Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 2, 231–238

Abelsche Sätze für die Laplace-Transformation von Distributionen

H.-J. GLAESKE und D. MÜLLER

Herrn L. Berg zum 60. Geburtstag gewidmet

The notion of similarity of distributions as $x \to 0+$ and $x \to +\infty$, respectively, is defined and by means of this idea well-known Abelian theorems for the Laplace transform are transfered to that one of distributions.

Key words: *Laplace transforms, distributions, asymptotic*
AMS subject classification: 44 A 10, 46 F 12

1. Einleitung

Die Übertragung Abelscher Sätze für die Laplace-Transformation von Funktionen (siehe z.B. Berg [2: § 44] und Doetsch [4: § 23, 33, 34]) auf die Laplace-Transformation von Distributionen hängt von dem zugrunde gelegten Asymptotikbegriff für Distributionen ab. Die ersten Resultate in dieser Richtung stammen von Lighthill [10], der Distributionen betrachtete, deren Einschränkung auf eine Umgebung des in Rede stehenden Punktes Funktionen sind, und er führte das asymptotische Verhalten der Distributionen auf das der zugeordneten Funktionen zurück. Solche Distributionen werden nach Milton [11] *semiregulär* genannt. Abelsche Sätze für diese findet man außerdem bei Jones [7], Zemanian [16] und Lavoine [8]. Lavoine [9] führte den Begriff der *Äquivalenz von Distributionen im Nullpunkt* ein und er bewies damit Abelsche Sätze für die Laplace-Transformation singulärer Distributionen. Weitere Resultate findet man bei Milon [11]. Schließlich seien die Begriffe der *Quasiasymptotik*, eingeführt von Zav'yalov [15] sowie Drozhzhinov und Zav'yalov [5], und der Begriff der *S-Asymptotik* (siehe Stanković [14]) erwähnt.

In dieser Arbeit wird der Begriff der *Ähnlichkeit von Distributionen für* $x \to 0+$ und $x \to +\infty$ eingeführt (siehe Müller [12]), der gut geeignet scheint, die bekannten Abelschen Sätze für die Laplace-Transformation von Funktionen auf Distributionen zu übertragen. Nach der Einführung dieser Begriffe im Abschnitt 2 werden im Abschnitt 3 Abelsche Sätze reeller Art und ein Abelscher Satz nichtreeller Art bewiesen.

Bezeichnungen: In der ganzen Arbeit seien a, b und c reelle Zahlen mit $a < 0$ und $b, c > 0$. Funktionen werden, falls nichts anderes gesagt wird, als komplexwertig angenommen. Mit $\mathbf{C}$ wird die Menge der stetigen Funktionen auf der reellen Achse $\mathbb{R}$, mit $\mathbf{C}^\infty$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ und mit $\mathbf{C}[a,b]$ die Menge der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen bezeichnet. $\mathbf{J}_+$ sei die Menge der auf $\mathbf{R}$ definierten Funktionen mit Träger in $[0,\infty]$ und es seien $\mathbf{C}_+ = \mathbf{C} \cap \mathbf{J}_+$ sowie $\mathbf{C}_+[a,b] = \mathbf{C}[a,b] \cap \mathbf{J}_+$.

Mit $\mathbf{L}_1^{loc}(a, b)$ werde die Menge der auf jeder kompakten Teimenge von (a, b) integrierbaren Funktionen bezeichnet und $\mathbf{L}_1(a, b)$ sei die Menge der auf (a, b) meßbaren und absolut integrierbaren Funktionen.

Wie üblich sei $\mathcal{D}$ der Raum der Funktionen aus C^∞ mit kompaktem Träger und $\mathcal{D}'$ dessen Dual. Der Wert des Funktionals $f \in \mathcal{D}'$ auf $\varphi \in \mathcal{D}$ werde mit $\langle f,\varphi\rangle$ bezeichnet. $\mathcal{D}'_+$ sei der Raum der Distributionen aus $\mathcal{D}'$ mit Träger in $[0,\infty]$ (für die Definitionen siehe z. B. [3]).

