Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 4, 479–492

Zur Darstellung von Lösungen bei Systemen partieller Differentialgleichungen, insbesondere bei isolierten Singularitäten

P. BERGLEZ

For specific systems of elliptic partial differential equations and the associated systems of formally hyperbolic equations in complex variables the solutions can be given using certain differential operators. These operators map holomorphic functions into the set of solutions of the system. In this article we consider the relation between a solution and the holomorphic functions generating it. In particular we determine the generators of the zero solution. Finally we give a general representation theorem for the solutions defined in the neighbourhood of an isolated singularity.

Key words: *Systems of partial differential equations, differential operators, isolated singularities*

AMS subject classification: 35 G 05, 35 C 05

1. Einführung

Vorgelegt sei das System homogener elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei reellen Variablen

$$\Delta u_i + \sum_{k=1}^{j} \left(a_{ik}(x,y)\frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{ik}(x,y)\frac{\partial u_k}{\partial y} + c_{ik}(x,y)u_k \right) = 0, \quad i = 1,\dots,j,$$

wobei a_{ik}, b_{ik} und c_{ik} für $1 \le i,k \le j$ analytische Funktionen in einem Gebiet $\mathcal{D} \in \boldsymbol{R}^2$ bezeichnen. Dieses System kann mit den Matrizen $a = (a_{ik}), b = (b_{ik}), c = (c_{ik})$ und dem Vektor $u = (u_1,\dots,u_j)$ auch in der Gestalt

$$\Delta u + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \tag{1.1}$$

angegeben werden.

Führt man nun die komplexe Variable $z = x + iy$ ein ($\bar{z}$ bezeichnet dann die konjugiert komplexe Größe), so kann das System (1.1) auch in der Form

$$\tilde{u}_{z\bar{z}} + \tilde{a}(z,\bar{z})\tilde{u}_z + \tilde{b}(z,\bar{z})\tilde{u}_{\bar{z}} + \tilde{c}(z,\bar{z})\tilde{u} = 0 \tag{1.2}$$

angegeben werden mit $\tilde{u}(z,\bar{z}) = u(x,y)$, $4\tilde{a}(z,\bar{z}) = a(x,y) + ib(x,y)$, $4\tilde{b}(z,\bar{z}) = a(x,y) - ib(x,y)$, $4\tilde{c}(z,\bar{z}) = c(x,y)$, wobei jeweils $2x = z + \bar{z}$ und $2iy = z - \bar{z}$ zu verwenden ist und $2\partial/\partial z = \partial/\partial x - i\partial/\partial y$, $2\partial/\partial\bar{z} = \partial/\partial x + i\partial/\partial y$ gilt.

Setzt man die Koeffizienten a, b und c in (1.1) zu komplexen Werten von x und y fort und verwendet $z = x + iy, \zeta = x - iy$, so kann mit $\tilde{u}(z,\zeta) = u(x,y)$, $4\tilde{a}(z,\zeta) = a(x,y) + ib(x,y)$, $4\tilde{b}(z,\zeta) = a(x,y) - ib(x,y)$, $4\tilde{c}(z,\zeta) = c(x,y)$, für $2x = z + \zeta, 2iy = z - \zeta$ dem System (1.1) folgendes System formal hyperbolischer Gleichungen zugeordnet werden:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z\partial\zeta} + \tilde{a}(z,\zeta)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z} + \tilde{b}(z,\zeta)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\zeta} + \tilde{c}(z,\zeta)\tilde{u} = 0. \tag{1.3}$$

$\mathcal{D}$ sei nun ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z–Ebene und es gelte $\bar{\mathcal{D}} := \{z \mid \bar{z} \in \mathcal{D}\}$. Sind die Koeffizienten in (1.3) in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ holomorph, so wird $\mathcal{D}$ nach I. N. VEKUA [6] ein Fundamentalgebiet von (1.3) genannt.

Gilt $\zeta = \bar{z}$ (d. h. x und y sind reell), so erhält man aus (1.3) das System (1.2). Somit stellt jede in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ holomorphe Lösung $\tilde{u}(z,\zeta)$ mit $\zeta = \bar{z}$ eine in $\mathcal{D}$ definierte Lösung von (1.1) dar.

Im folgenden bezeichne $\mathcal{H}(j \times k; \mathcal{G}), j, k \in \boldsymbol{N}$, die Menge aller $j \times k$ Matrizen, die im Gebiet $\mathcal{G}$ ($\mathcal{G} \subseteq \boldsymbol{C}$ oder $\mathcal{G} \subseteq \boldsymbol{C}^2$) [1] definiert sind und deren Elemente dort analytische Funktionen sind, $\mathcal{M}(j \times k; \boldsymbol{C})$ die Menge aller $j \times k$ Matrizen, deren Elemente aus $\boldsymbol{C}$ sind, und 0 die Null-Matrix bzw. den Null–Vektor.

Das Gebiet $\mathcal{D}$ soll immer so gewählt werden, daß es einerseits Fundamentalgebiet ist und andererseits die betrachteten Funktionen erklärt sind.

I. N. VEKUA gibt in [6], p. 163, unter Verwendung der RIEMANN–Matrix–Funktion einen allgemeinen Darstellungssatz für die in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ definierten Lösungen von (1.3) an. In [3] wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür hergeleitet, daß es zum System (1.3) Differentialoperatoren der Form

$$K_n := \sum_{k=0}^{n} a_k(z,\zeta)\frac{\partial^k}{\partial z^k}, \quad \tilde{K}_m := \sum_{k=0}^{m} b_k(z,\zeta)\frac{\partial^k}{\partial\zeta^k},$$

mit $a_k \in \mathcal{H}(j \times j; \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}})$ für $k = 0,\dots,n$, $b_k \in \mathcal{H}(j \times j; \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}})$ für $k = 0,\dots,m$, $n, m \in \boldsymbol{N}_o$ und den folgenden Eigenschaften gibt:

- $a_n \not\equiv 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$, $b_m \not\equiv 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$,
- $K_n g$ ist für alle $g \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$ eine Lösung von (1.3) in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$,
- $\tilde{K}_m h$ ist für alle $h \in \mathcal{H}(j \times 1; \bar{\mathcal{D}})$ eine Lösung von (1.3) in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$.

