Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 3, 385-390

Über eine Erweiterung des Liouvilleschen Satzes

E. Hoy

A generalization of Liouville's theorem is proved for a bounded function $w: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ if, in addition, w behaves locally like a quasiregular function and the growth of its dilatation is restricted.

Key words: *Liouville's theorem, quasiregular function, unbounded dilatation*
AMS classification: 30C60

1. Einleitung

In der Arbeit werden zwei Beweise, ein analytischer und ein geometrischer, für folgenden Satz gegeben.

Satz 1: *Es sei $w = w(z)$ eine Abbildung der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ in sich mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jede Zahl $R > 0$ ist w in $\{z : |z| < R\}$ quasiregulär.*

(ii) *Für die daher fast überall erklärte Funktion p, $p(z) \geq 1$, mit*

$$p(z) = \left[|w_z(z)| + |w_{\bar{z}}(z)|\right] \Big/ \left[|w_z(z)| - |w_{\bar{z}}(z)|\right] \tag{1}$$

gilt ($z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt)

$$\lim_{R \to \infty} \left[\ln^{-2} R \iint_{1<|z|<R} |z|^{-2} p(z)\, dx\, dy\right] = 0. \tag{2}$$

(iii) *w ist beschränkt.*

Dann kann w nur eine Konstante sein.

Der Begriff *quasiregulär* (siehe [7]) wird hier anstelle von quasikonform benutzt, um nicht den Gedanken aufkommen zu lassen, daß w eine eindeutig umkehrbare Abbildung ist. Man sieht leicht, daß w im Falle $w_{\bar{z}} \equiv 0$ die Eigenschaften (i) und (ii) besitzt und daher der Liouvillesche Satz für analytische Funktionen ein Spezialfall von Satz 1 ist. Die Eigenschaft (ii) charakterisiert die Einschränkung des Wachstums von einem speziellen Mittelwert der Dilatation p aus (1). Im Unterschied zu den quasiregulären Abbildungen von $\mathbb{C}$ ist p selbst nicht notwendig beschränkt. Damit ergibt sich eine Beziehung zu den im Mittel quasikonformen Abbildungen (siehe [1]). Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden.

Beispiel 1: Sei

$$w(z)=\begin{cases} z & \text{für } |z|\le 1 \\ f(r)e^{i\vartheta} & \text{für } r=|z|>1,\ z=re^{i\vartheta}\,, \end{cases}$$

wobei $f(r)$ in $[1,\infty)$ durch

$$\ln[f(r)] = \int_0^{\ln r} (t^{\beta}+1)^{-1}dt \quad \text{mit einem } \beta>0 \tag{3}$$

gegeben wird. Für p ergibt sich wie in [3: Abschnitt 12] $p(z)=f(r)/[f'(r)r]=\ln^{\beta}r+1$, so daß der Grenzwert in (2) sich mittels

$$\lim_{R\to\infty}\left\{\ln^{-2}R\int_0^{2\pi}\left[\int_1^R r^{-1}(\ln^{\beta}r+1)dr\right]d\vartheta\right\} = 2\pi\lim_{R\to\infty}\left[\ln^{-2}R\left(\frac{\ln^{\beta+1}R}{\beta+1}+\ln R\right)\right] \tag{4}$$

berechnet. Dieser Grenzwert ist für $0<\beta<1$ gleich 0, und in diesem Fall folgt aus (3) die Unbeschränktheit von w, wie es nach Satz 1 sein müßte. Andererseits ist für $\beta>1$ zwar der Grenzwert in (4) von 0 verschieden, jedoch ist w diesmal eine beschränkte, im Mittel quasikonforme Abbildung von $\mathbb{C}$. Man sieht also, daß die in diesem Beispiel betrachtete Abbildung w mit der Eigenschaft (i) und mit unbeschränkter Dilatation p nur im Fall $\beta=1$ nicht durch Satz 1 in irgendeiner Weise erfaßt werden kann.

In [3] sind ebenfalls Abbildungen mit der Eigenschaft (i) betrachtet worden. Die dortige Einschränkung für die Dilatation p ist jedoch andersartig als hier in (ii). Im Hinblick auf solche Fragen soll im Abschnitt 4 eine Verallgemeinerung von Satz 1 gegeben werden.

Satz 1 läßt sich auch für beschränkte Lösungen der Beltrami-Gleichung $w_{\bar z}(z)=\mu(z)w_z(z)$ anwenden, wobei $|\mu(z)|$ sich in der in (ii) erlaubten Weise auch der Zahl 1 nähern kann. Ebenso sind Verallgemeinerungen der Ergebnisse dieser Arbeit auf allgemeinere elliptische Differentialgleichungen wünschenswert, worauf hier nicht eingegangen werden soll.