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion, so bezeichnen wir zur Abkürzung mit f_+ die durch $f_+ = Hf$ definierte Funktion, wobei H die Heaviside-Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

Wie üblich seien $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ die Mengen der positiven bzw. nichtnegativen ganzen Zahlen, $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

2. Ähnlichkeit von Distributionen

Der Begriff der *Ähnlichkeit von Distributionen* verallgemeinert den Begriff der asymptotischen Gleichheit von Funktionen. Hierzu werden wie üblich zwei Funktionen f, g *asymptotisch gleich für* $x \to 0+$ und $x \to \infty$ genannt (in Zeichen: $f(x) \sim g(x)$ für $x \to 0+$ bzw. $x \to \infty$), wenn sie in einem Intervall $(0,r)$ bzw. (R,∞) ($r, R \in \mathbb{R}_+$) eine Darstellung der Form $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ mit $\varepsilon(x) \to 0$ für $x \to 0+$ bzw. $x \to \infty$ besitzen.

Definition 2.1: Zwei Distributionen $f, g \in \mathcal{D}'_+$ heißen *ähnlich für* $x \to 0+$ (in Zeichen: $f \simeq g$ *für* $x \to 0+$), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt ein Intervall $[a,b]$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ sowie Funktionen $f_0, g_0 \in \mathbf{C}_+[a,b]$, so daß in (a,b) die Darstellungen

$$f = D^k f_0 \quad \text{und} \quad g = D^k g_0 \tag{2.1}$$

gelten, wobei D der Differentiationsoperator in $\mathcal{D}'$ ist.

2. Es gibt eine reellwertige Funktion $m_0 \in \mathbf{C}_+[a,b]$, die auf $[a,b]$ nicht das Vorzeichen wechselt, so daß die asymptotischen Gleichheiten

$$f_0(x) \sim m_0(x) \quad \text{und} \quad g_0(x) \sim m_0(x) \quad \text{für } x \to 0+ \tag{2.2}$$

gelten.

Bemerkungen: 1. Aus der asymptotischen Gleichheit zweier regulärer Distributionen, die durch stetige reellwertige Funktionen erzeugt werden, für $x \to 0+$ fogt offensichtlich deren Ähnlichkeit für $x \to 0+$. Es gibt jedoch reguläre Distributionen, die durch stetige reellwertige Funktionen erzeugt werden, die ähnlich sind für $x \to 0+$ und deren erzeugende Funktionen nicht asymptotisch gleich sind für $x \to 0+$. **2.** Man kann zeigen, daß die Relation der Ähnlichkeit von Distributionen für $x \to 0+$ symmetrisch und transitiv ist.

Hilfssatz 2.1: *Falls $f, g \in \mathcal{D}'_+$ und $D^k f = D^k g$ in $\mathcal{D}'$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $f = g$.*

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $k = 1$. Der allgemeine Fall folgt dann vermittels vollständiger Induktion. Wegen $D^k f = D^k g$ *in* $\mathcal{D}'$ folgt $f = g + \alpha$ mit einer beliebigen Konstanten α. Für jedes $\varphi \in \mathcal{D}$ mit supp $\varphi \subset (-\infty,0)$ gilt dann $0 = \langle f - g, \varphi\rangle = \alpha\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx$ und daraus folgt $\alpha = 0$, d.h. $f = g$ in $\mathcal{D}'$ ∎

Mit Hilfe der Definition 2.1 und diesem Hilfssatz ergibt sich der

Satz 2.1: *Eine Distribution $f \in \mathcal{D}'_+$ ist genau dann der Delta-Distribution ähnlich für $x \to 0+$, wenn es ein Intervall $[a,b]$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Funktion $f_0 \in \mathbf{C}_+[a,b]$ derart gibt, daß die Beziehungen*

$$f = D^{k+2} f_0 \quad in\ (a,b) \tag{2.3}$$

und

$$f_0(x) \sim x^{k+1}/(k+1)! \quad für\ x \to 0+ \tag{2.4}$$

gelten.

