Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10(1991)2, 211-224

Paley-Wiener-Sätze auf kompakten topologischen Gruppen

H.F. BAUCH

The connection between analyticity of functions on a compact connected group and the properties of their Fourier coefficients is investigated. The functions with exponentially rapidly decreasing Fourier coefficients are exactly the analytic vectors of the right regular representation with the representation space of the functions with absolutely convergent Fourier series. They also can be continued analytically in the complexification of the group.

Key words: *Analytic functions, exponentially rapidly decreasing Fourier series*
AMS subject classification: 22C05, 43A75

0. Einführung

Sätze vom Paley-Wiener-Typ beruhen auf dem Zusammenhang von Differentiation und Fourier-Transformation für Funktionen auf geeigneten Gruppen. Sie gehen auf folgenden Satz von PALEY und WIENER [21] aus dem Jahre 1934 zurück.

Satz : *Für eine Funktion f auf R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *Es gibt ein $r > 0$, so daß sich f komplex analytisch auf den Streifen $|\mathrm{Im}\, z| < r$ der komplexen Ebene fortsetzen läßt, und für die Fortsetzung fc gilt* $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |fc(x+iy)|^2\, dx : |y| < r \right\} < \infty$.

b) *Die Fourier-Transformierte $f^\wedge$ von f ist exponentiell schnell fallend, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^\wedge(\sigma)|^2 \exp(2|\sigma|\varepsilon)\, d\sigma < \infty$ *gilt.*

Auf beliebigen lokalkompakten, abelschen Gruppen G werden durch die Fourier-Transformation Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion f auf G in Wachstumseigenschaften der Fourier-Transformierten $f^\wedge$ übersetzt und umgekehrt. Legt man kompakte Gruppen zugrunde, so kommen für f nur Differenzierbarkeitseigenschaften und für $f^\wedge$ nur Wachstumseigenschaften in Betracht. In dieser Arbeit wird nun untersucht, welche Differenzierbarkeitseigenschaften bis hin zur Analytizität bei Funktionen auf einer kompakten, zusammenhängenden topologischen Gruppe durch geeignetes Fallen ihrer Fourier-Koeffizienten gesichert werden. Solche Ergebnisse werden bei EDAMATSU [11], der Räume differenzierbarer Funktionen auf kompakten Gruppen untersucht, als wünschenswert aber unbekannt bezeichnet. Auch BORN [5] geht in seiner Dissertation, die sich u.a. mit differenzierbaren Funktionen auf lokalkompakten Gruppen beschäftigt, nicht auf Zusammenhänge mit der Fourier-Transformation ein.

Wir stellen nun zur leichteren Lesbarkeit die entsprechenden Definitionen und Ergebnisse speziell für den Fall zusammen, daß die unterliegende Gruppe zusammenhängend und kompakt ist. Die Menge der stetigen Homomorphismen von $\mathbb{R}$ in G hat die Struktur einer Lie-Algebra und wird mit $\Lambda = \Lambda(G)$ bezeichnet. Ihre Elemente heißen einparametrige Untergruppen von G. Eine stetige Funktion f auf G mit Werten in einem beliebigen Banach-Raum B wird nach BOSECK und CZICHOWSKI [8,9] *differenzierbar auf G in Richtung* $\lambda \in \Lambda$ genannt, falls für alle $g \in G$ der Grenzwert

$$D_\lambda f(g) := Df(g,\lambda) := \lim_{t \to 0} t^{-1}\Big(f(g\,\lambda(t)) - f(g)\Big)$$

existiert. Gilt dies für alle $\lambda \in \Lambda$, so heißt f *differenzierbar auf G*. Sind alle Richtungsableitungen $D_\lambda f := D_\lambda f(\cdot)$ stetig und auch differenzierbar auf G, so heißt f *zweimal differenzierbar auf G* usw. Der Raum der $\mathbb{C}$-wertigen, beliebig oft auf G differenzierbaren Funktionen sei $C^\infty(G)$. Dieser Differenzierbarkeitsbegriff stimmt auf Lie-Gruppen mit dem üblichen überein.

Eine B-wertige stetige Funktion f auf G heißt *analytisch auf G*, wenn für alle $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$ und $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \Lambda^n$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß die Funktion

$$\tilde{f}_g^{\lambda_1\cdots\lambda_n} : (t_1,\dots,t_n) \to f\left(g\lambda_1(t_1)\cdots\lambda_n(t_n)\right)$$

in eine für alle $(t_1,\dots,t_n)$ mit $|t_i| < \varepsilon$ $(i = 1,\dots,n)$ konvergente Taylor-Reihe entwickelbar ist, deren Koeffizientenfunktionen auf G stetig sind. Der Raum der $\mathbb{C}$-wertigen auf G analytischen Funktionen sei $A(G)$. Die Koeffizientenfunktionen der Taylor-Reihen sind bis auf einen Faktor Ableitungen der betrachteten Funktion f, so daß jede auf G analytische Funktion auch auf G beliebig oft differenzierbar ist [2].

Wenden wir uns nun der Fourier-Transformation auf einer kompakten Gruppe G zu. Sie überführt $\mathbb{C}$-wertige L_1-Funktionen f auf G in operatorwertige Funktionen $f^\wedge$ auf dem diskreten dualen Objekt Σ der Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler, unitärer (endlichdimensionaler) Darstellungen von G. Ein Representantensystem $\{U^\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ sei fest gewählt. Alle Darstellungen einer Äquivalenzklasse σ haben das gleiche höchste Gewicht. Deshalb kann σ für den Fall, daß $\dim \Lambda < \infty$ ist, durch die Killing-Form auf Λ mit einem Betrag $|\sigma|$ versehen werden. Auch $\lambda \in \Lambda$ wird so ein Betrag $|\lambda|$ zugeordnet. Der Fourier-Koeffizient von f an der Stelle σ, $f^\wedge(\sigma) = \int_G f(g)\overline{U^\sigma(g)}dg$, ist ein Operator auf dem d_σ-dimensionalen Darstellungsraum V_σ von U^σ. Ist die Menge der Fourier-Koeffizienten von f absolut summierbar, d.h. $\sum d_\sigma \|f^\wedge(\sigma)\|_1 < \infty$, und f stetig, so läßt sich die Funktion f durch ihre absolut summierbare Fourier-

Reihe ausdrücken, d.h. für alle $g \in G$ gilt $f(g) = \sum d_\sigma \operatorname{Tr}(f^\wedge(\sigma)^T U^\sigma(g))$. Die Menge der Funktionen dieser Art wird durch $\|f\| = \sum d_\sigma \|f^\wedge(\sigma)\|_1$ zu einem Banach-Raum, den wir mit $K = K(G)$ bezeichnen. Eine andere Beschreibung für K ist

$$K = L_2 * L_2 \,, \quad \|f\| = \inf \left\{ \|f_1\| \|f_2\| \;\middle|\; f = f_1 * f_2 \,, \; f_1, f_2 \in L_2 \right\}.$$

Die Norm auf K ist stärker als die durch $C(G)$ auf K induzierte uniforme Norm.