[1] $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{C}$ bezeichnen die Menge der natürlichen bzw. komplexen Zahlen, $\boldsymbol{N}_0 := \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

Die Operatoren K_n und $\tilde{K}_m$ werden BAUER–Matrix–Operatoren erster bzw. zweiter Art genannt und kurz als $\mathcal{B}_I^n$–Operator bzw. $\mathcal{B}_{II}^m$–Operator bezeichnet.

Das System (1.3) kann immer auf die verkürzte Form

$$Lw = 0 \tag{1.4}$$

mit

$$Lw := w_{z\zeta} + A^{-1}A_z w_\zeta + Bw$$

transformiert werden (vgl. [3]). Aus dieser Arbeit übernehmen wir nun folgenden Existenzsatz für BAUER–Matrix–Operatoren :

Satz 1.1 *a) Zum System (1.4) existiert in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ genau dann ein* BAUER*–Matrix–Operator erster Art, falls es ein $n \in \boldsymbol{N}$ gibt, so daß mit*

$$\begin{aligned} A_n = A \quad &, \quad B_n = B\,, \\ A_{k-1}^{-1}A_{k-1,z} &= B_k^{-1}A_k^{-1}A_{k,z}B_k + B_k^{-1}B_{k,z}, \quad k = n,\dots,1, \\ B_{k-1} &= B_k + \left(A_{k-1}^{-1}A_{k-1,z}\right)_\zeta\,, \end{aligned} \tag{1.5}$$

gilt:

$$B_0 \equiv 0 \quad in \quad \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}\,.$$

Der $\mathcal{B}_I^n$–Operator K_n ist dann gegeben durch

$$K_n = F_{n-1} \cdot \ldots \cdot F_0 \tag{1.6}$$

mit

$$F_k := \frac{\partial}{\partial z} + A_k^{-1}A_{k,z}\,, \quad k = 0,\dots,n-1.$$

b) Ein BAUER*–Matrix–Operator zweiter Art existiert zu (1.4) in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ genau dann, wenn es ein $m \in \boldsymbol{N}$ derart gibt, daß*

$$\tilde{B}_0 \equiv 0 \quad in \quad \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$$

mit

$$\tilde{A}_m = A^{-1}, \tilde{B}_m = A(B - (A^{-1}A_z)_\zeta)A^{-1} \tag{1.7}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{j-1}^{-1}\tilde{A}_{j-1,\zeta} &= \tilde{B}_j^{-1}\tilde{A}_j^{-1}\tilde{A}_{j,\zeta}\tilde{B}_j + \tilde{B}_j^{-1}\tilde{B}_{j,\zeta}\,, \\ \tilde{B}_{j-1} &= \tilde{B}_j + (\tilde{A}_{j-1}\tilde{A}_{j-1,\zeta})_z\,, \end{aligned} \qquad j = m,\dots,1 \tag{1.8}$$

gilt. Der BAUER*–Matrix–Operator $\tilde{K}_m$ ist dann gegeben durch*

$$\tilde{K}_m = A^{-1}\tilde{F}_{m-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_0$$

mit

$$\tilde{F}_j = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \tilde{A}_j^{-1}\tilde{A}_{j,\zeta}\,, \quad j = 0,\dots,m-1.$$

Wir betrachten nun Lösungen von (1.4) in der Gestalt

$$w_1 = K_n g \quad \text{bzw.} \quad w_2 = \tilde{K}_m h, \tag{1.9}$$

$g \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$, $h \in \mathcal{H}(j \times 1; \bar{\mathcal{D}})$ und deren Summe

$$w = K_n g + \tilde{K}_m h\,. \tag{1.10}$$

g und h werden erzeugende Funktionen oder kurz Erzeugende genannt. In [3] wurden zwei Beispiele für Systeme von Differentialgleichungen mit BAUER–Matrix–Operatoren angegeben und gezeigt, daß man mit (1.10) die gesamte, in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ definierte Lösungsmannigfaltigkeit von (1.4) erhält.

Im folgenden soll nun der Zusammenhang zwischen einer Lösung und den sie erzeugenden Funktionen untersucht werden. Dabei ist zwischen der eingliedrigen Lösungsdarstellung (1.9) und der zweigliedrigen Form (1.10) zu unterscheiden. Besonders wichtig ist die Frage, mit welchen Erzeugenden die Null–Lösung in der Form $0 = K_n g + \tilde{K}_m h$ gewonnen werden kann. Diese spielen dann bei der Untersuchung der Form der Erzeugenden einer in der Nähe einer isolierten Singularität definierten und dort eindeutigen Lösung von (1.4) eine entscheidende Rolle. Für eine einzelne Differentialgleichung findet man entsprechende Ergebnisse in den Arbeiten von K. W. BAUER [1] und R. HEERSINK [4] sowie in [2].

2. Die Erzeugenden einer Lösung

Für viele weitergehende Fragestellungen ist es notwendig, die Erzeugenden einer Lösung angeben zu können. Hier soll sowohl für eine eingliedrige Lösungsdarstellung als auch für die zweigliedrige Darstellung der Zusammenhang zwischen einer Lösung und den sie erzeugenden Funktionen aufgezeigt werden. Insbesonders werden die Erzeugenden der Null–Lösung genauer untersucht. Dazu benötigen wir einige Relationen für die Matrizen $A_k, B_k, \tilde{A}_k$ und $\tilde{B}_k$. A_k und B_k seien für $k = 0, \ldots, n$ durch (1.5) gegeben, $\tilde{A}_j$ und $\tilde{B}_j$ für $j = 0, \ldots, m$ durch (1.7) und (1.8). Für $k > n$ und $j > m$ gelte