Beweis: Offensichtlich ist für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ in (a,b) die Beziehung

$$\delta = D^{k+2}(x_+^{k+1}/(k+1)!) \tag{2.5}$$

erfüllt. Unter den Annahmen (2.3) und (2.4) folgt daraus $f \simeq \delta$ für $x \to 0+$. Ist umgekehrt $f \simeq \delta$ für $x \to 0+$, so gelten die Beziehungen (2.1) und (2.2), wobei g durch δ und (da δ nicht erste Ableitung einer stetigen Funktion sein kann) k durch $k+2$ zu ersetzen sind. Nach Hifssatz 2.1 folgt aus (2.5) $g_0(x) = x_+^{k+1}/(k+1)!$ in $[a,b]$ und mit $m_0 = g_0$ auf $[a,b]$ folgen die Beziehungen (2.3) und (2.4) ∎

Analog zur Definition 2.1 kann man die Ähnlichkeit zweier Distributionen für $x \to +\infty$ erklären. Da die Darstellung (2.1) dann aber in einem Intervall $[c,\infty)$ gelten muß und diese Darstellung für $k > 0$ nicht eindeutig ist, muß man zusätzlich garantieren, daß jede in Frage kommende Funktion f_0 für $x \to +\infty$ das gleiche asymptotische Verhalten besitzt. Das führt zur

Definition 2.2: Zwei Distributionen $f, g \in \mathcal{D}'_+$ heißen *ähnlich für* $x \to +\infty$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt ein Intervall $[c,\infty)$, eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, sowie Funktionen $f_0, g_0 \in \mathbf{C}[c,\infty)$, so daß in (c,∞) die Darstellungen (2.1) gelten.

2. Es gibt eine reellwertige Funktion $m_0 \in \mathbf{C}[c,\infty)$, die nicht das Vorzeichen wechselt, so daß für $x \to +\infty$ die Relationen (2.2) gelten.

3. Die Funktion m_0 erfüllt für $x \to +\infty$ genau eine der folgenden Bedingungen:
(a) $x^l = o(m_0(x))$ und $m_0(x) = o(x^{l+1})$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \le k-2$.
(b) Entweder $m_0(x) = O(1)$ oder $x^{k-1} = O(m_0(x))$.

Bemerkungen: 3. Aus der dritten Bedingung folgt, daß alle in der Darstellung $f = D^k f_0$ in Frage kommenden Funktionen f_0 für $x \to +\infty$ das gleiche asymptotische Verhalten besitzen. **4.** Man überzeugt sich wieder davon, daß die Relation der Ähnlichkeit von Distributionen für $x \to +\infty$ symmetrisch und transitiv ist. **5.** Auf Grund dieser Definition ergibt sich sofort, daß eine Distribution $f \in \mathcal{D}'_+$ genau dann der Delta-Distribution ähnlich ist für $x \to +\infty$, wenn f in einem Intervall $[c,\infty)$ verschwindet.

Die Beziehungen des Begriffes der Ähnlichkeit von Distributionen zu den anderen oben erwähnten Asymptotikbegriffen sollen an anderer Stelle untersucht werden.

3. Abelsche Sätze

Wie üblich heißt eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Laplace-transformierbar, wenn* $\operatorname{supp} f \subset [0,\infty)$, $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ und $\exp(-u_0 \cdot) f \in L_1(\mathbb{R}_+)$ für ein $u_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion $F = \mathfrak{L}[f]$,

$$F(p) = \mathfrak{L}[f](p) = \int_0^\infty \exp(-px) f(x)\, dx, \quad \operatorname{Re}(p) > u_0 \tag{3.1}$$

heißt *Laplace-Transformierte von f.*

Die Laplace-Transformation von Distributionen soll wie in Schwartz [13] verstanden werden. Wenn $f \in \mathcal{D}'_+$ ist und für ein $u_0 \in \mathbb{R}$ durch $\exp(-u_0 \cdot) f$ eine temperierte Distribution definiert wird, dann heißt f *Laplace-transformierbar* und ihre Laplace-Transformierte $F = \mathfrak{L}[f]$ wird durch

$$\langle f, \exp(-p \cdot)\rangle = \langle \exp(-u_0 \cdot) f, \eta \exp(-(p - u_0)\cdot)\rangle \;, \quad \operatorname{Re}(p) > u_0 \tag{3.2}$$

gegeben. Hier ist $\eta \in C^\infty$ eine Funktion mit nach unten beschränktem Träger, die in einer Umgebung des Trägers von f den Wert 1 annimmt. Der Wert $F(p)$ ist unabhängig von der Wahl von u_0 und η. Wenn f eine Laplace-transformierbare Funktion ist, deren Träger in $[0,\infty)$ liegt, so ist die durch f erzeugte reguläre Distribution Laplace-transformierbar und die durch (3.1) und (3.2) definierten Funktionen stimmen überein.

