_1 seien lineare Teilmengen von X mit $X_0 \subset X_1$. Ist für jedes $T \in X'$ mit $\langle T, f_0 \rangle = 0$ für alle $f_0 \in X_0$ auch $\langle T, f_1 \rangle = 0$ für alle $f_1 \in X_1$, so gilt $\bar{X}_0 \supseteq X_1$.*

Im folgenden Abschnitt wird der Beweis des Satzes geführt. Wir nehmen dabei an, daß uns dazu das Lemma 1 schon zur Verfügung steht. Dieses Lemma wird dann im 5. Abschnitt bewiesen.

4. Beweis des Satzes

Der Beweis erfolgt in sechs Schritten.

1. Es sei $T \in \big(C^k(\Omega_1)\big)'$ ein stetiges, lineares Funktional mit

$$\langle T, u|_{\Omega_1} \rangle = 0 \tag{1}$$

für alle $u \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Wir werden $\langle T, v\rangle = 0$ für alle $v \in S^k(\Omega_1)$ zeigen. Mittels Lemma 6 erhält man dann die Behauptung.

2. $R \in L\big(C^k(\bar\Omega), C^k(\bar\Omega_1)\big)$ sei der durch $Rf = f|_{\Omega_1}$ definierte Einschränkungsoperator. Dann ist $R' \in L\big((C^k(\bar\Omega_1))', (C^k(\bar\Omega))'\big)$. Aus Lemma 3/(i) erhalten wir für den Greenschen Operator $G \in L\big(W_p^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega), W_p^{k+1}(\Omega)\big)$. Wegen der stetigen Einbettungen

$$\mathring{C}^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega) \subset W_p^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega)$$

und

$$W_p^{k+1}(\Omega) \subset C^k(\bar\Omega) \quad \text{für} \quad p > n$$

ist

$$G \in L\big(\mathring{C}^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega), C^k(\bar\Omega)\big)$$

und

$$G' \in L\big((C^k(\bar\Omega))', (\mathring{C}^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega))'\big).$$

Es gilt also $G'R'T \in \big(\mathring{C}^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega)\big)'$. Weiterhin ist $R'T \in \big(C^k(\bar\Omega)\big)'$. Wegen $\langle R'T, f\rangle = \langle T, Rf\rangle = 0$ für alle $f \in C^k(\bar\Omega)$ mit $f \equiv 0$ in einer Umgebung von $\bar\Omega_1$ ist $R'T \in \big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)'_{\bar\Omega_1}$.

3. Für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt nach Lemma 3/(iii) $GL\varphi = \varphi + \varphi_0$ mit einer Funktion $\varphi_0 \in N = \operatorname{Ker}(\{L, B\})$. Aus $N \subset \mathfrak{M}_U(\Omega)$ und (1) folgt $\langle R'T, \varphi_0\rangle = \langle T, R\varphi_0\rangle = 0$. Damit erhalten wir

$$\langle G'R'T, L\varphi\rangle = \langle R'T, GL\varphi\rangle = \langle R'T, \varphi + \varphi_0\rangle = \langle R'T, \varphi\rangle \quad \text{für alle}$$
$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

also $L^*(G'R'T) = R'T$ auf Ω im distributionentheoretischen Sinne. Da $R'T$ auf $\bar\Omega_1$ konzentriert ist, gilt insbesondere $L^*(G'R'T) = 0$ auf $\Omega \setminus \bar\Omega_1$.

4. Für alle Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(U)$ mit $\varphi \perp N^* = \operatorname{Ker}(\{L^*, B^*\})$ ist nach Lemma 3/(ii) $LG\varphi = \varphi$, also $G\varphi \in \mathfrak{M}_U(\Omega)$. Aus (1) ergibt sich $\langle G'R'T, \varphi\rangle = \langle T, R(G\varphi)\rangle = 0$ für alle diese φ. Daraus kann $G'R'T = w_0$ auf U mit einer Funktion $w_0 \in N^*$ gefolgert werden (vgl. [5: S. 295]).