$$\begin{aligned}
B_{k+1} &= B_k - (A_k^{-1} A_{k,z})_\zeta\,, \\
A_{k+1}^{-1} A_{k+1,z} &= B_{k+1} A_k^{-1} A_{k,z} B_{k+1}^{-1} - B_{k+1,z} B_{k+1}^{-1}\,, \\
\tilde{B}_{j+1} &= \tilde{B}_j - (\tilde{A}_j^{-1} \tilde{A}_{j,\zeta})_z\,, \\
\tilde{A}_{j+1}^{-1} \tilde{A}_{j+1,\zeta} &= \tilde{B}_{j+1} \tilde{A}_j^{-1} \tilde{A}_{j,\zeta} \tilde{B}_{j+1}^{-1} - \tilde{B}_{j+1,\zeta} \tilde{B}_{j+1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion über $j \in \boldsymbol{N}, j \leq m$ und $k \in \boldsymbol{N}, k \leq n$ zeigt man die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{m-j}^{-1} \tilde{A}_{m-j,\zeta} &= A_n B_{n+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot B_{n+j}^{-1} \cdot (B_{n+j} \cdot \ldots \cdot B_{n+1} A_n^{-1})_\zeta\,, \\
\tilde{B}_{m-j} &= A_n B_{n+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot B_{n+j}^{-1} B_{n+j+1} B_{n+j} \cdot \ldots \cdot B_{n+1} A_n^{-1}\,,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A_{n-k}^{-1} A_{n-k,z} &= \tilde{A}_m \tilde{B}_{m+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{B}_{m+k}^{-1} \cdot (\tilde{B}_{m+k} \cdot \ldots \cdot \tilde{B}_{m+1} \tilde{A}_m^{-1})_z\,, \\
B_{n-k} &= \tilde{A}_m \tilde{B}_{m+1}^{-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{B}_{m+k}^{-1} \tilde{B}_{m+k+1} \tilde{B}_{m+k} \cdot \ldots \cdot \tilde{B}_{m+1} \tilde{A}_m^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt sofort das

Lemma 2.1 *Die Bedingungen* $B_0 \equiv 0$ *und* $\tilde{B}_0 \equiv 0$ *in* $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ *von Satz 1.1 sind äquivalent zu den Forderungen* $\tilde{B}_{m+n+1} \equiv 0$ *bzw.* $B_{n+m+1} \equiv 0$ *in* $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$.

Für $k \geq n$ und $j \geq m$ werden noch die folgenden Differentialoperatoren (für $0 \leq k < n$ und $0 \leq j < m$ siehe Satz 1.1)

$$F_k = \frac{\partial}{\partial z} + A_k^{-1} A_{k,z}\,, \quad \tilde{F}_j = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \tilde{A}_j^{-1} \tilde{A}_{j,\zeta}.$$

definiert. Damit kann nun der nachstehende Satz bewiesen werden.

Satz 2.1 *a) Zu (1.4) gebe es in* $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ *sowohl einen* B_I^n*–Operator* K_n *als auch einen* B_{II}^m*–Operator* $\tilde{K}_m$. *Zu jeder Lösung* $w \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}})$ *von (1.4) in der Form (1.10) sind dann die Funktionen* $F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_0\, g$ *und* $\tilde{F}_{m+n} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_0\, h$ *eindeutig bestimmt gemäß*

$$\begin{aligned} F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_0\, g &= F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_n\, w\,, \\ \tilde{F}_{m+n} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_0\, h &= \tilde{F}_{m+n} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_m\, (Aw)\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

und besitzen die Form

$$F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_0\, g = \sum_{k=0}^{n+m+1} \alpha_k\, g^{(k)} \quad \text{mit} \quad \alpha_k \in \mathcal{H}(j \times j; \mathcal{D})\,, \tag{2.2}$$

$$\tilde{F}_{m+n} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_0\, h = \sum_{k=0}^{m+n+1} \beta_k\, h^{(k)} \quad \text{mit} \quad \beta_k \in \mathcal{H}(j \times j; \bar{\mathcal{D}})\,. \tag{2.3}$$

b) Im Fall einer eingliedrigen Lösungsdarstellung in der Form (1.9) sind die Erzeugenden g *und* h *eindeutig bestimmt durch*

$$g = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n\, w_1 \quad \text{mit} \quad G_k = -B_k^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (k = 1, \ldots, n)\,, \tag{2.4}$$

$$h = \tilde{G}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{G}_m\, (Aw_2) \quad \text{mit} \quad \tilde{G}_j = -\tilde{B}_j^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \quad (j = 1, \ldots, m)\,. \tag{2.5}$$

Beweis: a) Zunächst zeigt man durch vollständige Induktion über $j \in \boldsymbol{N}, j \leq m$, die Gültigkeit von

$$F_{n+j-1} \cdot \ldots \cdot F_n(\tilde{K}_m\, h) = \sum_{k=0}^{m-j} b_k^{m-j} h^{(k)}\,, \tag{2.6}$$

wobei die Koeffizienten b_k^{m-j} mit $b_{-1}^{m-j} \equiv 0$ folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} L_{n+j} b_k^{m-j} &= -b_{k-1,z}^{m-j} - A_{n+j}^{-1} A_{n+j,z} b_{k-1}^{m-j}\,, \quad k = 0, \ldots, m-j, \\ 0 &= b_{m-j,z}^{m-j} + A_{n+j}^{-1} A_{n+j,z} b_{m-j}^{m-j}\,, \end{aligned}$$

mit $L_k\hat{w} := \hat{w}_{z\zeta} + A_k^{-1}A_{k,z}\hat{w}_\zeta + B_k\hat{w}$. Der Ausdruck in (2.6) ist eine Lösung des Systems $L_{n+j}\hat{w} = 0$ (vgl. [3], Lemma 2.1.a).

Setzt man in (2.6) $j = m$, so folgt sofort $F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_n(\tilde{K}_m h) = 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$.

Nunmehr ist der Ausdruck

$$F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_n w = F_{n+m} \cdot \ldots \cdot F_0 g = \sum_{k=0}^{n+m+1} \alpha_k(z,\zeta) g^{(k)} \tag{2.7}$$

eine Lösung von $L_{n+m}\hat{w} = 0$. Da nach Voraussetzung zum betrachteten System in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ auch ein $\mathcal{B}_{II}^m$–Operator existiert, ist dort $\tilde{B}_0 \equiv 0$ zu fordern. Dies ist nach Lemma 2.1 äquivalent zur Bedingung $B_{n+m+1} \equiv 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$. Damit hängen die Koeffizienten α_k in (2.7) nur von der Variablen z ab und man erhält (2.2).