Vorbereitend beweisen wir den

Hilfssatz 3.1: *Ist* $f \in \mathcal{D}'_+$ *Laplace-transformierbar, so gilt in* $\mathcal{D}'$ *die Darstellung*

$$f = D^k f_0 \,, \quad 1 < k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

wo f_0 *eine stetige Laplace-transformierbare Funktion mit* $\operatorname{supp} f_0 \subset [0,\infty)$ *ist.*

Beweis: Aus [16: Theorem 8.4-1] ist bekannt, daß es Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und $M, u_0 \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $F = \mathfrak{L}[f]$ in der Halbebene $\operatorname{Re}(p) > u_0$ holomorph ist und dort die Ungleichung $|F(p)| \le M|p|^n$ erfüllt. Die Funktion $G(p) = p^{-n-2}F(p)$ ist dann ebenfalls in der Halbebene $\operatorname{Re}(p) > u_0$ holomorph und dort gilt $|G(p)| \le M|p|^{-2}$. Nach [2: Satz 32.1] gilt dann in dieser Halbebene mit einer geeigneten stetigen Funktion $f_0 \in J_+$ die Beziehung $G = \mathfrak{L}[f_0]$. Damit wird $F(p) = p^{n+2}G(p) = \mathfrak{L}[D^{n+2}f_0](p)$ und nach dem Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation (s. [16: Theorem 8.3-1]) folgt $f = D^{n+2}f_0$ und folglich die Darstellung (3.3) ∎

Wir beweisen vorerst zwei Abelsche Sätze reeller Art.

Satz 3.1: *Wenn die Laplace-transformierbaren Distributionen* $f, g \in \mathcal{D}'_+$ *ähnlich sind für* $x \to 0+$, *dann sind ihre Laplace-Transformierten asymptotisch gleich für* $p \to +\infty$.

Beweis: Wir betrachten vorerst den Fall, daß mindestens eine der Funktionen f_0, g_0 aus Definition 2.1 reellwertig ist und ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß dies g_0 ist. Damit gilt

$$f_0(x) \sim g_0(x) \text{ für } x \to 0+. \tag{3.4}$$

Nach Hilfssatz 3.1 gelten dann mit zwei Laplace-transformierbaren Funktionen $f_1, g_1 \in C_+$

in $\mathcal{D}'_+$ die Beziehungen

$$f = D^m f_1 \quad \text{und} \quad g = D^n g_1, \quad 1 < m,n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Es sei $k_0 \in \mathbb{N}_0$ aus (2.1) entnommen.

Fall 1: $\max(m,n) < k$. Ist I der durch $Ih(x) = \int_0^x h(t)\,dt$ definierte Integrationsoperator, so setzen wir $f_2 = I^{k-m} f_1$ und $g_2 = I^{k-n} g_1$. Dann gilt $f_2, g_2 \in \mathbf{C}_+$ und in $\mathcal{D}'$ ist

$$f = D^k f_2 \quad \text{und} \quad g = D^k g_2. \tag{3.6}$$

Wegen (2.1) und (3.6) gilt nach Hilfssatz 2.1 $f_2 = f_0$ und $g_2 = g_0$ auf $[a,b]$ und deshalb wegen (3.4) $f_2(x) \sim g_2(x)$ für $x \to 0+$. Nach dem Integrationssatz für die Laplace-Transformation von Funktionen (s. Berg [2: Satz 44.1]) folgt

$$F_2(p) \sim G_2(p) \quad \text{für } p \to +\infty. \tag{3.7}$$

Aus (3.6) und (3.7) ergibt sich die Behauptung, da nach dem Differentiationssatz für die Laplace-Transformation von Distributionen $\mathfrak{L}[D^k f_2] = p^k F_2(p)$ und $\mathfrak{L}[D^k g_2] = p^k G_2(p)$ gelten.