5. Damit gilt $L^*(G'R'T - w_0) = 0$ auf $\Omega \setminus \bar\Omega_1$ und $(G'R'T - w_0) \equiv 0$ auf $U \subset \Omega \setminus \bar\Omega_1$. Aus der vorausgesetzten Eigenschaft (U_s) von L^* folgt $(G'R'T - w_0) \equiv 0$ auf ganz $\Omega \setminus \bar\Omega_1$. Es ist also

$$(G'R'T - w_0) \in \big(\mathring{C}^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega)\big)'_{\bar\Omega_1},$$

und

$$L^*(G'R'T - w_0) = R'T \in \big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)'_{\bar\Omega_1}.$$

Aus $\mathring{C}^k(\Omega) \subset \mathring{C}^{\max\{0,k+1-2m\}}(\Omega)$ folgt $(G'R'T - w_0) \in \big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)'_{\bar\Omega_1}$. Aus der für $p > n$ stetigen Einbettung $\mathring{W}_p^{k+1}(\Omega) \subset \mathring{C}^k(\Omega)$ ergibt sich $\big(\mathring{C}^k(\Omega)\big)' \subset W_{p'}^{-k-1}(\Omega)$ mit $p' = p/(p-1) < n/(n-1)$. Es ist also $(G'R'T - w_0) \in \big(W_{p'}^{-k-1}(\Omega)\big)_{\bar\Omega_1}$ und $L^*(G'R'T - w_0) \in \big(W_{p'}^{-k-1}(\Omega)\big)_{\bar\Omega_1}$. Aus Lemma 5 folgt $(G'R'T - w_0) \in \big(W_{p'}^{2m-k-1}(\Omega)\big)_{\bar\Omega_1}$. Für $|\alpha| \leqq 2m - 1$ erhält man dann

$$D^\alpha(G'R'T - w_0) \in \big(W_{p'}^{2m-k-1-|\alpha|}(\Omega)\big)_{\bar\Omega_1} \subseteqq \big(W_{p'}^{-k}(\Omega)\big)_{\bar\Omega_1} \subset \big(C^k(\Omega)\big)'_{\bar\Omega_1}.$$

6. Nach Lemma 1 mit $P_1 := L^*$ und $F_1 := (G'R'T - w_0)$ existiert dann eine Folge $(\varphi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ mit

$$\lim_{l\to\infty} \langle L^*\varphi_l, f\rangle = \langle L^*(G'R'T - w_0), f\rangle = \langle R'T, f\rangle \quad \text{für alle } f \in C_0^k(\Omega).$$

Es sei nun $v \in S^k(\Omega_1)$ eine beliebige Funktion. Nach Lemma 2 läßt sich v zu einer Funktion $\tilde{v} \in C_0^k(\Omega)$ fortsetzen. Dann gilt wegen $\operatorname{supp} \varphi_l \subset \Omega_1$ und $Lv = 0$ in Ω_1

$$\langle T, v\rangle = \langle T, R\tilde{v}\rangle = \langle R'T, \tilde{v}\rangle = \lim_{l\to\infty} \langle L^*\varphi_l, \tilde{v}\rangle$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_{\Omega_1} L^*\varphi_l|_{\Omega_1} \tilde{v}|_{\Omega_1}\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_{\Omega_1} \varphi_l|_{\Omega_1} Lv\, dx = 0,$$

d. h. $\langle T, v\rangle = 0$ ∎

5. Beweis von Lemma 1

Die Grundidee dieses Beweises besteht darin, daß die einzelnen Teile des Trägers von $F_1 \in (\mathring{C}^k(\Omega))'_{\bar{\Omega}_1}$ zunächst in das Innere von Ω_1 verschoben werden. Durch anschließende Regularisierung entstehen dann $C_0^\infty(\Omega_1)$-Funktionen, die die gewünschten Eigenschaften haben. Um bekannte Aussagen über die Faltung direkt benutzen zu können, werden wir unseren Überlegungen zunächst den Raum $\mathbf{R}^n$ zugrunde legen. Erst zum Schluß des Beweises wird dann die Einschränkung auf Ω erfolgen. Der Beweis gliedert sich in mehrere Unterabschnitte.

5.1. Es sei

$$J(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \geqq 1, \\ C\, e^{1/(|x|^2-1)} & \text{für} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

und $J_\delta(x) := \delta^{-n} J(x/\delta)$ für $\delta > 0$.