Entsprechend zeigt man die Gültigkeit der Relationen (2.1) und (2.3).

b) n–fache sukzessive Anwendung von Lemma 2.1.b aus [3] liefert unter Verwendung von $B_0 \equiv 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ die Gleichung (2.4), der Ausdruck (2.5) folgt entsprechend ∎

Im weiteren soll unter der Voraussetzung, daß zum System (1.4) ein $\mathcal{B}_I^n$–Operator K_n und ein $\mathcal{B}_{II}^m$–Operator $\tilde{K}_m$ existiert, die Null–Lösung von (1.4) näher untersucht werden. Funktionenpaare $(\varphi(z), \psi(\zeta)) \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D}) \times \mathcal{H}(j \times 1; \bar{\mathcal{D}})$, die die Null–Lösung von (1.4) in der Darstellung $0 = K_n\varphi + \tilde{K}_m\psi$ liefern, werden N–Paare genannt. Es gilt der folgende

Satz 2.2 *a) Das Problem*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(z,\zeta_0) g_0^{(k)}(z) \quad + \quad \sum_{k=0}^{m} b_k(z,\zeta_0) h_0^{(k)}(\zeta_0) = 0\,, \qquad \zeta_0 \in \bar{\mathcal{D}}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(z_0,\zeta) g_0^{(k)}(z_0) \quad + \quad \sum_{k=0}^{m} b_k(z_0,\zeta) h_0^{(k)}(\zeta) = 0\,, \qquad z_0 \in \mathcal{D}, \tag{2.9}$$

$$g_0^{(k)}(z_0) \;=\; c_k\,, \quad k = 0,\ldots,n, \tag{2.10}$$

$$h_0^{(k)}(\zeta_0) \;=\; d_k\,, \quad k = 0,\ldots,m-1, \tag{2.11}$$

besitzt für beliebige $c_k, d_k \in \mathcal{M}(j \times 1; C)$ eine eindeutig bestimmte Lösung $(g_0, h_0) \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D}) \times \mathcal{H}(j \times 1; \bar{\mathcal{D}})$.

b) Dieses Paar (g_0, h_0) stellt ein N–Paar zu (1.4) dar.

c) Umgekehrt ist jedes N–Paar zu (1.4) Lösung eines solchen Problems (2.8) – (2.11).

Beweis: a) Verwendet man $g_0^{(k)}(z_0)$ gemäß (2.10), so besitzt das System (2.9) von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den Anfangswerten (2.11) eine eindeutig bestimmte Lösung $h_0 \in \mathcal{H}(j \times 1; \bar{\mathcal{D}})$ (vgl. [5]). Die Größe $h_0^{(m)}(\zeta_0) =: d_m$ ist dann eindeutig bestimmt. Nunmehr betrachten wir das System (2.8) mit $h_0^{(k)}(\zeta_0), k = 0,\ldots,m-1$, aus (2.11) und dem soeben bestimmten $h_0^{(m)}(\zeta_0)$. Zusammen mit den Anfangswerten $g_0^{(k)}(z_0) = c_k, k = 0,\ldots,n-1$, ist dadurch eine Funktion $g_0 \in$

$\mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$ eindeutig bestimmt. Damit ist auch $g_0^{(n)}(z_0) =: \hat{c}_n$ festgelegt. Indem man in (2.8) $z = z_0$ und in (2.9) $\zeta = \zeta_0$ setzt, zeigt man sofort, daß $\hat{c}_n = c_n$ gilt.

b) Nach I. N. VEKUA [6], p. 164, sind die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung $w \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}})$ des Goursat-Problems

$$Lw = 0, \quad w(z, \zeta_0) = \varphi(z), \quad w(z_0, \zeta) = \psi(\zeta),$$

mit $\varphi \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$, $\psi \in \mathcal{H}(j \times 1; \bar{\mathcal{D}})$ beliebig, gesichert. Hier gilt mit dem in a) bestimmten Paar (g_0, h_0) : $w(z_0, \zeta) = (K_n g_0 + \tilde{K}_m h_0)\mid_{z=z_0} = 0$ und $w(z, \zeta_0) = (K_n g_0 + \tilde{K}_m h_0)\mid_{\zeta=\zeta_0} = 0$. Damit folgt $w(z, \zeta) = 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$. Das bedeutet aber, daß (g_0, h_0) ein N-Paar ist.

c) Folgt unmittelbar aus der Definition der N-Paare ∎

Das im vorigen Satz angegebene, die N-Paare charakterisierende Anfangswertproblem (2.8) - (2.11) kann auf Grund der Möglichkeit, die auftretenden BAUER-Matrix-Operatoren gemäß Satz 1.1 zu faktorisieren, unter Verwendung von

$$\begin{aligned} u_0(z, \zeta_0) &:= -\sum_{k=0}^{m} b_k(z, \zeta_0) h^{(k)}(\zeta_0), \qquad u_n(z, \zeta_0) := g_0(z), \\ \tilde{u}_0(z_0, \zeta) &:= -A(z_0, \zeta) \sum_{k=0}^{n} a_k(z_0, \zeta) g^{(k)}(z_0), \quad \tilde{u}_m(z_0, \zeta) := h_0(\zeta), \end{aligned}$$

in folgende Form übergeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} F_{n-k} u_k \mid_{\zeta=\zeta_0} &= u_{k-1}(z, \zeta_0), \\ u_k(z_0, \zeta_0) &= \tilde{c}_k, \end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

mit

$$\tilde{c}_k = (F_{n-k} \cdot \ldots \cdot F_0 g(z))_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\zeta_0}}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \tilde{F}_{m-k} \tilde{u}_k \mid_{z=z_0} &= \tilde{u}_{k-1}(z_0, \zeta), \\ \tilde{u}_k(z_0, \zeta_0) &= \tilde{d}_k, \end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, m, \tag{2.13}$$

mit

$$\tilde{d}_k = (\tilde{F}_{m-k} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_0 h(\zeta))_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\zeta_0}} .$$

Zunächst wird, beginnend bei $k = 1$, das Problem (2.13) sukzessive gelöst. Man erhält für $k = 1, \ldots, m$

$$\tilde{u}_k(z_0, \zeta) = \tilde{A}_{m-k}^{-1}(z_0, \zeta) \left[\tilde{A}_{m-k}(z_0, \zeta_0) \tilde{d}_k + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{A}_{m-k}(z_0, \xi) \tilde{u}_{k-1}(z_0, \xi) \, d\xi \right] . \tag{2.14}$$

Mit $k = m$ ergibt sich somit $h_0(\zeta) = \tilde{u}_m(z_0, \zeta)$, die Lösung des Problems (2.9),(2.11).