2. Der analytische Beweis

Diese Überlegungen sind durch [4: Beweis von Lemma 2] motiviert worden. Zunächst wird folgendes Lemma abgeleitet.

Lemma 1: *Sei für fast alle r mit $1\le|z|=r$ die Funktion $P=P(r)$ durch $2\pi P(r)=\int_0^{2\pi}p(re^{i\vartheta})d\vartheta$ als ein Mittelwert der meßbaren und lokal beschränkten Funktion p erklärt. Dann ist*

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R[rP(r)]^{-1}dr=\infty. \tag{5}$$

Beweis : Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_1^R\left[\int_0^{2\pi}p(re^{i\vartheta})d\vartheta\right]r^{-1}dr\right\}\int_1^R[rP(r)]^{-1}dr \ge \left(\int_1^R r^{-1}dr\right)^2=\ln^2R.$$

Hieraus folgt wegen (2) sofort (5)■

Wie in [4: Gleichung (10)] erhält man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für eine beliebige in $[0, R]$ stetig differenzierbare Funktion $\varphi = \varphi(r)$ mit $\varphi(R) = 0$ die Beziehung

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi^2(r) \operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta = -\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi'(r)\varphi(r) \operatorname{Im}(\overline{w} w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta , \tag{6}$$

wobei $R > 0$ beliebig gewählt wird und w_r und w_ϑ die fast überall existierenden partiellen Ableitungen von $w(re^{i\vartheta})$ nach r bzw. ϑ sind. Ferner erweist sich $r^{-1}\operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta)$ als Funktionaldeterminante $|w_z|^2 - |w_{\bar z}|^2$ von w, und für die in (1) definierte Funktion $p = p(re^{i\vartheta})$ gilt die Ungleichung

$$|w_\vartheta|^2 / \operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta) \le r p(re^{i\vartheta}) , \tag{7}$$

die aus (1) nach Erweitern mit $|w_z| + |w_{\bar z}|$ durch eine einfache Rechnung folgt.

Wendet man auf die rechte Seite von (6) die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi^2(r) \operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta \\ &\le \left\{ \int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi^2(r) \operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta \int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi'^2(r) |w|^2 |w_\vartheta|^2 \left[\operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta)\right]^{-1} dr\, d\vartheta \right\}^{1/2} . \end{aligned} \tag{8}$$

Aus (7) und (8) erhält man wegen (iii) (es ist $|w|^2 \le C'$ mit $C' = C/2\pi$)

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi^2(r) \operatorname{Im}(\overline{w_r}\, w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta \le C \int_0^R \varphi'^2(r) r P(r)\, dr , \tag{9}$$

wobei $P(r)$ in Lemma 1 definiert wurde. Diese Abschätzung gilt nach entsprechenden Approximationsbetrachtungen auch für die Funktion φ mit

$$\varphi(r) = \begin{cases} \int_\rho^R \left[tP(t)\right]^{-1} dt = \text{const} & \text{für } 0 \le r \le \rho \\ \int_r^R \left[tP(t)\right]^{-1} dt & \text{für } \rho < r \le R , \end{cases}$$

wobei ρ beliebig aus $(0, R)$ gewählt wird. Setzt man diese Funktion φ in (9) ein, so liefert $\varphi^2(\rho)\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(\overline{w_r} w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta$ eine untere Schranke für die linke Seite. Die rechte Seite von (9) ergibt hingegen $C\int_\rho^R \left[rP(r)\right]^{-1} dr = C\varphi(\rho)$. Damit folgt

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(\overline{w_r} w_\vartheta)\, dr\, d\vartheta \le C/\varphi(\rho) = C\left\{ \int_\rho^R \left[tP(t)\right]^{-1} dt \right\}^{-1} .$$

Der Grenzübergang $R \to \infty$ führt wegen (5) zu $\operatorname{Im}(\overline{w_r} w_\vartheta) \equiv 0$, da wegen (i) sicher $\operatorname{Im}(\overline{w_r} w_\vartheta) \ge 0$ gilt. Also ist w eine Konstante.

3. Der geometrische Beweis

Zunächst benötigt man für die Abbildung w die Darstellbarkeit als $w(z) = A[h(z)]$, wobei $\zeta = h(z)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der z-Ebene in die ζ-Ebene liefert und $A =$

$A(\zeta)$ für alle $\zeta \in h(\mathbb{C})$ eine nichtkonstante analytische Funktion ist. Diese Darstellbarkeit erweist sich als eine besondere Eigenschaft der inneren Abbildung (vgl. [9] und siehe z.B. auch [6: Kapitel 5]). Die inneren Abbildungen können mittels folgender Definition eingeführt werden (siehe [6,9]).