Die Zahl C wird dabei so gewählt, daß $\int J(x)\, dx = 1$ und damit auch $\int J_\delta(x)\, dx = 1$ für alle $\delta > 0$ gilt. Weiterhin sei $B_{x_0}^\delta := \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$. Es ist

$$\begin{aligned} &J_\delta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \qquad \operatorname{supp} J_\delta = \bar{B}_0^\delta, \qquad J_\delta(x) = J_\delta(-x), \\ &\sup \{|D_j J_\delta(x)| : x \in \mathbf{R}^n\} \leqq C/\delta^{n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

für alle $\delta > 0$ ($D_j := \partial/\partial x_j$) und

$$\int D_j J_\delta(x)\, x_i\, dx = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

5.2. Im folgenden sei stets $F \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'_{\bar{\Omega}_1} \subset D'(\mathbf{R}^n)$. Die Faltung von F mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ist durch $(F * \varphi)(x) = \langle F(y), \varphi(x - y)\rangle$ definiert. Es gilt

$$\langle F * \varphi, \psi\rangle = \langle F, \check{\varphi} * \psi\rangle \quad (\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)) \quad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \tag{4}$$

5.3. Es sei $v_0 \in \mathbf{R}^n$ ein fester Vektor. Für Funktionen definieren wir den Verschiebungsoperator H_{v_0} durch $(H_{v_0} \circ f)(x) = f(x + v_0)$. Für $F \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'_{\bar{\Omega}_1}$ sei $H_{v_0} \circ F$ erklärt durch

$$\langle H_{v_0} \circ F, \varphi\rangle = \langle F(y), \varphi(y - v_0)\rangle = \langle F, H_{-v_0} \circ \varphi\rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Es gilt ($\operatorname{supp} F - v_0 := \{x - v_0 : x \in \operatorname{supp} F\}$)

$$\operatorname{supp} (H_{v_0} \circ F) = \operatorname{supp} F - v_0, \qquad (H_{v_0} \circ F) * J_\delta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

und

$$\operatorname{supp} \big((H_{v_0} \circ F) * J_\delta\big) \subseteqq \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, \operatorname{supp} F - v_0) \leqq \delta\}.$$

5.4. Für $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$ definieren wir den Stetigkeitsmodul

$$\theta_f^k(\delta) = \sum_{|\alpha| \leqq k} \sup \{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| : x, y \in \mathbf{R}^n, |x - y| \leqq \delta\} \qquad (\delta \geqq 0).$$

Es gilt

$$\lim_{\delta \to +0} \theta_f^k(\delta) = 0 \qquad \text{für alle} \quad f \in C_0^k(\mathbf{R}^n). \tag{5}$$

Weiterhin läßt sich leicht das folgende Lemma beweisen.

Lemma 7: *Es sei $v_0 \in \mathbf{R}^n$ ein fester Einheitsvektor und $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$ eine beliebige Funktion. Dann gilt*

$$\|H_{tv_0} \circ (J_\delta * f) - f\|_{k,\mathbf{R}^n} \leqq \theta_f^k(t) + \theta_f^k(\delta) \qquad \text{für alle} \quad t \geqq 0.$$

Dabei ist $\|f\|_{k,\mathbf{R}^n} := \|f\|_{C^k(\mathbf{R}^n)} := \sum_{|\alpha| \leqq k} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |D^\alpha f(x)|$.

Aus $\langle F * J_\delta, \psi\rangle = \langle F, J_\delta * \psi\rangle$ für alle $\delta > 0$ und alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ (vgl. (4)) ergibt sich das

Lemma 8: *Es gilt $\langle F * J_\delta, f\rangle = \langle F, J_\delta * f\rangle$ für alle $F \in \left(\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)\right)'_{\mathfrak{D}_1}$, $f \in \mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)$ und alle $\delta > 0$.*

Jetzt können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 9: *Es sei $F \in \left(\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)\right)'_{\mathfrak{D}_1}$ und v_0 ein fester Einheitsvektor. Dann gilt*

$$\lim_{t,\delta \to +0} \langle (H_{-tv_0} \circ F) * J_\delta, f\rangle = \langle F, f\rangle \qquad \text{für alle} \quad f \in C_0^k(\mathbf{R}^n).$$

Beweis: Aus Lemma 8 und der Definition von H_{-tv_0} folgt

$$\langle (H_{-tv_0} \circ F) * J_\delta, f\rangle = \langle H_{-tv_0} \circ F, J_\delta * f\rangle = \langle F, H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\rangle.$$

Aus Lemma 7 ergibt sich

$$\begin{aligned} |\langle F, H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\rangle - \langle F, f\rangle| &= |\langle F, H_{tv_0} \circ (J_\delta * f) - f\rangle| \\ &\leqq C\, \|H_{tv_0} \circ (J_\delta * f) - f\|_{k,\mathbf{R}^n} \\ &\leqq C\left(\theta_f^k(\delta) + \theta_f^k(t)\right). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus (5) ∎

5.5. Das folgende Lemma nimmt eine Schlüsselstellung für den Beweis von Lemma 1 ein. Die Schwierigkeit in seinem Beweis liegt darin, daß f nur stetig ist. Für $f \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ dagegen ist die Gültigkeit dieses Lemmas trivial.