Jetzt ist man in der Lage, $h_0^{(m)}(\zeta_0)$ zu berechnen und die Lösung des Problems (2.12) in der Form

$$u_k(z, \zeta_0) = A_{n-k}^{-1}(z, \zeta_0) \left[A_{n-k}(z_0, \zeta_0) \tilde{c}_k + \int_{z_0}^{z} A_{n-k}(\xi, \zeta_0) u_{k-1}(\xi, \zeta_0) \, d\xi \right] , \tag{2.15}$$

$k = 1, \ldots, n$, anzugeben. Mit $k = n$ erhält man die Lösung $g_0 \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$ von (2.8), (2.10).

Damit gilt der folgende

Satz 2.3 *Zum System (1.4) gebe es in $\mathcal{D} \times \tilde{\mathcal{D}}$ sowohl einen $\mathcal{B}_I^n$-Operator $K_n = \sum_{k=0}^n a_k(z,\zeta)\partial^k/\partial z^k$ als auch einen $\mathcal{B}_{II}^m$-Operator $\tilde{K}_m = \sum_{k=0}^n b_k(z,\zeta) \times \partial^k/\partial \zeta^k$. Seien $z_0 \in \mathcal{D}$ und $\zeta_0 \in \tilde{\mathcal{D}}$ beliebig, aber fest und $c_k \in \mathcal{M}(j \times 1; C)$, $k = 0, \ldots, n$, $d_k \in \mathcal{M}(j \times 1; C), k = 0, \ldots, m-1$, sowie $d_m = -A(z_0, \zeta_0) \times (\sum_{k=0}^n a_k(z_0,\zeta_0)c_k + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(z_0,\zeta_0)d_k)$. Dann gilt:*

a) Das N-Paar (g_0, h_0) zu (1.4) in der Darstellung $0 = K_n g_0 + \tilde{K}_m h_0$ kann angegeben werden in der Form

$$g_0(z) = u_n(z, \zeta_0), \quad h_0(\zeta) = \tilde{u}_m(z_0, \zeta), \tag{2.16}$$

mit $u_n, \tilde{u}_m$ gemäß (2.15) und (2.14) und

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= F_{n-k-1} \cdot \ldots \cdot F_0 g(z) \mid_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\zeta_0}} \quad \textit{mit} \quad g^{(k)}(z_0) = c_k, \\ \tilde{d}_k &= \tilde{F}_{m-k-1} \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_0 h(\zeta) \mid_{\substack{z=z_0 \\ \zeta=\zeta_0}} \quad \textit{mit} \quad h^{(k)}(\zeta_0) = d_k. \end{aligned}$$

b) Das allgemeinste Erzeugendenpaar $(\tilde{g}, \tilde{h})$ zu einer Lösung w von (1.4) erhält man durch

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z) &= g(z) + g_0(z), \\ \tilde{h}(\zeta) &= h(\zeta) + h_0(\zeta), \end{aligned}$$

mit g_0 und h_0 gemäß (2.16).

Im speziellen soll nun ein System von elliptischen Differentialgleichungen der Form (1.1) betrachtet werden, wobei die Koeffizienten reellwertige Funktionen der reellen Variablen x und y sind. In komplexer Notation kann es immer in der Form

$$v_{z\bar{z}} + \alpha^{-1}\alpha_{\bar{z}} v_z + \bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}_z v_{\bar{z}} + \beta v = 0 \tag{2.17}$$

mit geeigneten Matrizen α und β angegeben werden, wobei $\beta = \overline{\beta}$ gilt. Durch $\hat{w} = \alpha v$ geht dieses System über in die Gestalt

$$\hat{w}_{z\bar{z}} + \hat{A}^{-1}\hat{A}_z \hat{w}_{\bar{z}} + \hat{B}\hat{w} = 0 \tag{2.18}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \bar{\alpha}\alpha^{-1}, \\ \hat{B} &= \alpha_z\alpha^{-1}\alpha_{\bar{z}}\alpha^{-1} - \alpha_{z\bar{z}}\alpha^{-1} - \alpha\bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}_z\alpha^{-1}\alpha_{\bar{z}}\alpha^{-1} + \alpha\beta\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir das System formal hyperbolischer Differentialgleichungen

$$w_{z\zeta} + A^{-1}A_z w_\zeta + Bw = 0 \tag{2.19}$$

mit

$$\begin{aligned} A(z,\zeta) &= [\alpha(z,\zeta)]^* \alpha^{-1}(z,\zeta)\,, \\ B(z,\zeta) &= \alpha_z(z,\zeta)\alpha^{-1}(z,\zeta)\alpha_\zeta(z,\zeta)\alpha^{-1}(z,\zeta) - \alpha_{z\zeta}(z,\zeta)\alpha^{-1}(z,\zeta) \\ &\quad -\alpha(z,\zeta)[\alpha^{-1}(z,\zeta)]^* \left([\alpha(z,\zeta)]^*\right)_z \alpha^{-1}(z,\zeta)\alpha_\zeta(z,\zeta)\alpha^{-1}(z,\zeta) \\ &\quad +\alpha(z,\zeta)\beta(z,\zeta)\alpha^{-1}(z,\zeta)\,, \end{aligned}$$

wobei f^* die zu f konjugierte Funktion bezeichnet (vgl. [6], p. 64). Nach Satz 1.1 besitzt dieses System in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ genau dann einen $\mathcal{B}_I^n$–Operator K_n, wenn mit (1.5) $B_0 \equiv 0$ in $\mathcal{D} \times \bar{\mathcal{D}}$ erfüllt ist. Der Operator K_n ist dann durch (1.6) gegeben. Wegen der speziellen Struktur der Koeffizienten des Systems (2.19) gilt (vgl. (1.7)) $\tilde{A}_m = A^*$, $\tilde{B}_m = B^*$. Damit gibt es dann zu (2.19) auch einen $\mathcal{B}_{II}^n$–Operator $\tilde{K}_n$ (d. h. $m = n$), der in der Form

$$\tilde{K}_n h(\zeta) = A^{-1}(z,\zeta)[K_n h(z)]^*$$

mit K_n wie oben geschrieben werden kann.

In der Folge lassen sich nun alle Lösungen von (2.17) durch

$$v(z,\bar{z}) = \left(\alpha^{-1}(z,\zeta)\, K_n g(z) + \left[\alpha^{-1}(z,\zeta)\, K_n h(z)\right]^*\right)_{\zeta=\bar z}$$

mit $g, h \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$ darstellen. Alle reellwertigen Lösungen von (2.17) erhält man dann mit

$$v(z,\bar{z}) = \left(\alpha^{-1}(z,\zeta)\, K_n g(z) + \left[\alpha^{-1}(z,\zeta)\, K_n g(z)\right]^*\right)_{\zeta=\bar z}\,, \tag{2.20}$$

$g \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{D})$.

