Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Vol. 10 (1991) 4, 535–540

Über eine Verallgemeinerung der Legendre-Hadamardschen Bedingung auf restringierte Variationsprobleme[1)]

R. KLÖTZLER

Variational problems are studied with continuous integrands, subject to vector-valued functions x of vector variables t with restricted derivatives x_t, under some goodness conditions of their feasible set $\dot{X}$. For an optimal solution x_0 it will be shown the necessity of the (strong) quasi-convexity (in the sense of C.B. Morrey) of the integrand on $\dot{X}$ in regard of x_0.

Key words: *Legendre-Hadamardsche Bedingung, q-Konvexität*
AMS subject classification: 49B36

1. Einleitung

Für mehrdimensionale Variationsprobleme auf einem Integrationsgebiet $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ in der Form

$$\begin{aligned} &J(x) = \int_\Omega f(t, x(t), x_t(t))\,dt \to \text{Min} \quad \text{auf } C^{1,n}(\bar{\Omega}) \\ &\text{unter Randbedingungen } x = \varphi_0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{0}$$

stellt die *Legendre-Hadamardsche Bedingung* ein klassisches notwendiges Optimalitätskriterium dar. Ist x_0 eine optimale Lösung von (0) und $f \in C^2$, so muß nach J. HADAMARD [3] in allen Punkten $t \in \Omega$ die Ungleichung

$$f_{x^i_{t\alpha} x^j_{t\beta}}(t, x_0(t), x_{0t}(t) + \zeta\lambda^T)\,\zeta_i\zeta_j\lambda^\alpha\lambda^\beta \geq 0 \tag{1}$$

für beliebige (Spalten-)Vektoren $\lambda \in \mathbb{E}^m$, $\zeta \in \mathbb{E}^n$ gelten. Hierbei wird in dieser (und auch in nachfolgender) Darstellung über doppelt auftretende Indizes summiert; $\lambda^T = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m)$, $\zeta^T = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ und x_t wird als $(n \times m)$-Matrix der partiellen Ableitungen $x^i_{t\alpha}$ aufgefaßt. Da in dieser Bedingung Ableitungen zweiter Ordnung von f benutzt werden, nennen wir sie *Legendre-Hadamardsche Bedingung 2. Ordnung.*

Ist hingegen $f \in C^1$, so muß nach L.M. GRAVES [2] in allen $t \in \Omega$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} &f(t, x_0(t), x_{0t}(t) + \zeta\lambda^T) \\ &\quad \geq f(t, x_0(t), x_{0t}(t)) + f_{x^i_{t\alpha}}(t, x_0(t), x_{0t}(t))(\lambda^\alpha\zeta_i) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{E}^m, \zeta \in \mathbb{E}^n \end{aligned} \tag{2}$$

erfüllt sein. Diese Forderung heißt *Weierstraß-Bedingung*; wir nennen sie auch *Legendre-Hadamardsche Bedingung 1. Ordnung.*

---

1) Dieser Beitrag stellt eine Erweiterung der Untersuchung [5] dar. Sie entstand im Rahmen eines Studienaufenthaltes an der Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn mit dankenswerter Unterstützung des Sonderforschungsbereiches 256.

Ist schließlich $f \in C$, so werden wir zeigen, daß in allen Punkten $t \in \Omega$ die Beziehung

$$\Phi[t, x_o; \Lambda, \zeta, \mu] \equiv \sum_{k=o}^{m} f(t, x_o(t), x_{o_t}(t) + \zeta\lambda_k^T)\mu_k - f(t, x_o(t), x_o(t), x_{o_t}(t)) \geq 0 \quad (3)$$

auf der Menge

$$K = \left\{ (\Lambda, \zeta, \mu) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Lambda = (\lambda_o, \dots, \lambda_m),\ \zeta \in \mathbb{E}^n,\ \mu = (\mu_o, \dots, \mu_m) \\ \mu_k \geq 0 \quad (k = 0, \dots, m),\ \sum_{k=o}^{m} \mu_k = 1,\ \sum_{k=o}^{m} \mu_k \lambda_k = 0 \end{array} \right\} \quad (3')$$

gelten muß. Wir nennen (3) auch die *Legendre-Hadamardsche Bedingung 0. Ordnung.*

Aus (1) folgt (2) und aus (2) folgt (3). Man zeigt auch leicht, daß unter der Voraussetzung $f \in C^1$ aus (3) die Bedingung (2) folgt. Ist f sogar aus C^2, so resultiert (1) aus (2). Man vergleiche dazu z.B. C.B. MORREY [6: S. 112]. Für $m = 1$ wurde die Bedingung (3) bereits durch L. BITTNER [1] hergeleitet.