Lemma 10: *Es sei $v_0 \in \mathbf{R}^n$ ein fester Einheitsvektor, $f \in C_0(\mathbf{R}^n)$ und $a \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt für alle $t \geqq 0$, $\delta > 0$ und $1 \leqq j \leqq n$*

$$\left\|\left\{D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (af)\right)\right] - aD_j[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)]\right\} - (D_j a) f\right\|_{0,\mathbf{R}^n}$$
$$\leqq C(1 + t/\delta)\left(\|a\|_{1,\mathbf{R}^n} \theta_f^0(t + \delta) + \|f\|_{0,\mathbf{R}^n} \theta_a^1(t + \delta)\right).$$

Beweis: 1. Es gilt

$$D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (af)\right)\right] = [H_{tv_0} \circ (D_j J_\delta)] * (af)$$

und

$$D_j[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)] = [H_{tv_0} \circ (D_j J_\delta)] * f.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &D_j\big[H_{tv_0}\circ\big(J_\delta * (af)\big)\big](x) - a(x)\, D_j[H_{tv_0}\circ (J_\delta * f)](x) \\ &= \int (D_jJ_\delta)(x + tv_0 - y)\, a(y)\, f(y)\, dy - a(x)\int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)\, f(y)\, dy \\ &= \int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)\, f(y)\,\big(a(y)-a(x)\big)\, dy =: I(x,t,\delta). \end{aligned}$$

2. Es gilt $f(y) = f(x) + \big(f(y) - f(x)\big)$ und

$$\begin{aligned} a(y) - a(x) = &\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\, D_i a(x) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\big(D_i a(x + \vartheta(y-x)) - D_i a(x)\big) \end{aligned}$$

$(0 < \vartheta < 1)$. Wir zerlegen $I(x, t, \delta)$ in drei Summanden:

$$\begin{aligned} &I(x,t,\delta) \\ &= \int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)\, f(x)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\, D_ia(x)\right) dy \\ &\quad + \int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)\big(f(y)-f(x)\big)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\, D_ia(x)\right) dy \\ &\quad + \int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)\, f(y)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\big(D_ia(x+\vartheta(y-x)) - D_ia(x)\big)\right) dy \\ &=: I_1(x,t,\delta) + I_2(x,t,\delta) + I_3(x,t,\delta). \end{aligned}$$

3. Es gilt

$$I_1(x,t,\delta) = f(x)\left(\sum_{i=1}^{n} D_ia(x)\int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)(y_i-x_i)\, dy\right).$$

Aus (3) folgt

$$\int (D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)(y_i-x_i)\, dy = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Daraus ergibt sich $I_1(x, t, \delta) = f(x)\, D_ja(x)$ für alle $t \geqq 0$ und $\delta > 0$. Es ist also noch

$$\|I_2 + I_3\|_{0,\mathbf{R}^n} \leqq C(1 + t/\delta)\big(\|a\|_{1,\mathbf{R}^n}\,\theta_f{}^0(t+\delta) + \|f\|_{0,\mathbf{R}^n}\,\theta_a{}^1(t+\delta)\big) \tag{6}$$

zu zeigen.

4. Für jedes $x \in \mathbf{R}^n$ gilt

$$|I_2(x,t,\delta)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |D_ia(x)| \int_{B^\delta_{x+tv_0}} |(D_jJ_\delta)(x+tv_0-y)|\, |f(y)-f(x)|\, |y_i - x_i|\, dy.$$

Es ist $|(D_jJ_\delta)(x + tv_0 - y)| \leqq C/\delta^{n+1}$ für alle $x, y \in \mathbf{R}^n$ und alle $t \geqq 0$, $\delta > 0$ (s. (2)), $|y_i - x_i| \leqq |y - x| \leqq t + \delta$ für $y \in B^\delta_{x+tv_0}$, ferner

$$\sup_{y\in B^\delta_{x+tv_0}} \{|f(y) - f(x)|\} \leqq \sup_{\substack{x,y\in\mathbf{R}^n\\ |x-y|\leqq t+\delta}} \{|f(y) - f(x)|\} = \theta_f{}^0(t+\delta),$$

$$\int_{B^\delta_{x+tv_0}} 1\, dy = C\delta^n.$$

Daraus folgt

$$|I_2(x, t, \delta)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |D_i a(x)| \frac{C}{\delta^{n+1}} \theta_f^0(t + \delta) (t + \delta) C\delta^n$$

$$\leqq C\left(1 + \frac{t}{\delta}\right) \|a\|_{1,\mathbf{R}^n} \theta_f^0(t + \delta),$$

also

$$\|I_2(\cdot, t, \delta)\|_{0,\mathbf{R}^n} \leqq C(1 + t/\delta) \|a\|_{1,\mathbf{R}^n} \theta_f^0(t + \delta). \tag{7}$$