Definition: Eine Abbildung eines Gebietes G heißt *innere Abbildung*, wenn jede offene Teilmenge von G durch diese Abbildung in eine offene Menge übergeführt wird und kein Kontinuum ($\subseteq G$) auf einen Punkt abgebildet wird.

Der geometrische Beweis wird im folgenden indirekt geführt, d.h., es wird angenommen, daß w nicht konstant sei. w ist deshalb eine innere Abbildung, weil jede offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ sich als Vereinigung von beschränkten offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ darstellen läßt und diese beschränkten Teilmengen aufgrund der Quasiregularität (und Nichtkonstanz) von w stets in offene Mengen überführt werden und die Vereinigung dieser Bildmengen wieder offen ist. Des weiteren kann kein Kontinuum auf einen Punkt w_0 abgebildet werden, denn die Menge der $z \in \mathbb{C}$ mit $w(z) = w_0$ ist aus gleichen Gründen höchstens abzählbar.

Der nächste Schritt des Beweises soll die Gleichheit $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ bringen. Sei $B_R = h(\{z : 1 < |z| < R\})$ für $1 < R \leq \infty$. Dann liefert [5: Ungleichung (12)] (vgl. auch mit den Ergebnissen aus [8]) für den konformen Modul von B_R die untere Schranke $\int_1^R [rP(r)]^{-1} dr$, da der Homöomorphismus h fast überall die gleiche Dilatation p wie w besitzt. Aus Lemma 1 folgt dann, daß B_∞ nur das Äußere von $h(\{z : |z| = 1\})$ sein kann. Damit erhält man $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Wegen (iii) ist daher die analytische Funktion A für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ beschränkt, d.h., A und w sind Konstanten. Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit von Satz 1.

4. Eine Verallgemeinerung von Satz 1

Beim geometrischen Beweis zeigt sich auch eine Beziehung zum Typenproblem bei Riemannschen Flächen, auf welches R. Kühnau den Autor aufmerksam gemacht hat. So kann man beim Nachweis der Gleichheit $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ auch von [2: Ungleichung (10)/S. 26] ausgehen. Unter der Voraussetzung

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R \left\{ \int_0^{2\pi} [\operatorname{Im}(\overline{w_r} w_\vartheta)]^{-1} |w_\vartheta|^2 \, d\vartheta \right\}^{-1} dr = \infty \qquad (10)$$

läßt sich ebenfalls $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ zeigen. Diese Voraussetzung ist eine Abschwächung von (2), da aus (2) über (5) wegen (7) schließlich (10) folgt und in Beispiel 1 die Voraussetzung (10) sogar für $\beta = 1$ erfüllt ist. Allerdings eignet sich (10) im Hinblick auf im Mittel quasikonforme Abbildungen nicht so wie (2).

Voraussetzung (10) kann für folgende Verallgemeinerung von Satz 1 genutzt werden.

Satz 2: *In der Ebene seien n paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gegeben und w sei eine Abbildung von $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ in $\mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes* $\tilde{\varepsilon} > 0$ *mit* $2\tilde{\varepsilon} < |z_j - z_k|$ *für alle* $j, k = 1, 2, \dots, n$ *mit* $j \neq k$ *ist die Abbildung* w *in* $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z : |z - z_j| < \tilde{\varepsilon}\}$ *quasiregulär.*

(ii) *Für die in* $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ *mittels* (1) *fast überall definierte Dilatation* p *möge* $\int_0^{\tilde{\varepsilon}} \left[r \int_0^{2\pi} p(z_j + re^{i\vartheta}) d\vartheta \right]^{-1} dr$ *für alle* $j = 1, 2, \dots, n$ *divergieren, wobei* $\tilde{\varepsilon}$ *wie in* (i) *gewählt wird.*

(iii) w *ist beschränkt.*

Dann kann w *nur eine Konstante sein.*

Beweis: Wenn w nicht konstant wäre, so ist w wiederum eine innere Abbildung. Also gilt $w(z) = A[h(z)]$ mit einem Homöomorphismus $\zeta = h(z)$ und einer analytischen Funktion $A = A(\zeta)$. Es ist $h\left(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z : |z - z_j| < \tilde{\varepsilon}\}\right)$ ein n-fach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ für alle $\tilde{\varepsilon}$ aus (i). Aus (ii) folgt dann wegen (7) und (10), daß $h\left(\{z : 0 < |z - z_j| < \tilde{\varepsilon}\}\right)$ ein zweifach zusammenhängendes Gebiet ist, bei dem die innere Randkomponente zu einem Punkt ζ_j entartet oder $\zeta_j = \infty$ die äußere Randkomponente bildet. Damit kann A wegen (iii) zu einer auch in ζ_j analytischen Funktion ergänzt werden. Also ist A in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ analytisch. Hieraus ergibt sich wieder ein Widerspruch zur Nichtkonstanz von w ∎

Zum Abschluß soll noch ein Beispiel betrachtet werden.