Die Aussagen der Sätze 2.1.a und 2.3 können natürlich auch für das System (2.17) übertragen werden. Wegen des besonderen Interesses an den reellwertigen Lösungen von (2.17) sollen hier aber nur die Resultate für diese Lösungsklasse formuliert werden.

Satz 2.4 *a) Bei vorgegebener reellwertiger Lösung v von (2.17) in der Form (2.20) ist die Funktion $(F_{2n} \cdot \ldots \cdot F_0\, g)_{\zeta=\bar z}$ eindeutig bestimmt durch*

$$\begin{aligned} (F_{2n} \cdot \ldots \cdot F_0\, g(z))_{\zeta=\bar z} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \alpha_k(z) g^{(k)}(z) \\ &= (F_{2n} \cdot \ldots \cdot F_n \alpha(z,\zeta) v(z,\zeta))_{\zeta=\bar z} \end{aligned}$$

mit $\alpha_k \in \mathcal{H}(j \times j; \mathcal{D})$.

b) Die allgemeinste Erzeugende $\tilde{g}$ einer reellwertigen Lösung von (2.17) erhält man mit

$$\tilde{g}(z) = g(z) + g_0(z)\,,$$

wobei g_0 die Erzeugende der Null-Lösung von (2.17) bezeichnet und mit u_n von (2.15) angegeben werden kann durch

$$g_0(z) = u_n(z,\zeta_0)\,\big|_{\zeta_0=\overline{z_0}}\,.$$

Dabei muß noch gelten

$$u_n(z,\zeta_0)\mid_{\zeta_0=\overline{z_0}} = \overline{\tilde{u}_n(z_0,\zeta)\mid_{\substack{\zeta=\bar{z}\\ \zeta_0=\overline{z_0}}}},$$

wobei $\tilde{u}_n$ nach (2.14) zu bestimmen ist.

3. Darstellung von Lösungen in der Nähe isolierter Singularitäten

In diesem Abschnitt werden Lösungen von Systemen elliptischer Differentialgleichungen untersucht, die an gewissen Stellen isolierte Singularitäten aufweisen. Dabei wird die Existenz der jeweiligen BAUER–Matrix–Operatoren vorausgesetzt.

Für das Weitere vereinbaren wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(z_1) &:= \{z \mid \mid z-z_1 \mid < \rho\},\\ \dot{\mathcal{U}}(z_1) &:= \{z \mid 0 < \mid z-z_1 \mid < \rho\},\end{aligned}$$

$\rho > 0$. Schlitzt man $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ so auf, daß man z_1 durch eine geeignete Kurve mit dem Rand von $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ verbindet, so entsteht ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das mit $\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)$ bezeichnet werden soll.

Satz 3.1 *a) Zu jeder vorgegebenen, in $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ eindeutigen Lösung $w(z,\bar{z})$ von*

$$w_{z\bar{z}} + A^{-1}(z,\bar{z})A_z(z,\bar{z})w_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})w = 0 \tag{3.1}$$

gibt es zwei Funktionen g und h in der Gestalt

$$g(z) = \log(z-z_1)g_1(z) + g_0(z), \quad \begin{aligned} g_1 &\in \mathcal{H}(j\times 1;\mathcal{U}(z_1)),\\ g_0 &\in \mathcal{H}(j\times 1;\dot{\mathcal{U}}(z_1)),\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$h(\zeta) = \log(\zeta-\overline{z_1})h_1(\zeta) + h_0(\zeta), \quad \begin{aligned} h_1 &\in \mathcal{H}(j\times 1;\overline{\mathcal{U}(z_1)}),\\ h_0 &\in \mathcal{H}(j\times 1;\overline{\dot{\mathcal{U}}(z_1)}),\end{aligned} \tag{3.3}$$

so daß

$$w(z,\bar{z}) = (K_n g + \tilde{K}_m h)_{\zeta=\bar{z}}.$$

b) Der Ausdruck $(K_n g + \tilde{K}_m h)_{\zeta=\bar{z}}$ mit g und h gemäß (3.2), (3.3) stellt genau dann eine in $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ eindeutige Lösung w von (3.1) dar, wenn $(g_1,-h_1)$ ein N–Paar ist.

Beweis: a) Es sei $w(z,\zeta)$ die (im allgemeinen mehrdeutige) Fortsetzung von $w(z,\bar{z})$ zu unabhängigen Variablen z und ζ. Nach I. N. VEKUA ([6] p. 163, 169) läßt sich $w(z,\zeta)$ dann immer darstellen durch

$$\begin{aligned} w(z,\zeta) = {} & R(z_0,\zeta_0;z,\zeta)\alpha \\ & + \int_{z_0}^{z} R(t,\zeta_0;z,\zeta)\varphi(t)\,dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} R(z_0,\tau;z,\zeta)\psi(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $\alpha \in \mathcal{M}(j \times 1; C)$ und φ, ψ in der Form

$$\varphi(z) = \log(z - z_1)\varphi_1(z) + \varphi_0(z), \tag{3.5}$$

$$\psi(\zeta) = \log(\zeta - \overline{z_1})\psi_1(\zeta) + \psi_0(\zeta), \tag{3.6}$$

wobei $\varphi_1 \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{U}(z_1))$, $\varphi_0 \in \mathcal{H}(j \times 1; \dot{\mathcal{U}}(z_1))$, $\psi_1 \in \mathcal{H}(j \times 1; \overline{\mathcal{U}(z_1)})$, $\psi_0 \in \mathcal{H}(j \times 1; \overline{\dot{\mathcal{U}}(z_1)})$ gilt und R die RIEMANN–Matrix–Funktion zu (1.4) bezeichnet. Die Größen α, φ und ψ sind dabei durch w eindeutig festgelegt gemäß

$$\begin{aligned} \alpha &= w(z_0, \zeta_0), \\ \varphi(z) &= \partial w(z, \zeta_0)/\partial z + A^{-1}(z, \zeta_0)A_z(z, \zeta_0)w(z, \zeta_0), && (3.7) \\ \psi(\zeta) &= \partial w(z_0, \zeta)/\partial \zeta. && (3.8) \end{aligned}$$

(i) Der erste Summand auf der rechten Seite von (3.4) ist in $\mathcal{U}(z_1) \times \overline{\mathcal{U}(z_1)}$ holomorph und kann dort dargestellt werden durch

$$w_1 = R(z_0, \zeta_0; z, \zeta)\alpha = K_n\hat{g}_1$$

mit einer Funktion

$$\hat{g}_1 \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{U}(z_1)) \tag{3.9}$$

(vgl. [3], Beweis zu Satz 3.3).