Durch ähnliche Überlegungen erhält man

$$\|I_3(\cdot, t, \delta)\|_{0,\mathbf{R}^n} \leqq C(1 + t/\delta) \|f\|_{0,\mathbf{R}^n} \theta_a^1(t + \delta). \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt (6) und damit die Behauptung ∎

Aus Lemma 10 folgt durch Anwendung der Leibnizschen Produktregel das

Lemma 11: *Es sei $v_0 \in \mathbf{R}^n$ ein fester Einheitsvektor, $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$ und $a \in C_0^{k+1}(\mathbf{R}^n)$. Dann gilt für alle $t \geqq 0$, $\delta > 0$ und $1 \leqq j \leqq n$*

$$\left\|\left\{D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (af)\right)\right] - aD_j[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)]\right\} - (D_j a) f\right\|_{k,\mathbf{R}^n}$$

$$\leqq C(1 + t/\delta) \left(\|a\|_{k+1,\mathbf{R}^n} \theta_f^k(t + \delta) + \|f\|_{k,\mathbf{R}^n} \theta_a^{k+1}(t + \delta)\right).$$

5.6. Mittels Lemma 7 und 11 kann die folgende Aussage bewiesen werden.

Lemma 12: *Es sei $P = \sum_{|\alpha| \leqq r} b_\alpha(x) D^\alpha$ ein beliebiger Differentialoperator mit $b_\alpha \in C_0^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ für $|\alpha| = r$ und $b_\alpha \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$ für $|\alpha| \leqq r - 1$. Weiterhin sei $F \in \left(\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)\right)'_{\Sigma_1}$ ein Element mit $D^\alpha F \in \left(\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)\right)'$ für $|\alpha| \leqq r - 1$ sowie $v_0 \in \mathbf{R}^n$ ein fester Einheitsvektor.*

(i) *Es gilt*

$$\lim_{\delta \to +0} \langle P(F * J_\delta) - (PF) * J_\delta, f\rangle = 0 \qquad \text{für alle} \quad f \in C_0^k(\mathbf{R}^n). \tag{9}$$

(ii) *Für $\delta(t)$ möge $c_1 t \leqq \delta(t)$ für alle $t > 0$ mit einer Konstanten $c_1 > 0$ sowie $\delta(t) \to 0$ für $t \to +0$ gelten. Dann ist*

$$\lim_{t \to +0} \left\langle P\left((H_{-tv_0} \circ F) * J_{\delta(t)}\right) - (H_{-tv_0} \circ PF) * J_{\delta(t)}, f\right\rangle = 0 \tag{10}$$

für alle $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$.

Beweis: 1. Es gilt für alle $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$, $\delta > 0$ und $t \geqq 0$

$$\left\langle P\left((H_{-tv_0} \circ F) * J_\delta\right) - (H_{-tv_0} \circ PF) * J_\delta, f\right\rangle$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqq r} \left\langle D^\alpha F, H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right) - b_\alpha\left(H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\right)\right\rangle.$$

2. Für $|\alpha| \leqq r - 1$ ist $D^\alpha F \in \left(\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)\right)'$ und $b_\alpha f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$. Aus Lemma 7 folgt

$$\lim_{t,\delta \to +0} \left\|H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right) - (b_\alpha f)\right\|_{k,\mathbf{R}^n} = 0$$

und

$$\lim_{t,\delta \to +0} \left\|b_\alpha\left(H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\right) - (b_\alpha f)\right\|_{k,\mathbf{R}^n} = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$\lim_{t,\delta\to+0} \left\|H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right) - b_\alpha\left(H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\right)\right\|_{k,\mathbf{R}^n} = 0.$$

Wir erhalten also

$$\lim_{t,\delta\to+0} \sum_{|\alpha|\leq r-1} \left\langle D^\alpha F, H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right) - b_\alpha\left(H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\right)\right\rangle = 0 \tag{11}$$

für alle $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$. Insbesondere ist (für $t = 0$)

$$\lim_{\delta\to+0} \sum_{|\alpha|\leq r-1} \langle D^\alpha F, J_\delta * (b_\alpha f) - b_\alpha(J_\delta * f)\rangle = 0. \tag{12}$$