Beispiel 2: Sei mit $e = 2.71\dots$

$$w(z) = \begin{cases} 1/z & \text{für } |z| \geq 1/e \\ g(r)e^{-i\vartheta} & \text{für } r = |z| < 1/e,\ z = re^{i\vartheta}, \end{cases}$$

wobei

$$-g(r)/[g'(r)r] = p(re^{i\vartheta}) = (1 - \ln r)\ln(-e \ln r) \quad \text{in } (0, 1/e)$$

gilt und $g(1/e) = e$ ist. Damit liefert das Integral in Satz 2/(ii)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{1/e} \frac{dr}{r(1 - \ln r)\ln(-e \ln r)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{ds}{(1 - s)\ln(-es)} = \infty .$$

Dagegen ist w nicht beschränkt, was aus der Divergenz von

$$1 - \ln g(r) = -\int_r^{1/e} \frac{dt}{t(1 - \ln t)\ln(-e \ln t)} \quad \text{für } r \to +0$$

folgt. Dabei wächst die für $r \to +0$ unbeschränkte Funktion p etwas stärker als es in [3] zugelassen ist. In [3] wird nämlich gefordert, daß das Maß $|M(\varepsilon)|$ von $M(\varepsilon) = \{z : p(z) > (2 - \varepsilon)/\varepsilon\}$ nicht größer als $C_0 e^{\alpha} e^{-\alpha/\varepsilon}$ für alle positiven ε mit $\varepsilon < \varepsilon_0$ ist, wobei $\varepsilon_0 \in (0,1]$, $\alpha > 0$ und $C_0 \geq 0$ feste Konstanten sind. Bei diesem Beispiel ist $M(\varepsilon)$ für $0 < \varepsilon < 2/3$ stets eine offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in 0 und dem positiven Radius $r^*(\varepsilon) < 1/e$, der sich als eindeutig bestimmte Lösung von

$$[1 - \ln r^*(\varepsilon)] \ln[-e \ln r^*(\varepsilon)] = (2 - \varepsilon)/\varepsilon \tag{11}$$

erweist. Aus (11) folgt dann zum einen $r^*(\varepsilon) \to +0$ für $\varepsilon \to +0$ und zum anderen durch Umstellen $1-[(2-\varepsilon)/\varepsilon]\ln^{-1}[-e\ln r^*(\varepsilon)] = \ln r^*(\varepsilon)$, d.h.

$$\ln|M(\varepsilon)| = 2 + \ln\pi - [(4-2\varepsilon)/\varepsilon]\ln^{-1}[-e\ln r^*(\varepsilon)] .$$

Es gibt aber keine Konstanten $\varepsilon_0 \in (0,1]$, $\alpha > 0$ und $C_0 \geq 0$ mit

$$\ln C_0 + \alpha - \alpha/\varepsilon \geq 2 + \ln\pi - [(4-2\varepsilon)/\varepsilon]\ln^{-1}[-e\ln r^*(\varepsilon)]$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, wie man durch eine indirekte Schlußweise mittels $\varepsilon \to +0$ wegen $r^*(\varepsilon) \to +0$ leicht verifiziert.

LITERATUR

[1] БИЛУТА, П.А. : *Некоторые экстремальные задачи для отображений, квазиконформных в среднем.* Сиб. мат. ж. **6** (1965), 717 - 726.
[2] ВОЛКОВЫСКИЙ, Л.И.: *Исследования по проблеме типа односвязной римановой поверхности.* Труды Мат. инст. им. В.А. Стеклова **34** (1950), 5 - 167.
[3] DAVID, G.: *Solutions de l'equation de Beltrami avec* $\|\mu\|_\infty = 1$. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. Math. **13** (1988), 25 - 70.
[4] КЕСЕЛЬМАН, В.М.: *О теореме Бернштейна для поверхностей с квазиконформным гауссовым отображением.* Мат. заметки **35** (1984), 445 - 453.
[5] KÜHNAU, R.: *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung.* Wiss. Z. Martin-Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe **13** (1964), 35 - 39.
[6] KÜNZI, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen.* Berlin - Göttingen - Heidelberg: Springer-Verlag 1960.
[7] MARTIO, O., RICKMAN, S., and J. VÄISÄLÄ: *Definitions for quasiregular mappings.* Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I. Math. **448** (1969), 1 - 40.
[8] RODIN, B.: *The method of extremal length.* Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 587 - 606.
[9] STOILOW, S.: *Lecons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.* Paris: Gauthier-Villars 1938.

Received 06.11.1989

Author's address:

Dr. Erich Hoy
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
Postfach
D(Ost) - 4010 Halle