Fall 2: $\max(m,n) \geq k$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $m \geq n$ gilt. Mit den Funktionen f_0, g_0 aus (2.1) und der Funktion g_1 aus (3.5) definieren wir die Funktionen $h = I^{m-n} g_1$, $f_2 = I^{m-k} f_0$ und $g_2 = I^{m-k} g_0$ aus $\mathbf{C}$. Die Funktion h ist nach dem Integrationssatz für die Laplace-Transformation Laplace-transformierbar und in $\mathcal{D}'$ gilt

$$g = D^m h. \tag{3.8}$$

In (a,b) ist

$$f = D^m f_2 \quad \text{und} \quad g = D^m g_2. \tag{3.9}$$

Wendet man auf f_0 und g_0 $(m-n)$-mal den Integrationssatz für asymptotische Gleichheiten (s. Berg [1: Satz 2.3]) an, so erhält man $f_2(x) \sim g_2(x)$ für $x \to 0+$. Aus (3.5), (3.8), (3.9) und Hilfssatz 2.1 ergibt sich $f_2 = f_1$ und $g_2 = h$ auf $[a,b]$. Damit sind $f_1(x)$ und $h(x)$ für $x \to 0+$ asymptotisch gleich und wie im Fall 1 schließt man

$$F_1(p) \sim H(p) \quad \text{für } p \to +\infty. \tag{3.10}$$

Aus (3.8) und (3.10) folgt die Behauptung wieder mit dem Differentiationssatz für die Laplace-Transformation von Distributionen.

Jetzt seien sowohl f_0 als auch g_0 in (2.1) komplexwertige Funktionen. Mit $\varphi \in \mathcal{D}$ wird eine Distribution $m \in \mathcal{D}'_+$ definiert durch

$$\langle m, \varphi \rangle = (-1)^k \int_a^b m_0(x)\, \varphi^{(k)}(x)\, dx$$

Da m einen kompakten Träger besitzt, ist m Laplace-transformierbar. In (a,b) ist offenbar $m = D^k m_0$, d.h. f und g sind der Distribution m für $x \to 0+$ ähnlich. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt $F(p) \sim M(p)$ und $G(p) \sim M(p)$ für $p \to +\infty$ ∎

Beispiel 1: Es sei

$$f = D^2 \sin_+ x + \sum_{k=0}^{\infty} \delta(x - k\pi).$$

In $(-\pi/2, \pi 2)$ gilt dann $f = \boldsymbol{D}^2(\sin_+ x + x_+)$. Wegen $\delta = \boldsymbol{D}^2 x_+$ und $\sin_+ x + x_+ \sim 2x_+$ für $x \to 0+$ ist $f \simeq 2\delta$ für $x \to 0+$ und damit gilt nach Satz 3.1 $\lim_{p\to\infty} F(p) = 2L[\delta] = 2$. Dasselbe Resultat erhält man natürlich auch durch Berechnung von $F = \mathfrak{L}[f]$.

Analog zu Satz 3.1 ergibt sich für $p \to 0+$ der folgende

Satz 3.2: *Es seien $f, g \in \mathcal{D}_+'$ Laplace-transformierbar für* $\mathrm{Re}(p) > 0$ *und ähnlich für $x \to +\infty$. Falls*

$$\lim_{p\to +0} |G(p)| = +\infty \tag{3.11}$$

ist, so gilt $F(p) \sim G(p)$ für $p \to 0+$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen von Definition 2.2 nehmen wir vorerst an, daß die Funktion g_0 auf $[c, \infty)$ reellwertig ist. In $\mathcal{D}_+'$ definieren wir die Distributionen

$$f_1 = f - \boldsymbol{D}^k[1_+(\cdot - c) f_0] \quad \text{und} \quad g_1 = g - \boldsymbol{D}^k[1_+(\cdot - c) g_0].$$

Die Träger von f_1 und g_1 liegen offenbar im Intervall $[0, c]$. Da

$$G(p) = G_1(p) + p^k \mathfrak{L}[1_+(x - c) g_0(x)](p)$$

ist, wobei G_1 eine ganze Funktion ist, gilt wegen (3.11)

$$\lim_{p\to +0} \left| \mathfrak{L}[1_+(x - c) g_0(x)](p) \right| = +\infty.$$

Damit kann [2: Satz 44.4] angewendet werden und man erhält

$$\mathfrak{L}[1_+(x - c) f_0(x)](p) \sim \mathfrak{L}[1_+(x - c) g_0(x)](p) \text{ für } p \to 0+.$$

Mittels des Differentiationssatzes der Laplace-Transformation ergibt sich für $p \to 0+$

$$F(p) - F_1(p) = p^k \mathfrak{L}[1_+(x - c) f_0(x)](p),$$

$$G(p) - G_1(p) = p^k \mathfrak{L}[1_+(x - c) g_0(x)](p).$$

Da F_1 und G_1 ganze Funktionen sind und wegen (3.11) die rechten Seiten betragsmäßig gegen $+\infty$ streben für $p \to 0+$ folgt die Behauptung für reellwertige g_0.