3. Zu jedem Multiindex α mit $|\alpha| = r$ existiert ein Multiindex γ mit $|\gamma| = r - 1$ sowie ein j, $1 \leq j \leq n$, mit $D^\alpha = D_j D^\gamma$. Es ist $b_\alpha \in C_0^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ für $|\alpha| = r$. Für $t \geq 0$ und $\delta > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left\langle D^\alpha F, H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right) - b_\alpha\left(H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)\right)\right\rangle \\
&= -\left\langle D^\gamma F, D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right)\right] - b_\alpha D_j[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)]\right. \\
&\quad \left. - (D_j b_\alpha)\,[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)]\right\rangle.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 11 und Lemma 7 sowie der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&\left\|D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right)\right] - b_\alpha D_j[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)] - (D_j b_\alpha)\,[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)]\right\|_{k,\mathbf{R}^n} \\
&\leq \left\|D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_\delta * (b_\alpha f)\right)\right] - b_\alpha D_j[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f)] - (D_j b_\alpha)\, f\right\|_{k,\mathbf{R}^n} \\
&\quad + \|(D_j b_\alpha)\,[H_{tv_0} \circ (J_\delta * f) - f]\|_{k,\mathbf{R}^n} \\
&\leq C\left(1 + \frac{t}{\delta}\right)\left(\|b_\alpha\|_{k+1,\mathbf{R}^n}\, \theta_f^k(t+\delta) + \|f\|_{k,\mathbf{R}^n}\, \theta_{b_\alpha}^{k+1}(t+\delta)\right) \\
&\quad + \|b_\alpha\|_{k+1,\mathbf{R}^n}\left(\theta_f^k(\delta) + \theta_f^k(t)\right).
\end{aligned}$$

4. Für $t = 0$ ergibt sich daraus

$$\lim_{\delta\to+0} \left\|D_j\left(J_\delta * (b_\alpha f)\right) - b_\alpha D_j(J_\delta * f) - (D_j b_\alpha)\,(J_\delta * f)\right\|_{k,\mathbf{R}^n} = 0$$

und damit $\langle D^\alpha F, J_\delta * (b_\alpha f) - b_\alpha(J_\delta * f)\rangle \to 0$ $(\delta \to +0)$ für $|\alpha| = r$, woraus zusammen mit (12) die Behauptung (9) folgt.

5. Nun zum Beweis von (10). Aus den Voraussetzungen für $\delta(t)$ folgt $t/\delta(t) \leq 1/c_1$ für alle $t > 0$. Aus der Abschätzung im 3. Beweisschritt ergibt sich dann

$$\lim_{t\to+0} \left\|D_j\left[H_{tv_0} \circ \left(J_{\delta(t)} * (b_\alpha f)\right)\right] - b_\alpha D_j[H_{tv_0} \circ (J_{\delta(t)} * f)] - (D_j b_\alpha)\,[H_{tv_0} \circ (J_{\delta(t)} * f)]\right\|_{k,\mathbf{R}^n} = 0$$

und damit

$$\lim_{t\to+0} \left\langle D^\alpha F, H_{tv_0} \circ \left(J_{\delta(t)} * (b_\alpha f)\right) - b_\alpha\left(H_{tv_0} \circ (J_{\delta(t)} * f)\right)\right\rangle = 0$$

für alle α mit $|\alpha| = r$ und alle $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$. Zusammen mit (11) folgt hieraus die Behauptung (10) ∎

5.7. Aus dem folgenden Lemma wird sich das Lemma 1 als Folgerung ergeben.

Lemma 13: *Es sei* $P = \sum_{|\alpha| \leq r} b_\alpha(x) D^\alpha$ *ein beliebiger Differentialoperator mit* $b_\alpha \in C_0^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ *für* $|\alpha| = r$ *und* $b_\alpha \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$ *für* $|\alpha| \leq r - 1$. $\Omega_1 \subset\subset \mathbf{R}^n$ *besitze die eingeschränkte Kegeleigenschaft. Dann gibt es zu jedem Element* $F \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'_{\bar{\Omega}_1}$ *mit* $D^\alpha F \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'$ *für* $|\alpha| \leq r - 1$ *und* $PF \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'$ *eine Folge* $(\psi_l)_1^\infty \subset C_0^\infty(\Omega_1)$ *mit* $\langle P\psi_l, f\rangle \to \langle PF, f\rangle$ *für alle* $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$.