(ii) Der zweite Summand

$$w_2 = \int_{z_0}^{z} R(t, \zeta_0; z, \zeta)\varphi(t)\, dt$$

ist in $\dot{\mathcal{U}}_s(z_1) \times \overline{\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)}$ holomorph und kann in der Form

$$w_2 = K_n\hat{g}_2 \quad \text{mit} \quad \hat{g}_2 \in \mathcal{H}(j \times 1; \dot{\mathcal{U}}_s(z_1))$$

angegeben werden (vgl. ebenfalls [3]). Gleichung (3.7) stellt nun einen Zusammenhang zwischen den Funktionen φ und $\hat{g}_2$ her. Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} + A^{-1}A_z w_2\right)_{\zeta=\zeta_0} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}[a_{k,z} + a_{k-1} + A^{-1}A_z a_k]\hat{g}_2^{(k)}(z)\,|_{\zeta=\zeta_0} \end{aligned}$$

mit $a_{n+1} :\equiv 0, a_{-1} :\equiv 0$.

Mit φ gemäß (3.5) liegt ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen $(n+1)$–ter Ordnung für $\hat{g}_2$ vor, das eine Lösung der Form

$$\hat{g}_2(z) = \log(z - z_1)\tilde{g}_2(z) + \mathfrak{g}_2(z) \tag{3.10}$$

mit $\tilde{g}_2 \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{U}(z_1))$, $\mathfrak{g}_2 \in \mathcal{H}(j \times 1; \dot{\mathcal{U}}_s(z_1))$ besitzt.

(iii) Der dritte Summand in (3.4)

$$w_3 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} R(z_0, \tau; z, \zeta)\psi(\tau)\,d\tau\,,$$

der in $\dot{\mathcal{U}}_s(z_1) \times \overline{\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)}$ holomorph ist, kann nach [3] dort dargestellt werden in der Form

$$w_3 = \tilde{K}_m \hat{h}_2 \quad \text{mit} \quad \hat{h}_2 \in \mathcal{H}(j \times 1; \overline{\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)})\,.$$

Die Erzeugende $\hat{h}_2$ ist dabei wegen (3.8) durch folgende Differentialgleichung mit der Funktion ψ verknüpft:

$$\sum_{k=0}^{m+1} (b_{k,\zeta} + b_{k-1})\hat{h}_2^{(k)}(\zeta) = \psi(\zeta) \quad \text{mit} \quad b_{m+1} :\equiv 0, b_{-1} :\equiv 0\,.$$

Verwendet man ψ gemäß (3.6), so existiert eine Funktion $\hat{h}_2$ in der Form

$$\hat{h}_2(\zeta) = \log(\zeta - \overline{z_1})\tilde{h}_2(\zeta) + \check{h}_2(\zeta) \tag{3.11}$$

mit $\tilde{h}_2 \in \mathcal{H}(j \times 1; \overline{\mathcal{U}(z_1)})$, $\check{h}_2 \in \mathcal{H}(j \times 1; \overline{\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)})$, die dieser Gleichung genügt.

Die Funktionen $\hat{g}_2$ und $\hat{h}_2$ sind in $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ bzw. $\overline{\dot{\mathcal{U}}(z_1)}$ mehrdeutig. Somit erhalten wir mittels $w(z,\zeta) = K_n(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) + \tilde{K}_m\hat{h}_2$, $\hat{g}_1, \hat{g}_2$ und $\hat{h}_2$ gemäß (3.9), (3.10) und (3.11), die in $\dot{\mathcal{U}}_s(z_1) \times \overline{\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)}$ holomorphe Lösung $w = w_1 + w_2 + w_3$ von $w_{z\zeta} + A^{-1}A_z w_\zeta + Bw = 0$ bzw. durch $w(z,\bar{z}) = [K_n(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) + \tilde{K}_m\hat{h}_2]_{\zeta=\bar{z}}$ die in $\dot{\mathcal{U}}_s(z_1)$ definierte Lösung von $w_{z\bar{z}} + A^{-1}A_z w_{\bar{z}} + Bw = 0$. Da $w(z,\bar{z}) = w_1(z,\bar{z}) + w_2(z,\bar{z}) + w_3(z,\bar{z})$ eine in $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ eindeutige Funktion ist, gilt dies aus Stetigkeitsgründen auch für $[K_n(\hat{g}_1 + \hat{g}_2) + \tilde{K}_m\hat{h}_2]_{\zeta=\bar{z}}$. Damit ist Teil a) bewiesen.

b) Auf die Funktionen g und h in der Form (3.2), (3.3) wenden wir die Operatoren K_n bzw. $\tilde{K}_m$ an. Den so erhaltenen Ausdruck $w = K_n g + \tilde{K}_m h$ formen wir um auf die Gestalt

$$\begin{aligned} w &= \log(z - z_1)K_n g_1 + \Phi_1(z,\zeta) + K_n g_0 \\ &\quad + \log(\zeta - \overline{z_1})\tilde{K}_m h_1 + \Phi_2(z,\zeta) + \tilde{K}_m h_0\,, \end{aligned}$$

wobei Φ_1 und Φ_2 eindeutig bestimmte, von logarithmischen Gliedern freie Funktionen bezeichnen.