Ist g_0 nicht reellwertig auf $[c, \infty)$, so gilt nach Definition 2.2

$$g_0(x) = \mathrm{Re}\, g_0(x) + i\, o(\mathrm{Re}\, g_0(x)) \text{ für } x \to +\infty.$$

Mit demselben klassischen Satz wie oben folgt hieraus

$$\mathfrak{L}[g_0](p) \sim \mathfrak{L}[\mathrm{Re}\, g_0](p) \text{ für } p \to 0+$$

und das liefert mittels des ersten Teils des Beweises die Behauptung des Satzes ∎

Beispiel 2: Es sei

$$f = 1_+(x) + \boldsymbol{D}[1_+(x - 1) |\sin 1/x|^{1/2}].$$

Im Intervall $(1, \infty)$ gilt $f = \boldsymbol{D} f_0$ mit $f_0(x) = x + |\sin 1/x|^{1/2}$. Wegen $|\sin 1/x|^{1/2} \sim x^{-1/2}$ für $x \to +\infty$ folgt $f_0(x) \sim x$ für $x \to +\infty$. Damit ist $f \simeq 1_+(x)$ für $x \to +\infty$ und wegen $\mathfrak{L}[1_+(x)](p) = p^{-1}$ folgt nach Satz 3.2 $F(p) \sim p^{-1}$ für $p \to 0+$.

Schließlich beweisen wir einen Abelschen Satz nichtreeller Art.

Satz 3.3: *Die Distribution $f \in \mathcal{D}'_+$ sei Laplace-transformierbar und genüge den folgenden Bedingungen:*

(a) $f = D^k f_0$ *in* (a,b), $f_0 \in C_+$, $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) $f_0(x) \sim x^q$ *für* $x \to 0+$; $q \in \mathbb{R}_+$.

Dann gilt im Winkelraum $|\arg p| \le \psi < \pi/2$ *die Beziehung*

$$F(p) \sim \Gamma(q+1)p^{k-q-1} \text{ für } p \to \infty.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 3.1 gilt mit einer Laplace-transformierbaren Funktion $f_1 \in C_+$ und einer Zahl m, $2 \le m \in \mathbb{N}$, die Darstellung $f = D^m f_1$.

Fall 1: $m < k$. Wir definieren $f_2 \in J_+$ durch $f_2 = I^{k-m} f_1$. Dann gilt in $\mathcal{D}'$

$$f = D^k f_2. \tag{3.12}$$

Nach Hilfssatz 2.1 gilt $f_2 = f_0$ in $[a,b]$. Wegen Eigenschaft (b) ergibt sich $f_2(x) \sim x_+^q$ für $x \to 0+$ und folglich nach Doetsch [4: Satz 33.3]

$$F_2(p) \sim \Gamma(q+1)p^{-q-1} \text{ für } p \to \infty,\ |\arg p| \le \psi < \pi/2. \tag{3.13}$$

Aus (3.12) und (3.13) folgt die Behauptung.

Fall 2: $m \ge k$. Man definiert jetzt $f_2 \in J_+$ durch $f_2 = I^{m-k} f_0$ und nach Hilfssatz 2.1 folgt diesmal $f_2 = f_1$ auf $[a,b]$. Wendet man [1: Satz 2.3] $(m-k)$-mal auf die Funktionen f_0 und x^q an, so erhält man $f_2(x) \sim x^{q+m-k}/(q+1)_{m-k}$ für $x \to 0+$, wo $(z)_n$ das *Pochhammer*-Symbol $(z)_0 = 1$, $(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)$, $n \in \mathbb{N}$ ist. Damit folgt nach Doetsch [4: Satz 33.3]

$$F_1(p) \sim \Gamma(p+1)p^{k-m-q-1} \text{ für } p \to \infty,\ |\arg p| \le \psi < \pi/2$$

und der Satz ist bewiesen ∎

Mit diesem Satz und Satz 2.1 erhält man die

Folgerung 1: *Ist $f \in \mathcal{D}'_+$ Laplace-transformierbar und für $x \to 0+$ der Delta-Distribution ähnlich, so gilt im Winkelraum $|\arg p| \le \psi < \pi/2$ die Beziehung $F(p) \to 1$ für $p \to \infty$.*

Schließlich beweisen wir die

Folgerung 2: *Es sei $f \in \mathcal{D}'_+$ eine in $(-\infty, b)$ reguläre Distribution, der die integrierbare Funktion f entspricht, und es gelte $f(x) \sim x^q$ für $x \to 0+$, $q > -1$. Ist f Laplace-transformierbar, so gilt in $|\arg p| \le \psi < \pi/2$ die Relation $F(p) \sim \Gamma(p+1)p^{-q-1}$* für $p \to \infty$.