Beweis: 1. Die offenen Mengen U_x $(x \in \partial\Omega_1)$ seien die Umgebungen entsprechend der eingeschränkten Kegeleigenschaft. Aus $\bigcup \{U_x : x \in \partial\Omega_1\} \supset \partial\Omega_1$ und der Kompaktheit von $\partial\Omega_1$ folgt die Existenz endlich vieler U_x – wir bezeichnen sie mit $U_1, \ldots, U_N$ – mit $\bigcup \{U_j : j = 1, \ldots, N\} \supset \partial\Omega_1$. Zu jeder Menge U_j gibt es einen Kegel $K(0, v_j, h_j, c_j)$, so daß $K(z, v_j, h_j, c_j) \subset \Omega_1$ für alle $z \in \bar{\Omega}_1 \cap U_j$ gilt. Insbesondere ist also $z + tv_j \in \Omega_1$ für alle t mit $0 < t < h_j$ und alle $z \in \bar{\Omega}_1 \cap U_j$. $U_0 \subset\subset \Omega_1$ sei eine offene Menge derart, daß $\bigcup \{U_j : j = 0, \ldots, N\} \supset \bar{\Omega}_1$ gilt. Weiterhin soll $\{\eta_j\}_0^N$ eine zu $\{U_j\}_0^N$ gehörige Zerlegung der Einheit für $\bar{\Omega}_1$ sein. Es ist also $\eta_j \in C_0^\infty(U_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ und $\eta_0(x) + \cdots + \eta_N(x) = 1$ für alle $x \in \bar{\Omega}_1$.

2. Für $F \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'_{\bar{\Omega}_1}$ gilt nach Voraussetzung $D^\alpha F \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'$ für $|\alpha| \leq r - 1$ und $PF \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'$. Wir definieren $F_j = F\eta_j$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$. Es ist $F = \sum F_j$, $\operatorname{supp} F_j \subset \bar{\Omega}_1 \cap U_j$, $D^\alpha F_j \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'$ für $|\alpha| \leq r - 1$ und $PF_j \in (\mathring{C}^k(\mathbf{R}^n))'$.

3. Es sei $\delta_j(t) := 2^{-1} d(\bar{\Omega}_1 \cap U_j + tv_j, \partial\Omega_1)$ für $j = 1, \ldots, N$ und $t \geq 0$. Wegen $\delta_j(t) \leq t/2$ gilt $\delta_j(t) \to 0$ für $t \to +0$. Weiterhin folgt aus Lemma 4

$$\left(c_j/2\sqrt{c_j^2 + 1}\right) t \leq \delta_j(t) \qquad \text{für } 0 \leq t \leq h_j/2, \tag{13}$$

woraus sich insbesondere $\delta_j(t) > 0$ für $0 < t \leq h_j/2$ ergibt. Für diese t ist $\operatorname{supp} (H_{-tv_j} \circ F_j) \subset (\bar{\Omega}_1 \cap U_j + tv_j) \subset \Omega_1$, und wegen $d(\bar{\Omega}_1 \cap U_j + tv_j, \partial\Omega_1) = 2\delta_j(t) > 0$ gilt $(H_{-tv_j} \circ F_j) * J_{\delta_j(t)} \in C_0^\infty(\Omega_1)$.

4. Aus Lemma 9 folgt

$$\lim_{t \to +0} \langle (H_{-tv_j} \circ PF_j) * J_{\delta_j(t)}, f\rangle = \langle PF_j, f\rangle \ \forall f \in C_0^k(\mathbf{R}^n). \tag{14}$$

Wegen (13) erfüllt $\delta_j(t)$ die Voraussetzung von Lemma 12/(ii). Aus diesem Lemma erhalten wir dann

$$\lim_{t \to +0} \left\langle P\left((H_{-tv_j} \circ F_j) * J_{\delta_j(t)}\right) - (H_{-tv_j} \circ PF_j) * J_{\delta_j(t)}, f\right\rangle = 0$$

für alle $f \in C_0^k(\mathbf{R}^n)$. Daraus und aus (14) folgt

$$\lim_{t \to +0} \left\langle P\left((H_{-tv_j} \circ F_j) * J_{\delta_j(t)}\right), f\right\rangle = \langle PF_j, f\rangle \quad \text{für alle} \quad f \in C_0^k(\mathbf{R}^n),$$
$$1 \leq j \leq N.$$

5. Es ist $\operatorname{supp} F_0 \subset U_0 \subset\subset \Omega_1$. Für $0 < t \leq 2^{-1} d(U_0, \partial\Omega_1) =: 2^{-1} h_0$ setzen wir $\delta_0(t) := t$. Dann ist $F_0 * J_{\delta_0(t)} \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Aus Lemma 12/(i) und Lemma 9 folgt

$$\lim_{t \to +0} \langle P(F_0 * J_{\delta_0(t)}), f\rangle = \langle PF_0, f\rangle \qquad \text{für alle} \quad f \in C_0^k(\mathbf{R}^n).$$