Das Hauptanliegen dieser Arbeit besteht einerseits darin, unter gewissen Einschränkungen die Notwendigkeit der Bedingungen (1), (2) und (3) auch dann noch nachzuweisen, wenn unser Variationsproblem zusätzliche Nebenbedingungen der Gestalt

$$x_t(t) \in \dot{X}(t, x(t)) \quad \text{für fast alle } t \in \Omega \quad (4)$$

erhält. Zum anderen werden wir eine Verallgemeinerung der Bedingung (3) herleiten, die in enger Beziehung zur "starken Quasikonvexität" im Sinne von C.B. MORREY [6] steht. Wir setzen dabei die mengenwertige Abbildung $\dot{X}: \bar{\Omega} \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^{nm}$ als stetig voraus. Außerdem sei

$$\dot{X}(t, \xi) = \overline{\operatorname{int} \dot{X}(t, \xi)} \neq \Phi \quad \text{für alle } (t, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{E}^n. \quad (5)$$

Mit diesem Ergebnis werden wichtige Voraussetzungen geschaffen, die im Sinne von R. KLÖTZLER [4] eine Erweiterung des Pontryaginschen Maximumprinzips auf Steuerungs- und Variationsprobleme mit mehrfachen Integralen ermöglichen.

2. Vorbereitende Begriffe und Bezeichnungen

In dieser Arbeit wird mit $B(w, \varepsilon)$ zu $w \in \mathbb{E}^r$ und $\varepsilon > 0$ die offene Kugel des $\mathbb{E}^r$ mit dem Mittelpunkt w und Radius ε bezeichnet. Ferner soll $\operatorname{dist}(A, w)$ der euklidische Abstand des Punktes w von der Menge $A \subset \mathbb{E}^r$ sein. Ist A eine Menge des $\mathbb{E}^r$, so ist

$$A_\varepsilon := \{w \in \mathbb{E}^r \mid \operatorname{dist}(A, w) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad A_{-\varepsilon} := \{w \in A \mid \operatorname{dist}(\partial A, w) > \varepsilon\},$$

wobei ∂A den Rand von A bezeichnet.

Zu einem System $\Lambda = \{\lambda_o, \dots, \lambda_m\}$ von $m+1$ Vektoren $\lambda_o, \dots, \lambda_m$ des $\mathbb{E}^m$ bezeichne $S(\Lambda)$ das Simplex mit den Eckpunkten $\lambda_o, \dots, \lambda_m$. Es heißt *regulär*, wenn es innere Punkte enthält, anderenfalls heißt es *nichtregulär*.

Eine Funktion g von $(n \times m)$-Matrizen $w = (w_\alpha^i)_{\alpha=1,\dots,m}^{i=1,\dots,n}$ heißt nach C.B. MORREY [6: S. 112] *quasikonvex* - wir sagen dafür kurz *q-konvex* - wenn für beliebige Matrizen w dieser Art und (Λ, ζ, μ) aus K gemäß (3') die Ungleichung $\sum_{k=o}^{m} g(w + \zeta\lambda_k^T)\mu_k \geq g(w)$ gilt. Eine Funktion g von $(n \times m)$-Matrizen w heißt nach C.B. MORREY [6: S. 114] *stark* *quasikonvex* - wir sagen dafür kurz *stark q-konvex* - wenn für beliebige beschränkte Gebiete $U \subset \mathbb{E}^m$ und n-vektorwertige Lipschitz-stetige Funktionen z auf U mit der Eigenschaft $\operatorname{supp} z \subset U$ die Ungleichung

$$\int_U g(w + z_t(t))\, dt \geq g(w) \operatorname{mes} U$$

gilt.

Eine *stetige mengenwertige Abbildung* χ von Punkten $z \in \mathbb{E}^l$ in den $\mathbb{E}^r$ ist nach S. ROLEWICZ [7] durch die folgenden zwei Eigenschaften charakterisiert:

a) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon)$ mit $\chi(z_0)_\varepsilon \supset \chi(z)$ für alle $z \in B(z_0, \delta(\varepsilon))$.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon)$ mit $\chi(z_0) \supset \chi(z)_\varepsilon$ für alle $z \in B(z_0, \delta(\varepsilon))$.