Während auf kompakten Lie-Gruppen eine genügend hohe Differenzierbarkeit einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion f die absolute Summierbarkeit ihrer Fourier-Reihe erzwingt, wie SUGIURA [22] und WALLACH [23] gezeigt haben, hat der Verfasser in [2] nachgewiesen, daß es im allgemeinen Fall beliebig oft differenzierbare Funktionen gibt, deren Fourier-Reihe nicht absolut summierbar ist. Daher erscheint es sinnvoll, von vornherein mit Funktionen aus K zu arbeiten, wenn man Einflüsse der Differenzierbarkeitseigenschaften auf das Wachstum der Fourier-Koeffizienten untersuchen will. Eine interessante Eigenschaft B-wertiger differenzierbarer Funktionen f auf G gestattet die dann folgenden Definitionen:

Zu f existiert ein abgeschlossener Normalteiler N, so daß f auf den Nebenklassen nach N konstant und die Dimension von $\Lambda_N = \Lambda(G/N)$ endlich ist. Das duale Objekt Σ_N von G/N ist dann der Annullator $A(\Sigma, N)$ von N in Σ. Eine Teilmenge Γ von Σ heißt *von endlichem Rang*, falls ein abgeschlossener Normalteiler N von G existiert, so daß $\dim \Lambda(G/N) < \infty$ und $\Gamma \subseteq A(\Sigma, N)$ gilt, und sie heißt *endlich erzeugt*, falls zusätzlich G/N sogar Lie-Gruppe ist. Setzt man für $g \in G$, $\lambda \in \Lambda$, $t \in \mathbb{R}$ nun $f_N(gN) = f(g)$, $\lambda_N(t) = \lambda(t)N$, so gilt $D_{\lambda_N} f_N(gN) = D_\lambda f(g)$.

Eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion f auf G heißt *schnell fallend*, falls $f^\wedge$ schnell fallend ist, d.h. falls

$$\operatorname{supp} f^\wedge \text{ von endlichem Rang und } \sum_{\sigma \in \operatorname{supp} f^\wedge} d_\sigma |\sigma|^k \|f^\wedge(\sigma)\|_1 < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Diese Bedingung ist äquivalent dazu, daß f eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist und f und jede Ableitung von f in K liegen. Hingegen ist sie echt stärker als die im Lieschen Falle gleichwertige Bedingung $|\sigma|^k \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \to 0$ $(\sigma \to \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Der Raum der schnell fallenden Funktionen sei $S(G)$ (vgl. dazu [1]).

Eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion f auf G heißt *exponentiell schnell fallend*, falls $f^\wedge$ exponentiell schnell fallend ist, d.h. falls

$$\operatorname{supp} f \text{ von endlichem Rang ist und } \sum_{\sigma \in \operatorname{supp} f^\wedge} d_\sigma \exp(\varepsilon|\sigma|) \|f^\wedge(\sigma)\|_1 < \infty$$

für ein $\varepsilon < 0$ gilt. Der Raum all dieser Funktionen sei $ES(G)$. Jede Funktion aus ihm ist auf G analytisch und natürlich auch schnell fallend (vgl. [2]).

Eng mit Differenzierbarkeit und Analytizität verknüpft ist die reguläre Darstellung der Gruppe G; wir benutzen die rechte reguläre Darstellung R von G über $K(G)$ und nicht über $C(G)$. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Zusammenhängen zwischen den Räumen der differenzierbaren Vektoren $K^{\infty}(R)$ und der analytischen Vektoren $K^{\omega}(R)$ für R über $K(G)$ und den durch die Wachstumseigenschaften der Fourier-Koeffizienten definierten Räumen $S(G)$ und $ES(G)$. Eine Funktion f erweist sich genau dann als analytischer Vektor für R über $K(G)$, wenn sie eine exponentiell schnell fallende Fourier-Transformierte hat. Dann ist sie auch differenzierbarer Vektor für R, und jeder solche hat wiederum eine schnell fallende Fourier-Transformierte. Damit ist eine Charakterisierung der Funktionen, deren Fourier-Koeffizienten exponentiell schnell fallen, durch Analytizitätseigenschaften gelungen. Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis ist die von GOODMAN [13, 14] eingeführte Benutzung der Quadratwurzel des Operatorabschlusses eines Casimir-Operators. Will man den Begriff der analytischen Fortsetzung benutzen, so kann man die Komplexifizierung $G_{\mathbb{C}}$ einer kompakten Gruppe G heranziehen [3,10,18]. Sie läßt sich realisieren als die Gruppe der multiplikativen, nicht verschwindenden linearen Funktionale der Hopf-Algebra $T(G)$ der Darstellungsfunktionen (trigonometrischer Polynome [15: § 27.4]) von G. Die kompakte Gruppe G ist isomorph zur Untergruppe der unitären Elemente von $G_{\mathbb{C}}$. Für $G_{\mathbb{C}}$ gilt die Polarzerlegung $G_{\mathbb{C}} = G\exp(\mathrm{i}\,\Lambda(G))$, d.h. jedes Element h der Komplexifizierung zerfällt eindeutig in das Produkt aus einem (unitären) Gruppenelement g und einem positiv definiten Element $\exp \mathrm{i}\lambda$ mit $\lambda \in \Lambda$. Beispiele sind die Polarzerlegung einer komplexen Zahl $z \neq 0$ in ein Element aus $\mathbb{T}$ und eine positive reelle Zahl sowie die Zerlegung einer komplexen, regulären Matrix in eine unitäre und eine positiv definite. Die Darstellungen U^{σ} lassen sich auf $G_{\mathbb{C}}$ ausdehnen, wobei man die infinitesimale Darstellung dU^{σ} von U^{σ} über V_{σ} benutzt:

$$U^{\sigma}(g \exp \mathrm{i}\lambda) := U^{\sigma}(g)\exp(\mathrm{i}\, dU^{\sigma}(\lambda)).$$