Für $\zeta = \bar{z}$ setzt man nun $\log(z - z_1) = \log r + i\varphi$ und erhält so

$$\begin{aligned} w(z,\bar{z}) &= \log r(K_n g_1 + \tilde{K}_m h_1)_{\zeta=\bar{z}} \\ &\quad + i\varphi(K_n g_1 - \tilde{K}_m h_1)_{\zeta=\bar{z}} \\ &\quad + \Phi_1(z,\bar{z}) + \Phi_2(z,\bar{z}) + (K_n g_0 + \tilde{K}_m h_0)_{\zeta=\bar{z}}\,. \end{aligned}$$

w ist in $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ genau dann eindeutig, falls $K_n g_1 - \tilde{K}_m h_1 = 0$, d. h. falls $(g_1, -h_1)$ ein N–Paar ist. w besitzt dann die Form

$$\begin{aligned} w(z,\bar{z}) &= \log |z - z_1|^2 (K_n g_1)_{\zeta=\bar{z}} + \Phi_1(z,\bar{z}) + \Phi_2(z,\bar{z}) \\ &\quad + (K_n g_0 + \tilde{K}_m h_0)_{\zeta=\bar{z}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nach Satz 2.1.b sind im Fall einer eingliedrigen Darstellung einer Lösung w in der Form $w_1 = K_n g$ bzw. $w_2 = \tilde{K}_m h$ die Erzeugenden g bzw. h auch in einem nicht notwendig einfach zusammenhängenden Gebiet durch die Funktionen w_1 bzw. w_2 gemäß den Gleichungen (2.4) und (2.5) eindeutig bestimmt. Damit folgt unmittelbar der folgende

Satz 3.2 *Jede Lösung* $w_1 = K_n g\,|_{\zeta=\bar{z}}$ *und* $w_2 = \tilde{K}_m h\,|_{\zeta=\bar{z}}$ *von* $w_{z\bar{z}} + A^{-1}A_z w_{\bar{z}} + Bw = 0$, *die in* $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ *definiert ist und in* z_1 *eine isolierte Singularität besitzt, kann mit einer Funktion* $g \in \mathcal{H}(j \times 1; \dot{\mathcal{U}}(z_1))$ *bzw.* $h \in \mathcal{H}(j \times 1; \overline{\dot{\mathcal{U}}(z_1)})$ *dargestellt werden.*

Auch in diesem Abschnitt soll besonders auf Systeme elliptischer Differentialgleichungen mit reellwertigen Lösungen eingegangen werden. Dazu betrachten wir wieder Gleichung (2.17)

$$v_{z\bar{z}} + \alpha^{-1}\alpha_{\bar{z}} v_z + \bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}_z v_{\bar{z}} + \beta v = 0$$

mit $\beta = \overline{\beta}$. Mit den Ergebnissen von Satz 3.1 folgt nunmehr der

Satz 3.3 *Ist* $v(z,\bar{z})$ *eine in* $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ *definierte und dort reellwertige Lösung von (2.17), so läßt sich diese in* $\dot{\mathcal{U}}(z_1)$ *darstellen durch*

$$v(z,\bar{z}) = \left(\alpha^{-1}(z,\zeta)\, K_n g(z) + \left[\alpha^{-1}(z,\zeta)\, K_n g(z)\right]^*\right)_{\zeta=\bar{z}}$$

mit K_n *gemäß (1.6) und* g *in der Form*

$$g(z) = \log(z - z_1) g_1(z) + g_0(z)\,.$$

Dabei gilt $g_0 \in \mathcal{H}(j \times 1; \dot{\mathcal{U}}(z_1))$ *und* $g_1 \in \mathcal{H}(j \times 1; \mathcal{U}(z_1))$ *ist gegeben durch* $g_1(z) = u_n(z,\zeta_0)\,|_{\zeta_0=\bar{z}_0}, u_n$ *gemäß (2.15), wobei noch*

$$u_n(z,\zeta_0)\,|_{\zeta_0=\bar{z}_0} = -\overline{\tilde{u}_n(z_0,\zeta)\,|_{\substack{\zeta=\bar{z}\\ \zeta_0=\bar{z}_0}}}\,,$$

$\tilde{u}_n$ *nach (2.14), gelten muß.*

Literatur

[1] BAUER, K.W.: *Isolierte Singularitäten der Lösungen einer elliptischen Differentalgleichung.* Univ.-Techn. Hochsch. Graz: Bericht **71-1** (1971), 1 - 15.

[2] BERGLEZ, P.: *On the representation of solutions of partial differential equations in the neighbourhood of isolated singularities.* Complex Variables. Theory Appl. **8** (1987), 181 - 193.

[3] BERGLEZ, P.: *Differential operators for systems of linear partial differential equations.* Ann. Mat. Pura Appl. (in print).

[4] HEERSINK, R.: *Über Lösungsdarstellungen und funktionentheoretische Methoden*

bei elliptischen Differentialgleichungen. Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz **67** (1976), 1 - 79.
[5] INCE, E. L.: *Ordinary Differential Equations.* New York: Dover Publ. 1956.
[6] VEKUA, I. N.: *New Methods for Solving Elliptic Equations.* Amsterdam: North Holland Publ. Co. 1967.

Received 18.06.1990; in revised form 15.10.1990

Dr. Peter Berglez
Institut für Mathematik der Technischen Universität
Steyrergasse 30
A - 8010 Graz

Book review

P. MEINHOLD and E. WAGNER: **Partielle Differentialgleichungen** (Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte: Vol. 8). Leipzig: B.G. Teubner Verlagsges. 1990, 116 pp., 12 Fig.

The present volume on partial differential equations, which has been already appeared in the sixth edition, gives an elementary introduction into that fields and applies to engineers and scientists. It is the goal of this introduction to give an insight into several typical problems and to present classical methods of solution. Longer and harder proofs are omitted. Instead of it the methods are illustrated by numerous examples.

After a general introduction in Chapter 2 fundamentals of the theory of linear partial order differential equations are discussed. Particularly the importance of related characteristic systems for the solution of the Cauchy initial-value problem is accentuated. Chapter 3 is devoted to linear second order differential equations. For the dimension 2 there is explained their classification and their reduction to the normal form of elliptic, parabolic and hyperbolic type, respectively. Then classical approaches to obtain particular solutions together with their superposition in the form of series, integrals and convolutions are discussed. Chapter 4 is devoted to random and initial-value problems for essential problems as the heat equation, the wave equation and equations of elliptic type. The Fourier method is very central. The volume closes with Chapter 5 where an insight into the potential theory and main fundamentals of harmonic functions is given. Systems of differential equations are not explained, and nonlinear problems are lightly touched at the end of the volume.

In spite of the small extend of this volume the authors presented - to the reviewer's way of thinking - a very informative first introduction into the field, which certainly meets the wishes of the ment readers.

Würzburg W. Velte