Setzen wir speziell in (5) für das Argument ξ den Wert $x(t)$ für $x \in C^{\alpha,n}(\overline{\Omega})$ ein, so wird $\chi(\cdot) = \dot{X}(\cdot, x(\cdot))$ eine stetige mengenwertige Funktion auf $\overline{\Omega}$.

3. Anwendung einer allgemeinen Klasse von Variationen

Im Gegensatz zu L. M. GRAVES [2] verwenden wir hier für die Herleitung von (3) eine allgemeinere Technik, die es auch gestattet, Nebenbedingungen der Gestalt (4) einzubeziehen. Wir setzen dabei lediglich $f \in C$ voraus. Wir studieren nun das Variationsproblem (0) unter der Nebenbedingung (4) auf dem allgemeineren Funktionenraum $W_q^{1,n}(\Omega)$ mit $q > m$, d.h.

$$I(x) = \int_\Omega f(t, x(t), x_t(t))\, dt \to \text{Min auf } W_q^{1,n}(\Omega) \tag{6}$$

unter der Nebenbedingung $x_t(t) \in \dot{X}(t, x(t))$ fast überall auf Ω
und Randbedingung $x = \varphi_0$ auf $\partial\Omega$.

Hypothese: Das Problem (6) besitzt eine Lösung $x_0 \in W_q^{1,n}(\Omega)$, für die x_{0t} fast überall stetig auf Ω ist.

Nach den Sobolevschen Einbettungssätzen ist zunächst x_0 stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann bilden wir unter obiger Hypothese zu einem beliebigen Stetigkeitspunkt $t_0 \in \Omega$ von x_{0t} mit der Eigenschaft

$$x_{0t}(t_0) \in \operatorname{int}\left[\dot{X}(t_0, x_0(t_0))\right] \tag{7}$$

eine spezielle Folge von Störfunktionen $\{\xi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Dazu greifen wir uns eine beliebige Umgebung $U \subset \Omega$ von t_0 heraus sowie eine beliebige Lipschitz-stetige n-vektorwertige Funktion φ auf Ω mit den Eigenschaften

$$\operatorname{supp} \varphi \subset U,\ x_{0t}(t_0) + \varphi_t(t) \in \operatorname{int}\left[\dot{X}(t_0, x_0(t_0))\right]. \tag{8}$$

Wegen (7) ist die Menge dieser φ nicht leer. Außerdem erklären wir

$$U_k = \left\{ t \in \Omega \mid t_0 + k(t - t_0) \in U \right\} \tag{9}$$

und

$$\xi^k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \notin U_k \\ k^{-1}\varphi(t_0 + k(t - t_0)) & \text{für } t \in U_k. \end{cases} \tag{10}$$

Diese Funktionenfolge $\{\xi^k\}$ hat die Eigenschaft, ähnliche Graphen mit dem Ähnlichkeitszentrum $(t_0, 0)$ zu besitzen. Wegen der Bildstetigkeit von $\dot{X}$ existiert zu φ ein k_0, so daß infolge (8) auch

$$x_{0t}(t) + \xi_t^k(t) \in \operatorname{int}\left[\dot{X}(t, x_0(t))\right] \text{ für } k \geq k_0 \text{ und } t \in U_k \tag{11}$$

gilt. Infolgedessen ist

$$I(x_0 + \xi^k) - I_0(x_0) \geq 0 \text{ für alle } k \geq k_0 . \tag{12}$$

Unter Ergänzung von geeigneten Summanden können wir diese Differenz auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} I(x_0+\xi^k) - I_0(x_0) = &\int_{U_k}\left[f(t, x_0(t) + \xi^k(t), x_{0t}(t) + \xi_t^k(t)) - f(t, x_0(t_0), x_{0t}(t_0) + \xi_t^k(t))\right]dt \\ &- \int_{U_k}\left[f(t, x_0(t), x_{0t}(t)) - f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0))\right]dt \\ &+ \int_{U_k}\left[f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0) + \xi_t^k(t)) - f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0))\right]dt . \end{aligned} \tag{13}$$