Damit läßt sich auch die Fourier-Reihe einer $\mathbb{C}$-wertigen Funktion f zur Laplace-Reihe ausdehnen, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} d_{\sigma} \, \| f^{\wedge}(\sigma)^{\mathsf{T}}\, U^{\sigma}(\exp \mathrm{i}\,\lambda)\|_{1} < \infty \quad \forall \lambda \in \Lambda \text{ mit } |\lambda| < \varepsilon$$

ist. Die *Laplace-Reihe* definiert eine Fortsetzung fc von f auf die offene Teilmenge

$$G_{\varepsilon} = \left\{ h \in G_{\mathbb{C}} \mid h = g\exp(\mathrm{i}\,\lambda),\ |\lambda| < \varepsilon,\ \lambda \in \Lambda \right\}$$

von $G_{\mathbb{C}}$ durch

$$fc(h) = \sum_{\sigma\in\Sigma} d_{\sigma} \operatorname{Tr}\left(f^{\wedge}(\sigma)^{\mathsf{T}}\, U^{\sigma}(h)\right);$$

Für die Definition der komplexen Analytizität werden komplexe einparametrige Untergruppen benötigt. Schon im Fall $G = \mathbb{T}$, $G_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ sind nicht alle stetigen Homomorphismen von $(\mathbb{C}, +)$ in $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ komplex differenzierbar, sondern genau die, die sich als Fortsetzung von stetigen Homomorphismen μ von $\mathbb{R}$ in $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ ergeben, $\mu(z) = \exp(zz_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Für $\lambda \in \Lambda(G_{\mathbb{C}})$ definieren wir daher $\lambda(z) := z\,\lambda(1) = \exp z\lambda \in G_{\mathbb{C}}$ für $z \in \mathbb{C}$ und nennen eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion f auf der offenen Menge $O \subseteq G_{\mathbb{C}}$ komplex analytisch, falls für alle $h \in O$ und $\lambda \in \Lambda(G_{\mathbb{C}})$ die Funktion $\tilde{f}_h^\lambda : z \to f(h\,\lambda(z))$ komplex differenzierbar an der Stelle Null ist.

Im Abschnitt 2 wird abschließend gezeigt, daß jede Funktion mit exponentiell schnell fallender Fourier-Transformierter eine komplex analytische Fortsetzung in Gestalt ihrer Laplace-Reihe besitzt.

Die Umkehrung dieser Aussage konnte nicht gezeigt werden, weil der Übergang von Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion zu den Wachstumseigenschaften der Fourier-Transformierten auf der Vertauschung der Summationen von Fourier- (bzw. Laplace-) Reihe und Exponentialreihe beruht, die Zulässigkeit der Vertauschung aber nur für exponentiell schnell fallende Funktionen erkannt werden konnte, bei denen ja die Doppelreihe absolut konvergiert. Im Abschnitt 3 läßt sich jedoch für den speziellen Fall, daß die zugrunde liegende Gruppe nicht nur kompakt und zusammenhängend sondern auch abelsch ist, durch Konstruktion geeigneter einparametriger Untergruppen und die Kenntnis der Struktur der Charaktergruppe, d.h. des dualen Objekts, die Vertauschbarkeit der Summationen erreichen. Dadurch kann gezeigt werden, daß die Fortsetzbarkeit einer Funktion f durch ihre Laplace-Reihe nach sich zieht, daß letztere komplex analytisch ist und f eine exponentiell schnell fallende Fourier-Transformierte besitzt.

Im Abschnitt 4 wird der engere Differenzierbarkeitsbegriff von **B**ruhat, **K**ac und **M**aurin zugrunde gelegt. Eine auf G differenzierbare Funktion f ist *BMK-differenzierbar* genau dann, wenn der oben angeführte Normalteiler N die Eigenschaft hat, daß G/N nicht nur endlichdimensionale sondern sogar Lie-Gruppe ist. Die Ergebnisse auf kompakten Lie-Gruppen lassen sich nun ohne Schwierigkeiten übertragen. Wenn eine Funktion beliebig oft BMK-differenzierbar ist, so ist sie auch BMK-differenzierbarer Vektor und hat eine schnell fallende Fourier-Transformierte mit endlich erzeugtem Träger. Ist sie sogar komplex BMK-analytisch fortsetzbar, so ist sie auch BMK-analytischer Vektor und ihre Fourier-Transformierte ist exponentiell schnell fallend.

1. Differenzierbare Vektoren und schnell fallende Funktionen

Es sei $R: G \to \operatorname{End} K$ die rechtsreguläre Darstellung von G über K, $R(g)f(h) = f(hg)$ ($f \in K$; $g, h \in G$), und für $f \in K$ sei Rf die durch $Rf(g) = R(g)f$ gegebene K-wertige Funktion auf G.

Definition 1 : Eine komplexwertige Funktion $f \in K$ heißt *differenzierbarer Vektor für R*, kurz $f \in K^{\infty}(R)$, falls die K-wertige Funktion Rf beliebig oft differenzierbar ist.

Lemma 1 : *Jeder differenzierbare Vektor f für R ist auch eine beliebig oft differenzierbare Funktion, wobei gilt*

$$D_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} f = DRf(e, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda^n .$$

Beweis: Für $n = 0$ ist $Rf(e) = R(e)f = f$. Sei $F := D_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} f$. Nach [6: Lemma 1.1] ist dann $RF(e) = DRf(e, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Zu zeigen ist also, daß für $\lambda \in \Lambda$, $g \in G$ die Beziehung $t^{-1}(F(g\lambda(t)) - F(g)) - DRF(e, \lambda)(g) \to 0$ für $t \to 0$ gilt. Die Differenzierbarkeit von RF bedeutet, daß

$$\left\| t^{-1}(RF(\lambda(t)) - RF(e)) - DRF(e, \lambda) \right\| \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0$$

ist. Da die Norm auf K die uniforme Norm majorisiert, gilt nach Definition von RF

$$\begin{aligned} &\left\| t^{-1}(RF(\lambda(t)) - RF(e)) - DRF(e, \lambda) \right\| \\ &= \left\| t^{-1}(R(\lambda(t))F - F) - DRF(e, \lambda) \right\| \\ &\geq \sup_{g \in G} \left| t^{-1}\big(R(\lambda(t))F(g) - F(g)\big) - DRF(e, \lambda)(g) \right| \\ &\geq \left| t^{-1}\big(F(g\lambda(t)) - F(g)\big) - DRF(e, \lambda)(g) \right| , \end{aligned}$$

d.h. $F = D_{\lambda_1 \cdots \lambda_n} f$ ist in Richtung λ differenzierbar und hat nach [6: Lemma 1.1] die Ableitungsfunktion $D_{\lambda} F = DRf(e, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda)$ ∎

Der lineare Raum $K^{\infty}(R)$ ist also ein Teilraum von $C^{\infty}(G)$. Da die infinitesimale Darstellung von R, $dR : \Lambda \to \mathrm{End}\,(K^{\infty}(R))$, den Darstellungsraum $K(R)$ hat und durch $dR(\lambda)f = DRf(e, \lambda)$ realisiert wird (vgl. [6]), wird nach Lemma 1 ein differenzierbarer Vektor f als Element aus K durch die Ableitungsoperatoren immer wieder in einen differenzierbaren Vektor, also ein Element aus K, überführt. Das heißt aber gerade, daß f eine schnell fallende Funktion ist. Damit ist die zweite Aussage des folgenden Satzes gezeigt.