6. Für $0 < t \leq t_0 := \min \{2^{-1} h_i : i = 0, 1, \ldots, N\}$ ist

$$\tilde{\psi}_t := F_0 * J_{\delta_0(t)} + \sum_{j=1}^N (H_{-tv_j} \circ F_j) * J_{\delta_j(t)} \in C_0^\infty(\Omega_1),$$

und es gilt

$$\lim_{t \to +0} \langle P\tilde{\psi}_t, f\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^N PF_j, f\right\rangle = \langle PF, f\rangle \qquad \text{für alle} \quad f \in C_0^k(\mathbf{R}^n).$$

Die Folge $(\psi_l)_1^\infty$ mit $\psi_l := \tilde{\psi}_{t_0/l}$ hat dann die gewünschten Eigenschaften ∎.

5.8. Nun zum Beweis von Lemma 1. Dieses Lemma folgt unmittelbar aus Lemma 13. Dazu ist lediglich folgendes zu tun:

1. Durch $\langle F, f\rangle = \langle F_1, (f\eta_0)|_\Omega\rangle$ für alle $f \in \mathring{C}^k(\mathbf{R}^n)$ ordnen wir jedem $F_1 \in (\mathring{C}^k(\Omega))'_{\bar{\Omega}_1}$ ein Element $F \in (C^k(\mathbf{R}^n))'_{\bar{\Omega}_1}$ zu. Dabei ist $\eta_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ eine feste Funktion mit $\eta_0 \equiv 1$ in einer Umgebung von $\bar{\Omega}_1$.

2. Die Koeffizienten $b_{1,\alpha}$ des Differentialoperators P_1 setzen wir in den $\mathbf{R}^n$ fort zu $b_\alpha \in C_0^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ für alle α mit $|\alpha| \leqq r$. Dies ist möglich, weil $\partial\Omega$ C^∞-glatt ist. Aus P_1 entsteht dadurch der Differentialoperator $P = \sum_{|\alpha|\leqq r} b_\alpha(x) D^\alpha$.

Ist dann $(\psi_l)_1^\infty$ die Folge aus Lemma 13, so haben die Funktionen $\varphi_l := \psi_l|_\Omega$ die im Lemma 1 geforderten Eigenschaften ∎

LITERATUR

[1] Brelot, M.: Sur l'approximation et al convergence dans la théorie de fonctions harmoniques ou holomorphes. Bull. Soc. Math. France 73 (1945), 55–70.

[2] Browder, F. E.: Functional analysis and partial differential equations II. Math. Ann. 145 (1962), 81–226.

[3] Browder, F. E.: Approximation by solutions of partial differential equations. Amer. J. Math. 84 (1962), 134–160.

[4] Deny, J.: Sur l'approximation des fonctions harmonique. Bull. Soc. Math. France 73 (1945), 71–73.

[5] Hamann, U.: Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf geschlossenen Hyperflächen. Math. Nachr. 136 (1988), 285–301.

[6] Hamann, U.: Approximation durch Lösungen elliptischer Randwertprobleme auf offenen Mengen I. Z. Anal. Anw. 9 (1990), 289–301.

[7] Hamann, U.: Zur Fortsetzbarkeit stetig differenzierbarer Funktionen. Rostock. Math. Kolloq. (in Vorbereitung).

[8] Келдыш, М. В.: О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат. наук 8 (1941), 171–231.

[9] Мергелян, С. Н.: Равномерное приближение функций комплексной переменной. Успехи мат. наук 7 (1952) 2, 31–122.

[10] Runge, C.: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Acta. Math. 6 (1885), 229–244.

[11] Schulze, B.-W., und G. Wildenhain: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin: Akademie-Verlag 1977, und Basel–Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1977.

[12] Витушкин, А. Г.: Аналитическая ёмкость множеств в задачах теории приближений. Успехи мат. наук 22 (1967) 6, 141–199.

[13] Wildenhain, G.: Uniform approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations of arbitrary order I. Z. Anal. Anw. 2 (1983), 511–521.

[14] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1982.

Manuskripteingang: 20. 02. 1989

VERFASSER:

Dr. Uwe Hamann
Fachbereich Mathematik der Universität Rostock
Universitätsplatz 1
O-2500 Rostock
Bundesrepublik Deutschland