Die ersten beiden Integrale der rechten Seite von Gleichung (13) sind wegen der Stetigkeit von f von der Größenordnung $(\operatorname{mes} U_k) o(k)$. Der Ausdruck

$$\frac{1}{\operatorname{mes} U_k} \int_{U_k}\left[f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0) + \xi_t^k(t)) - f(x_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0))\right]dt \tag{14}$$

ist unabhängig von k. Denn unter Beachtung von (9) und (10) können wir den Ausdruck (14) mittels der Substitution $\tau = k(t - t_0) + t_0$ umformen in

$$\frac{k^{-m}}{\operatorname{mes} U_k} \int_{U_k}\left[f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0) + \varphi_\tau(\tau)) - f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0))\right]d\tau ;$$

und der Faktor vor diesem Integral ist gleich $1/\operatorname{mes} U$. Somit erhalten wir aus (13) nach Division mit $1/\operatorname{mes} U_k$ und Grenzübergang $k \to \infty$ wegen (12) die notwendige Bedingung

$$\int_U f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0) + \varphi_\tau(\tau))\, d\tau \geq (\operatorname{mes} U) f(t_0, x_0(t_0), x_{0t}(t_0)). \tag{15}$$

Zusammengefaßt lautet unser Resultat:

Satz 1: *Ist x_0 eine Lösung des restringierten Variationsproblems* (6), *so muß in allen Stetigkeitspunkten $t_0 \in \Omega$ von x_{0t} mit der Eigenschaft* (7) *die Bedingung* (15) *gelten zu beliebigen Lipschitz-stetigen n-vektorwertigen Funktionen φ, die den Einschränkungen* (8) *genügen.*

4. Spezielle Folgerungen

Wir setzen in Anlehnung an [5] zu einem gegebenen regulären m-Simplex $S(\Lambda)$ mit den Eckpunkten $\lambda_j \in \mathbb{E}^m$ $(j = 0, \dots, m)$ und $0 \in \operatorname{int} S(\Lambda)$ in (15) die Funktion φ in der speziellen Gestalt

$$\varphi(t) = -\zeta \operatorname{Max}\left\{0, \delta - \operatorname{Max}(\lambda_j^{\mathrm{T}}(t - t_o))\right\} \tag{16}$$

an. Dabei ist ζ ein beliebiger Vektor des $\mathbb{E}^n$, $\Lambda = (\lambda_o, \dots, \lambda_m)$ und $\delta > 0$ eine so kleine Zahl, daß $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$ gilt. Für jeden Index $i = 1, \dots, n$ bilden dann die Graphen von φ^i pyramidenförmige Ausbeulungen der Ebene mit der Pyramidenbasis

$$U = \Delta := \left\{t \in \mathrm{E}^m \mid \lambda_j^{\mathrm{T}}(t - t_o) \le \delta, j = 0, \dots, m)\right\}$$

und der Pyramidenhöhe $-\zeta^i \delta$. Die Forderung (8) äußert sich jetzt in den Bedingungen

$$x_{o_t}(t_o) + \zeta \lambda_j^{\mathrm{T}} \in \operatorname{int} \dot{X}(t_o, x_o(t_o)) \quad (j = 0, \dots, m). \tag{17}$$

Die Projektion der j-ten Pyramidenseite auf die t-Hyperebene bezeichnen wir mit Δ_j, so daß $\Delta = \bigcup_{j=o}^m \Delta_j$ ist. Außerdem ist φ_t auf jedem Δ_j konstant. Die nach außen orientierte Plangröße der j-ten Pyramidenseite beträgt $\mathfrak{n}_j$ mit

$$\mathfrak{n}_t^{\mathrm{T}} = \operatorname{sgn} \zeta^i(+\zeta^i \lambda_j^1, \dots, +\zeta^i \lambda_j^m, -1) \operatorname{mes} \Delta_j \quad (j = 0, \dots, m).$$

Die nach außen orientierte Plangröße der Pyramidenbasis ist der $(m+1)$-dimensionale Vektor $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}^{\mathrm{T}} = (0, \dots, 0, + \operatorname{mes} \Delta) \operatorname{sgn} \zeta^i$. Da die Summe der Plangröße eines Polyeders bekanntlich immer gleich dem Nullvektor ist, gilt neben $\operatorname{mes} \Delta = \sum_{j=o}^m \operatorname{mes} \Delta_j$ zugleich

$$\sum_{j=o}^m \lambda_j \operatorname{mes} \Delta_j = 0. \tag{18}$$

Mit $\mu_j := \operatorname{mes} \Delta_j / \operatorname{mes} \Delta$ geht dann die Bedingung (15) in

$$\sum_{j=o}^m \mu_j f\left(t_o, x_o(t_o), x_{o_t}(t_o) + \zeta \lambda_j^{\mathrm{T}}\right) \ge f\left(t_o, x_o(t_o), x_{o_t}(t_o)\right) \tag{19}$$