Satz 1: *Sei G eine kompakte, zusammenhängende Gruppe. Dann gilt:*

a) *Jede exponentiell schnell fallende Funktion auf G ist ein differenzierbarer Vektor für R über K(G).*

b) *Jeder differenzierbare Vektor für R über K(G) ist eine schnell fallende Funktion auf G.*

Beweis: a) Sei $f \in ES(G)$. Dann existieren eine Menge $\Gamma \subseteq \sum$ von endlichem Rang mit $\operatorname{supp} f \subseteq \Gamma$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß $\sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \exp(\varepsilon|\sigma|) \| f(\sigma) \|_1 < \infty$ ist. Nach [6: Lemma 1.2] ist f ein differenzierbarer Vektor für R über K, wenn für jede Ableitung $F = D_{\lambda_1 \dots \lambda_n} f$ von f gilt: Die K-wertige Funktion RF ist für jedes $\lambda \in \Lambda$ an der Stelle e in Richtung λ differenzierbar, und ihre Ableitung ist $D_\lambda F$, d.h. $t^{-1}(RF(\lambda(t)) - RF(e)) - D_\lambda F \to 0$ für $t \to 0$. Für den Zusammenhang zwischen Rechtsverschiebung, Differentiation und Fourier-Transformation gelten folgende Beziehungen (vgl. [1, 2, 15]):

$$(R(\lambda(t))F)^\wedge(\sigma) = F^\wedge(\sigma)\, U^\wedge(\lambda(t))^T , \tag{1}$$

$$(D_\lambda F)^\wedge(\sigma) = F^\wedge(\sigma)\, dU^\sigma(\lambda)^T , \tag{2}$$

$$U^\sigma(\lambda(t)) = \exp(t\, dU^\sigma(\lambda)) , \tag{3}$$

$$\| F^\wedge(\sigma)\, dU^\sigma(\lambda)^T \|_1 \le \| F^\wedge(\sigma) \|_1 \| dU^\sigma(\lambda) \|_\infty \le \| F^\wedge(\sigma) \|_1 |\lambda| |\sigma| . \tag{4}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| t^{-1}\big(RF(\lambda(t)) - RF(e)\big) - D_\lambda F \right\| \\
&= \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \left\| t^{-1}\big((R(\lambda(t))F)^\wedge(\sigma) - F^\wedge(\sigma)\big) - (D_\lambda F)^\wedge(\sigma) \right\|_1 \\
&= \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \left\| F^\wedge(\sigma)\big(t^{-1}(U^\sigma(\lambda(t)) - E) - dU^\sigma(\lambda)^T\big) \right\|_1 \\
&\le \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \left\| F^\wedge(\sigma)\big(t(1/2!)(dU^\sigma(\lambda)^T)^2 + t^2(1/3!)(dU^\sigma(\lambda)^T)^3 + \dots\big) \right\| \\
&\le \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \| F^\wedge(\sigma) \|_1 |t| \cdot \sum_{m=2}^{\infty} t^{m-2} \cdot (1/m!) \| dU^\sigma(\lambda) \|_\infty^m \\
&\le \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \| F^\wedge(\sigma) \|_1 \| dU^\sigma(\lambda) \|_\infty^2 |t| \exp\big(|t| \, \| dU^\sigma(\lambda) \|_\infty\big) \\
&\le \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \| F^\wedge(\sigma) \|_1 |\lambda|^2 |\sigma|^2 |t| \exp(|t||\lambda||\sigma|) =: * .
\end{aligned}$$

Da mit f auch jede Ableitung F in $ES(G)$ liegt, existiert ein $\varepsilon' > 0$ mit $\sum d_\sigma \| F^\wedge(\sigma) \|_1 \exp(\varepsilon'|\sigma|) < \infty$. Sei $\delta < \varepsilon'/(1+|\lambda|)$. Dann läßt sich die Ungleichung für $|t| < \delta$ fortsetzen zu

$$\begin{aligned}
* &\le \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \| F^\wedge(\sigma) \|_1 \exp((\delta + |t||\lambda|)|\sigma|) \cdot (2/\delta) |t| |\lambda|^2 \\
&\le \sum_{\sigma \in \Gamma} d_\sigma \| F^\wedge(\sigma) \|_1 \exp(\varepsilon'|\sigma|)(2/\delta) |t| |\lambda|^2 \xrightarrow[t \to 0]{} 0 .
\end{aligned}$$

Betreffs Aussage b) siehe die Überlegungen vor Formulierung des Satzes ∎

2. Analytische Vektoren und exponentiell schnell fallende Funktionen

Wir betrachten nun analytische Vektoren.

Definition 2: Eine Funktion $f \in K$ heißt *analytischer Vektor für R*, kurz $f \in K^{(\omega)}(R)$, falls Rf eine analytische Funktion von G in $\mathbf{K}$ ist.

Der folgende Satz vom Paley-Wiener-Typ charakterisiert die analytischen Vektoren der rechtsregulären Darstellung über K durch die Eigenschaften ihrer Fourier-Koeffizienten.