Beweis: In $(-b/2, b/2)$ gilt $f = D\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = DIf$. Nach [1: Satz 2.3] gilt $(If)(x) \sim x_+^{p+1}/(q+1)$ für $x \to 0+$ und mit Satz 3.3 folgt die Behauptung ∎

Schlußbemerkungen: Für die Anwendungen in der Theorie der Lösung linearer Differentialgleichungen sind Taubersche Sätze oder wenigstens Abelsche Sätze für die Umkehrtransformation der Laplace-Transformation von Interesse. Solche Sätze können auch bewiesen werden. Das soll an anderer Stelle geschehen.

Schließlich möchten die Verfasser Herrn L. Berg danken, der insbesondere an der Bildung des Begriffes der Ähnlichkeit von Distributionen Anteil genommen hat und ihnen interessante Hinweise gab.

LITERATUR

[1] BERG, L.: *Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen*. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1968.

[2] BERG, L.: *Operatorenrechnung. II: Funktionentheoretische Methoden*. Berlin: Dt. Verlag Wiss. 1974.

[3] BRYCHKOV, YU. A., und A. P. PRUDNIKOV: *Integral Transforms of Generalized Functions*. New York: Gordon and Breach Sci. Publ. 1989.

[4] DOETSCH, G.: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace - Transformation*. Basel - Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1970.

[5] ДРОЖЖИНОВ. Ю. Н., и Б. И. ЗАВЬЯЛОВ: *Квазиасимптотика обобщённых функций и тауберовы теоремы в комплексной области*. Мат. сб. **102** (1977), 372-390.

[6] GLAESKE, H. - J.: *Zur Asymptotik der Laplace - Transformation von Distributionen*. Wiss. Beitr. Ingenieurhochschule Wismar **4** (1985), 21 - 23.

[7] JONES, D. S.: *Generalized Functions*. New York: McGraw - Hill Book Comp. 1966.

[8] LAVOINE, J.: *Sur des théorèmes abéliens et taubériens de la transformation de Laplace*. Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A (N.S.) **4** (1966), 49 - 65.

[9] LAVOINE, J.: *Théorèmes abéliens et taubériens pour la transformations des distributions*. Ann. Soc. sci. Bruxelles (Ser. I) **89** (1975), 469 - 479.

[10] LIGHTHILL, M. J.: *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*. London: Cambridge Univ. Press 1958.

[11] MILTON, E. O.: *Asymptotic behaviour of transforms of distributions*. Trans. Amer. Math. Soc. **172** (1972), 161 - 176.

[12] MÜLLER, D.: *Abelsche und Taubersche Sätze für einige Integraltransformationen von Distributionen*. Dissertation. Jena: Friedrich - Schiller - Universität 1982.

[13] SCHWARTZ, L.: *Transformation de Laplace des distributions*. Sem. Math. de l' Univ. de Lund. Tome Suppl. dedic à M. Riesz 1952, 196 - 206.

[14] STANKOVIĆ, B.: *S - asymptotic and other definitions of the asymptotic behaviour of distributions*. Rev. Res. Sci. Univ. Novi Sad **16** (1986), 1 - 12.

[15] ЗАВЬЯЛОВ. Б. И.: *Автомодельная асимптотика электромагнитных формфакторов и поведение их фурьеобразов в окрестности светового конуса*. Теор. мат. физика **17** (1973), 178 - 188.

[16] ZEMANIAN, A. H.: *Distribution Theory and Transform Analysis*. New York: McGraw Hill book comp. 1965.

Received 07. 07. 1989; in revised form 12. 10. 1989

Author's address:

Prof. Dr. Hans - Jürgen Glaeske
Sektion Mathematik
der Friedrich - Schiller - Universität
Universitätshochhaus
D(Ost) - 6900 Jena

Dr. Dietmar Müller
Ring der Bauarbeiter 43/10
D(Ost) - 4440 Wolfen