über. Dabei ist

$$\sum_{j=o}^m \mu_j = 1, \quad \mu_j = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=o}^m \mu_j \lambda_j = 0. \tag{20}$$

Die Bedingung (19) haben wir vorerst unter den Einschränkungen $0 \in \operatorname{int} S(\Lambda)$ und (17) erhalten. Da aber ein nichtreguläres m-Simplex beliebig genau durch reguläre m-Simplexe approximiert werden kann, gilt letztlich wegen (5) die Bedingung (19) auch für beliebige Λ mit $0 \in S(\Lambda)$ und

$$x_{o_t}(t_o) + \zeta \lambda_j^{\mathrm{T}} \in \dot{X}\left(t_o, x_o(t_o)\right). \tag{21}$$

Unsere Ergebnisse fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 2: *Ist x_o eine Lösung des restringierten Variationsproblems* (6), *so muß in allen Stetigkeitspunkten $t_o \in \Omega$ von x_{o_t} mit der Eigenschaft* (7) *die Bedingung* (19) *gelten zu beliebigen $\zeta \in \mathbb{E}^n$, $\lambda_j \in \mathbb{E}^m$ und μ_j $(j = 0, \dots, m)$, die den Einschränkungen* (20) *und* (21) *genügen.*

Offensichtlich deckt sich im Falle des Fehlens von Nebenbedingungen in (6), d.h. $\dot{X} = \mathbb{E}^{nm}$, die Aussage des Satzes 2 mit der Legendre-Hadamardschen Bedingung 0-ter Ordnung gemäß (3).

Ist die Bedingung (3) für *beliebige* dritte Argumente $p_0 = x_{0t}$ erfüllt, so nennt C.B.MORREY[6: S. 112] die Funktion $f(t, x_0(t), \cdot)$ *quasikonvex*. Da dieser Begriff in der Optimierungstheorie aber noch in gänzlich davon abweichendem Sinne gebraucht wird, wollen wir besser *q-konvex* sagen (vgl. auch Abschnitt 2). Ist die Bedingung (15) für beliebige dritte Argumente $p_0 = x_0$ erfüllt, so nennt C.B. MORREY [6: S. 114] die Funktion $f(t_0, x_0(t_0), \cdot)$ *stark quasikonvex*. Wir wollen hierfür wieder *stark q-konvex* sagen.

Im Hinblick auf unsere restringierten Variationsprobleme (6) wollen wir hier und in Nachfolgearbeiten die durch Satz 2 gefolgerte Optimalitätsbedingung (19) als

q-Konvexität von $f(t_0, x_0(t_0), \cdot)$ *auf* $\dot{X}(t_0, x_0(t_0))$ *bezüglich* $x_{0t}(t_0)$

bezeichnen. In entsprechender Weise drücken wir die durch Satz 1 geforderte Bedingung (15) als

starke q-Konvexität von $f(t_0, x_0(t_0), \cdot)$ *auf* $\dot{X}(t_0, x_0(t_0))$ *bezüglich* $x_{0t}(t_0)$

aus.

LITERATUR

[1] BITTNER, L.: *A remark concerning the Weierstrass condition without derivatives.* Preprint. Greifswald: Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Preprint-Reihe Math. **13** (1985), 1 - 4.

[2] GRAVES, L. M.: *The Weierstraß condition for multiple integral variation problem.* Duke Math J. **5** (1939), 656 - 660.

[3] HADAMARD, J.: *Sur quelques questions de calcul des variations.* Bull. Soc. Math. France **33** (1905), 73 - 80.

[4] KLÖTZLER, R.: *Extensions of Pontryagin's Maximum Principle.* In: Proceedings of the 9th IFIP-Conference Leipzig 1989 (to appear).

[5] KLÖTZLER, R.: *Über eine Verallgemeinerung der Legendre-Hadamardschen Bedingung auf restringierte Variationsprobleme.* Preprint. Bonn: Preprint-Reihe des Sonderforschungsbereichs 256 der Universität Nr. **87** (1989), 1 - 12.

[6] MORREY, C. B.: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1966.

[7] ROLEWICZ, S.: *Funktionalanalysis und Steuerungstheorie.* Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag 1976.

Received 20.02.1990

Prof. Dr. Rolf Klötzler
Sektion Mathematik der Universität Leipzig
Augustusplatz 10
D (Ost) - 7010 Leipzig