Satz 2: *Sei G eine kompakte, zusammenhängende Gruppe und $f \in K(G)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *f ist ein analytischer Vektor für R über $K(G)$.*

b) *f ist eine exponentiell schnell fallende Funktion auf G.*

Folgerung: *Jeder analytische Vektor für R über K ist eine analytische und schnell fallende Funktion.*

Den **Beweis** der Folgerung liefern die in [2: Abschnitt 3] bewiesenen Inklusionen $ES(G) \subseteq A(G)$ und $ES(G) \subseteq S(G)$ ∎

Beweis von Satz 2: Es kann $\dim \Lambda(G) < \infty$ vorausgesetzt werden. Sei f eine exponentiell schnell fallende Funktion. Dann existiert ein $\varepsilon < 0$, so daß $\sum d_\sigma \| f^\wedge(\sigma) \| \exp(\varepsilon |\sigma|) < \infty$ ist. Wir müssen zeigen, daß für alle $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß die Funktion

$$\widetilde{Rf}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \quad \text{mit} \quad \widetilde{Rf}_g^{\lambda_1 \cdots \lambda_n}(t_1, \dots, t_n) = Rf(g \lambda_1(t_1) \cdots \lambda_n(t_n))$$

in eine für alle $|t_i| < \delta$ $(i = 1, \dots, n)$ konvergente Taylor-Reihe entwickelbar, d.h. hier, daß

$$** := \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) \sum_{\substack{1 \le i_j \le n \\ j = 1, \dots, n}} \left\| DRf\left(g, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}\right) \right\| \left|t_{i_1}\right| \cdots \left|t_{i_k}\right| < \infty$$

ist (vgl. [2: Abschnitt 3]). Da $D_\lambda Rf(g) = R(g) D_\lambda Rf(e) = R(g) D_\lambda f$ ist (vgl. [6: Lemma 1.1]), läßt sich diese Reihe wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
** &\le \sum_{k=0}^{\infty} (\delta^k / k!) \sum_{i_j, j} \left\| D_{\lambda_{i_1}} \cdots D_{\lambda_{i_k}} f \right\| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} (\delta^k / k!) \sum_{i_j, j} \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \left|\lambda_{i_1}\right| \cdots \left|\lambda_{i_k}\right| \| f^\wedge(\sigma) \|_1 \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in \Sigma} (L\delta |\sigma|)^k / k!) \, d_\sigma \| f^\wedge(\sigma) \|_1 \sum_{i_j, j} 1 \qquad \left(L := \max_{i = 1, \dots, n} |\lambda_i| \right) \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in \Sigma} ((L\delta |\sigma| n)^k / k!) \, d_\sigma \| f \|_1 \\
&\le \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \exp(\varepsilon |\delta|) \| f^\wedge(\sigma) \|_1 \quad \text{für } \delta < \varepsilon / Ln .
\end{aligned}$$

Also ist jede exponentiell schnell fallende Funktion auf G ein analytischer Vektor für R über $K(G)$.

Sei nun im zweiten Teil des Beweises f ein analytischer Vektor für R über K. Mitels einer Orthonormalbasis $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ von Λ kann man den zugehörigen Casimir-Operator $\Delta = -\sum D_i^2$ mit $D_i = D_{\Lambda_i}$ bilden. Dieser ist von der Wahl der Basis unabhängig. Es ist

$$(\Delta f)^\wedge(\sigma) = (\sigma, \sigma + 2\delta) f^\wedge(\sigma) , \tag{5}$$

$$\|\Delta f\| \le \sum_{i=1}^{n} \|D_i^2 f\| \le n \max\{\|Df\| \mid |D| = 2\} , \tag{6}$$

$$\|\Delta^m f\| \le n^m \max\{\|Df\| \mid |D| = 2m\} , \tag{7}$$

wobei $(\sigma, \sigma + 2\delta)$ ein $|\sigma|^2$ majorisierender Skalar ist, der durch die Killing-Form definiert ist, und $|D| = k$ bedeutet, daß $D = D_{i_1} \cdots D_{i_k}$ ($i_j \in \{1,\ldots,n\}$, $j = 1,\ldots,k$) ist. Wir betrachten den Operator B, gegeben durch $(Bf)^\wedge(\sigma) = (\sigma, \sigma + 2\delta)^{1/2} f^\wedge(\sigma)$ (vgl. [13, 14], [24: Abschnitt 4.4.6]). Da f ein analytischer Vektor ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für $0 < \delta < \varepsilon$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k / k! \sum_{\substack{1 \le i_j \le n \\ j=1,\ldots,k}} \left\| D_{i_1} \cdots D_{i_k} f \right\| , \text{ also auch } \sum_{k=0}^{\infty} (\delta^k / k!) \max_{|D|=k} \|Df\|$$

konvergiert. Damit existiert eine Konstante M mit $\max\{\|Df\| / k \mid |D| = k\} \le M^k$ und es ergibt sich $\|B^{2k} f\| = \|\Delta^k f\| \le (\sqrt{n}\, M)^{2k} (2k)!$. Weiterhin verwenden wir $\|B^{2k-1} f\| \le \|f\| + \|B^{2k} f\|$. Daraus folgt für $\varepsilon < 1/2\sqrt{n}\,M$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|B^m f\|}{m!} \varepsilon^m &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|B^{2k-1} f\|}{(2k-1)!} \varepsilon^{2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B^{2k} f\|}{(2k)!} \varepsilon^{2k} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|f\| \varepsilon^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}\, M)^{2k} (2k)!}{(2k-1)!} \varepsilon^{2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{n}\, M)^{2k} (2k)!}{(2k)!} \varepsilon^{2k} \\
&\le \|f\| \exp \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} (2\sqrt{n}\, M \varepsilon)^{2k-1} \sqrt{n}\, M + \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{n}\, M \varepsilon)^{2k} \\
&\le \|f\| \exp \varepsilon + (\sqrt{n}\, M + 1) \sum_{k=0}^{\infty} (2\sqrt{n}\, M \varepsilon)^k < \infty .
\end{aligned}$$

Wegen $(\sigma, \sigma + 2\delta) \ge |\sigma|^2$ ist nun auch

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \exp(\varepsilon|\sigma|) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m / m! \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma |\sigma|^m \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \\
&\le \sum_{\sigma \in \Sigma} \varepsilon^m / m! \sum_{\sigma \in \Sigma} d_\sigma (\sigma, \sigma + 2\delta)^{m/2} \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \\
&\le \sum_{m=0}^{\infty} (\|B^m f\| / m!) \varepsilon^m < \infty ,
\end{aligned}$$

d.h., der analytische Vektor f ist exponentiell schnell fallend ∎

Es sind also genau die Funktionen mit exponentiell schnell fallenden Fourier-Koeffizienten die analytischen Vektoren der rechten regulären Darstellung über dem passend gewählten Darstellungsraum K. Der klassische Satz von Paley-Wiener [21] sagt für die Gruppe der reellen Zahlen, daß die Menge der Funktionen f mit exponentiell schnell fallender Fourier-Transformierten $f^\wedge$ durch die folgende Eigenschaft charakterisiert ist: Es gibt zu f eine komplexe analytische Fortsetzung fc auf einen Streifen $|\operatorname{Im} z| < r$ längs der reellen Achse, so daß $\sup\{\int_{-\infty}^{+\infty} |fc(x+iy)|^2\, dx \mid |y| < r\} < \infty$ ist. Will man eine derartige Charakterisierung vornehmen, muß man die Komplexifizierung $G_{\mathbb{C}}$ von G betrachten, um die Möglichkeit der Fortsetzung einer analytischen Funktion auf G in $G_{\mathbb{C}}$ zu bekommen. Versuche in dieser Richtung sind ausgehend von Mackey [17] für abelsche Gruppen z.B. von Hugelshofer [16] und McKennon und Novak [19] und für kompakte Lie-Gruppen von Frota-Mattos [12] unternommen worden. Wir haben das folgende Resultat erhalten.

Satz 3: *Jede exponentiell schnell fallende Funktion auf einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G besitzt eine komplex analytische Fortsetzung auf eine G umfassende Teilmenge der Form G_ε von $G_{\mathbb{C}}$ in Gestalt ihrer Laplace-Reihe.*

Beweis: Sei $f \in ES(G)$, d.h. $\sum d_\sigma \| f^\wedge(\sigma)\|_1 \exp(\varepsilon|\sigma|) < \infty$ für ein $\varepsilon>0$, wobei $\dim \Lambda(G) < \infty$ vorausgesetzt werden kann. Dann läßt sich f durch die Laplace-Reihe fc auf G_ε fortsetzen, da deren absolute Konvergenz aus (4) folgt. Wir zeigen jetzt, daß fc komplex analytisch ist. Dazu untersuchen wir die absolute Konvergenz der Taylor-Reihe von f an der Stelle $g \exp i\lambda \in G_\varepsilon$ in Bezug auf die Ableitungsrichtung $\mu \in \Lambda(G_{\mathbb{C}})$. Es ist

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \|(|z|^m/m!)\, D_\mu^m fc(g \exp i\lambda)\| \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} |z|^m/m! \sum_{\sigma\in\Sigma} d_\sigma \| f^\wedge(\sigma)^\intercal\, U^\sigma(g \exp i\lambda)\, dU^\sigma(\mu)^m\|_1 \\
&\leq \sum_{m=0} |z|^m/m! \sum_{\sigma\in\Sigma} d_\sigma \| f^\wedge(\sigma)\|_1 \left(\exp \| dU^\sigma(\lambda)\|_\infty\right) \| dU^\sigma(\mu)\|_\infty^m \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty} |z|^m/m! \sum_{\sigma\in\Sigma} d_\sigma \| f^\wedge(\sigma)\|_1 (\exp(|\sigma||\lambda|))\, |\sigma|^m |\mu|^m \\
&\leq \sum_{\sigma\in\Sigma} d_\sigma \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \exp(|\sigma||\lambda| + |z||\sigma||\mu|) \\
&\leq \sum_{\sigma\in\Sigma} d_\sigma \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \exp((|\lambda| + |z||\mu|)|\sigma|) < \sum_{\sigma\in\Sigma} d_\sigma \|f^\wedge(\sigma)\|_1 \exp(\varepsilon|\sigma|) < \infty,
\end{aligned}
$$

falls $|z| < (\varepsilon - |\lambda|)/|\mu|$ gewählt wird. Also ist f analytisch fortsetzbar ∎

3. Der abelsche Spezialfall

In diesem Abschnitt betrachten wir nur abelsche, kompakte, zusammenhängende Gruppen. Für diese kann die folgende Verschärfung von Satz 3 bewiesen werden.

Satz 4: *Für eine Funktion f mit absolut summierbarer Fourier-Reihe auf einer abelschen, kompakten Gruppe G mit Komplexifizierung $G_{\mathbb{C}}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

a) *f ist durch ihre Laplace-Reihe auf eine Menge der Form $G_\varepsilon \subsetneq G_{\mathbb{C}}$ fortsetzbar.*

b) *f ist durch ihre Laplace-Reihe auf eine Menge der Form $G_\varepsilon \subsetneq G_{\mathbb{C}}$ analytisch fortsetzbar.*

c) *$f^\wedge$ ist exponentiell schnell fallend.*

Beweis: Offensichtlich genügt es nachzuweisen, daß jede Funktion f, die durch ihre Laplace-Reihe auf eine Menge der Form G_ε fortsetzbar ist, auch exponentiell schnell fallend ist. Da G abelsch ist, reduziert sich das duale Objekt zur diskreten, abelschen dualen Gruppe X der (eindimensionalen) Charaktere von G, die Fourier-Reihe von $f \in K(G)$ an der Stelle $g \in G$ zu $f(g) = \sum_{\chi \in X} f\ (\chi)\chi(g)$. Die Lie-Algebra Λ (ihre Dimension n sei endlich) ist abelsch, also isomorph zu $\mathbb{R}^n$, die infinitesimale Darstellung $d\chi$ zu $\chi \in X$ liefert an der Stelle λ eine rein imaginäre Zahl $i\tilde{\lambda}(\chi)$, die durch $\chi(\lambda(t)) = \exp(t d\chi(\lambda)) = \exp(i \tilde{t} \lambda(\chi))$ gegeben ist. Wir bezeichnen mit $\mathbb{Q}_d$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen in der diskreten Topologie. Folgende Aussagen sind äquivalent [15: Abschnitte 24.28, A.14, A.16, 30.51]: (i) $\dim \Lambda = n$, (ii) $r(\chi) = n$, (iii) $\mathbb{Q}_d$ ist minimale dividierbare Erweiterung von X. Daher kann man folgende Identifizierung für $\chi \in X$ und $\lambda \in \Lambda$ vornehmen: $\chi = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}_d^n$, $\lambda = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, woraus sich bei entsprechender Normierung

$$\tilde{\lambda}(\chi) = \sum_{i=1}^{n} r_i l_i, \quad |\chi| = \left(\sum_{i=1}^{n} |r_i|^2\right)^{1/2}, \quad |\lambda| = \left(\sum_{i=1}^{n} |l_i|^2\right)^{1/2}$$

ergibt. Wir zerlegen nun $\mathbb{Q}_d^n$ in die 2^n Sektoren bezüglich der Vorzeichen der Koordinaten und bezeichnen die zugehörigen Teilmengen von X mit X_k ($k = 1, \ldots, 2^n$). Sei nun f eine Funktion auf G, zu der ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle λ mit $|\lambda| < \varepsilon$

$$\sum_{\chi \in X} |f^\wedge(\chi)\chi(\exp i\lambda)| = \sum_{\chi \in X} |f^\wedge(\chi)\exp(-\tilde{\lambda}(\chi))| < \infty$$

ist. Für $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ wählen wir jetzt λ_k so, daß für alle $X = (r_1, \ldots, r_n) \in X_k$ die Gleichung $\tilde{\lambda}_k(\chi) = (-\varepsilon'/n)(|r_1| + \ldots + |r_n|)$ gilt. Dabei ist das Vorzeichen der Koordinaten von λ_k durch das einheitliche Vorzeichenverhalten der Koordinaten der $\chi \in X_k$ bestimmt. Dann ist $|\lambda_k| = \sqrt{n}\ \varepsilon'/\sqrt{n} = \varepsilon' < \varepsilon$, während $-\tilde{\lambda}_k(\chi) = (\varepsilon'/\sqrt{n}) \sum |r_i| \geq \varepsilon' |\chi|/\sqrt{n}$ für alle $\chi \in X_k$ ist. Daraus folgt

$$\sum_{\chi \in X_k} \left| f^\wedge(\chi)\exp\left(\varepsilon' \frac{|\chi|}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq \sum_{\chi \in X_k} |f^\wedge(\chi)| \exp(-\tilde{\lambda}_k(\chi)) \leq \sum_{\chi \in X} |f^\wedge(\chi)| \exp(-\tilde{\lambda}(\chi)) < \infty.$$

Damit ist f aber exponentiell schnell fallend, denn es ist folglich

$$\sum_{\chi \in X} |f^\wedge(\chi)| \exp(\varepsilon'|\chi|/\sqrt{n}) = \sum_{k=1}^{2^n} \sum_{\chi \in X_k} |f^\wedge(\chi)| \exp(\varepsilon'|\chi|/\sqrt{n}) < \infty \blacksquare$$

4. Ein anderer Differenzierbarkeitsbegriff

Der von uns benutzte Differenzierbarkeitsbegriff von Boseck und Czichowski bewirkt, daß eine stetig differenzierbare Funktion auf den Nebenklassen nach einem abgeschlossenen Normalteiler N mit $\dim(G/N) < \infty$ konstant ist. Deshalb konnten wir uns in den Beweisen auf den endlichdimensionalen Fall beschränken. G/N muß aber keine Lie-Gruppe sein. Der engere Differenzierbarkeitsbegriff von Bruhat, Kac und Maurin (vgl. [9, Abschnitt 2.2.2.5]) bezeichnet hingegen eine Funktion f auf einer kompakten topologischen Gruppe G als differenzierbar, falls ein abgeschlossener Normalteiler N existiert, so daß G/N Lie-Gruppe, f auf den Nebenklassen nach N konstant und, als Funktion auf der Lie-Gruppe betrachtet, im Lieschen Sinne differenzierbar ist. Ist G selbst Lie-Gruppe, stimmen beide Begriffe überein; im allgemeinen Fall ist f k-mal stetig BKM-differenzierbar genau dann, wenn f k-mal stetig BC-differenzierbar ist und ein abgeschlossener Normalteiler N existiert, so daß G/N Lie-Gruppe und f auf den Nebenklassen nach N konstant ist [9: S. 65]. Ist H ein von uns betrachteter Funktionenraum, so bezeichnen wir mit H_1 den Teilraum der BKM-differenzierbaren Funktionen aus H.

Der folgende Satz beschreibt das Verhältnis von differenzierbaren Vektoren der rechtsregulären Darstellung über K und den beliebig oft differenzierbaren Funktionen bei Verwendung des BKM-Differenzierbarkeitsbegriffes.

Satz 5: *Für eine stetige Funktion f auf G sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *f ist beliebig oft* BKM-*differenzierbar.*

b) *f ist schnell fallend, und supp $f^\wedge$ ist endlich erzeugt.*

c) *f ist ein* BKM-*differenzierbarer Vektor für R über $K(G)$.*

Beweis: Theorem 2.1. von [1] besagt in der in dieser Arbeit verwendeten Terminologie, daß $C_1^\infty(G) = S_1(G)$ ist. Damit folgt aus $f \in C_1^\infty(G)$ insbesondere auch $f \in K(G)$. Eine Funktion $f \in K(G)$ ist konstant auf den Nebenklassen nach einem abgeschlossenen Normalteiler N genau dann, wenn auch Rf als K-wertige Funktion diese Eigenschaft hat. Damit folgt aus Satz 1 die Inklusion $K_1^\infty(R) \subseteq C_1^\infty(G)$.

Sei nun umgekehrt $f \in C_1^\infty(G)$, N der oben angeführte Normalteiler. Wir betrachten $f_N : gN \to f(g)$ auf der Lie-Gruppe G/N. Es sei R_N die rechtsreguläre Darstellung von G/N, λ_N ein beliebiges Element von $\Lambda(G/N)$. Dann ist nach einer Bemerkung von Warner [24: Abschnitt 4.4.1] die Funktion f ein differenzierbarer Vektor für R über $L_2(G/N)$, denn für eine beliebige k-te Ableitung F von f ist

$$\lim_{t\to 0} \left\| t^{-1}\left(R_N(\lambda_N(t)) - E\right)F_N - D_{\lambda_N} F_N \right\|_2$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\int_{G/N} \left| t^{-1}\left(F_N(gN\lambda_N(t)) - F_N(gN)\right) - D_{\lambda_N} F_N(gN)\right|^2 d(gN)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{G/N} \left| \lim_{t\to 0} t^{-1}\big(F_N(gN\lambda_N(t)) - F_N(gN)\big) - D_{\lambda_N} F_N(gN) \right|^2 d(gN) \right)^{1/2},$$

da F_N und $D_{\lambda_N} F_N$ stetig auf der kompakten Gruppe G/N sind. Das bedeutet aber, daß für eine beliebige k-te Ableitung F von f und beliebiges $\lambda \in \Lambda$ auch $D_\lambda F = D_\lambda(RF)(e)$, d.h. f ein BKM-differenzierbarer Vektor von R über $L_2(G)$ ist. Daraus wollen wir nun weiter folgern, daß f auch differenzierbarer Vektor von R über K ist, indem wir $\| t^{-1}(R\lambda(t) - E)F - D_\lambda F \| \to 0$ für $t \to 0$ nachweisen. Dazu bemerken wir zuerst, daß mit f auch $\Delta^s F \in C_1^\infty(G)$ und folglich $\Delta^s F \in (L_2)_1^\infty(R)$ ist. Weiterhin konvergiert für hinreichend großes s die Reihe $\sum_{\sigma \in A(\Sigma, N)} d_\sigma^2 |\sigma|^{-4s}$ [22]; ihr Wert sei C. Da $\Gamma := \operatorname{supp} f \subset A(\Sigma, N)$ ist, können wir unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Parsevalschen Gleichung folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\| t^{-1}(R(\lambda(t)) - E)F - D_\lambda F \| \\
&= \sum_{\sigma\in\Gamma} d_\sigma \left\| F^\wedge(\sigma)^T \big(t^{-1}(U^\sigma(\lambda(t)) - E) - dU^\sigma(\lambda)\big) \right\|_1 \\
&= \sum_{\sigma\in\Gamma} d_\sigma (\sigma, \sigma + 2\delta)^{-s} \left\| (\Delta^s F)^\wedge(\sigma)^T \big(t^{-1}(U^\sigma(\lambda(t)) - E) - dU^\sigma(\lambda)\big) \right\|_1 \\
&\le \sum_{\sigma\in\Gamma} d_\sigma^{3/2} |\sigma|^{-2s} \left\| (\Delta^s F)^\wedge(\sigma)^T \big(t^{-1}(U^\sigma(\lambda(t)) - E) - dU^\sigma(\lambda)\big) \right\|_1 \\
&= \Big(\sum_{\sigma\in\Gamma} (d_\sigma |\sigma|^{-2s})^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\sigma\in\Gamma} \big(d_\sigma^{1/2}\big)^2 \left\| (\Delta^s F)^\wedge(\sigma)^T \big(t^{-1}(U^\sigma(\lambda(t)) - E) - dU^\sigma(\lambda)\big) \right\|_2^2 \Big)^{1/2} \\
&= C \left\| t^{-1}\big(R(\lambda(t)) - E\big)\Delta^s F - D_\lambda \Delta^s F \right\|_2 \to 0.
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen ∎

Weiterhin läßt sich auch das exponentiell schnelle Fallen der Fourier-Koeffizienten von f aus der BKM-komplex analytischen Fortsetzbarkeit von f erschließen, falls f auf den Nebenklassen nach einem abgeschlossenen Normalteiler N konstant ist, wobei G/N Lie-Gruppe ist. Dieser Satz läßt sich aus dem in [12: Th. 1] von FROTA-MATTOS für kompakte Lie-Gruppen (für $G = SU(2)$ vgl. [4]) erhaltenen Resultat auf die übliche Weise gewinnen. Unter Berücksichtigung von Satz 3 folgt dann auch

Satz 6: *Für eine stetige Funktion f auf einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe G mit Komplexifizierung $G_{\mathbb{C}}$ sind äquivalent:*

a) *f ist BKM-komplex analytisch fortsetzbar auf eine Menge der Form $G_\varepsilon \subset G_{\mathbb{C}}$.*

b) *f ist durch ihre Laplace-Reihe auf eine Menge der Form $G_\varepsilon \subsetneq G_{\mathbb{C}}$ analytisch fortsetzbar, und $\operatorname{supp} f^\wedge$ ist endlich erzeugt.*

c) *f ist BKM-analytischer Vektor für R über $K(G)$.*

d) *f ist exponentiell schnell fallend, und $\operatorname{supp} f^\wedge$ ist endlich erzeugt.*

LITERATUR

[1] Bauch, H.F.: *Test Funktions and Generalized Funktions on Topological Groups IV*. Math. Nachr. **103** (1981), 167-176.

[2] Bauch, H.F.: *Zum Begriff der Analytizität auf zusammenhängenden lokalkompakten Gruppen*. Z. Anal. Anw. **5** (1986), 457-463.

[3] Bauch, H. F., und K.-P. Rudolph: *Zur Bohr-Komplexifizierung topologischer Gruppen*. Preprint. Greifswald: Ernst-Moritz-Arndt-Universität 1984, 1-21.

[4] Beer, B.L., und A.J. Dragt: *New Theorems about Spherical Harmonic Expansions and SU(2)*. J. Math. Phys. **11** (1970), 2313-2328.

[5] Born, E.: *Differenzierbare Funktionen und Faltungssemigruppen auf einer lokalkompakten Gruppe*. Dissertation. Tübingen: Eberhard-Karls-Universität 1986.

[6] Boseck, H.: *Über Darstellungen lokal-kompakter topologischer Gruppen*. Math. Nachr. **74** (1976), 233-251.

[7] Boseck, H.: *Analytic Vectors in the Representation Theory of Connected Locally Compact Groups*. Bull. L'Acad. Pol. Sci. **29** (1981), 213- 218.

[8] Boseck, H., und G. Czichowski: *Test Functions and Generalized Functions I*. Math. Nachr. **58** (1973), 215-240.

[9] Boseck, H., Czichowski, G., und K.-P. Rudolph: *Analysis on Topological Groups - General Lie Theory* (Teubner-Texte zur Mathematik: Bd. **37**) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1981.

[10] Cartwright, D.I., und J.R. McMullen: *A generalized universal complexification for compact groups*. J. reine angew. Math. **331** (1982), 1-15.

[11] Edamatsu, T.: *Spaces of differentiable functions on compact groups*. J. Math. Kyoto Univ. 24 (1984), 323-360.

[12] Frota-Mattos, L. A.: *Analytic Continuation of the Fourier Series on Connected Compact Lie Groups*. J. Funct. Anal. **29** (1978), 1-15.

[13] Goodman, R.: *Analytic domination by fractional powers of a positive operator*. J. Func. Anal. **3** (1969), 246-264.

[14] Goodman, R.: *Analytic and entire vectors for representations on Lie groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 55-76.

[15] Hewitt, E., und K.A. Ross: *Abstract Harmonic Analysis, I and II*. Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1963 und 1970.

[16] Hugelshofer, R.: *Die Laplacetransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen*. Diss. Nr. 5803. Zürich: Eidgen. Techn. Hochschule 1976.

[17] Mackey, G. W.: *The Laplace transform for locally compact Abelian groups*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **34** (1948), 156-162.

[18] McKennon, K.: *The structure space of the trigonometric polynomials on a compact group*. J. reine angew. Math. **307/308** (1979), 166-172.

[19] McKennon, K., und D. Novak: *The Algebra of Test Functions on a Locally Compact Abelian Group*. Chin. J. Math. **10** (1982), 129-148.

[20] Nelson, E.: *Analytic vectors*. Ann. Math. **70** (1959), 572-615.

[21] Paley, R.A.C., und N. Wiener: *Fourier transforms in the complex domain* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ.). Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1934.

[22] Sugiura, M.: *Fourier series of smooth functions on compact Lie groups*. Osaka J. Math. **8** (1971), 33-47.

[23] Wallach, N.: *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*. New York: Dekker 1973.

[24] Warner, G.: *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups, Vol. I and II*. New York - Heidelberg: Springer-Verlag 1972.

Received 28.03.1989; in revised form 06.11.1989

Author's address:

Dr. Hans F. Bauch
Fachrichtungen Mathematik/Informatik
der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a
D(Ost) 2200 - Greifswald